

MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI ; H. STEINHAUS

TOM IV

H Y P O T H È S E

D U

C O N T I N U

P A R

W A C Ł A W S I E R P I Ń S K I

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

W A R S Z A W A - L W Ó W 1934

• 02338

Tous droits réservés.



21. CZER 1934

PRINTED IN POLAND
 DRUK M. GARASINSKI, WARSZAWA, BRACKA 20.

PRÉFACE.

La question si l'ainsi dite *hypothèse du continu* est vraie ou non appartient aux problèmes les plus difficiles de la mathématique contemporaine. La présente monographie ne tend point à résoudre ce problème; elle a pour but de faire connaître au lecteur les conséquences que l'hypothèse du continu implique.

Il y a des personnes, même parmi les savants éminents, qui doutent de la possibilité de jamais résoudre le problème du continu. Dans ces conditions, les conséquences de l'hypothèse du continu peuvent être considérées pratiquement comme si elles étaient vraies. En tout cas, on peut affirmer avec certitude qu'une tentative d'ébranler une conséquence quelconque de l'hypothèse du continu serait non moins difficile que la tentative d'ébranler l'hypothèse même.

Ce fait justifie déjà l'intérêt qu'il y ait de prendre connaissance des conséquences qui résultent de l'hypothèse du continu. Chacune de ces conséquences donne naturellement lieu à la question si on peut la démontrer sans l'hypothèse du continu (ou, du moins, à l'aide des hypothèses plus faibles) ou bien si elle est, par contre, équivalente à cette hypothèse. Partout où c'était possible je tachais de tenir compte de ces questions, en indiquant au besoin le degré des difficultés qu'elles comportent. Quant à la manière de déduire les conséquences de l'hypothèse du continu, je tachais autant que possible d'établir d'abord sans cette hypothèse les théorèmes généraux pour en tirer ensuite ces conséquences par l'application directe de l'hypothèse en question.

L'introduction de ce livre a pour but d'expliquer en quoi consiste l'hypothèse du continu et l'ainsi dit *problème du continu*. J'y donne deux énoncés de l'hypothèse du continu: l'un basé sur la notion de *quantité* (puissance d'un ensemble) et l'autre sur celle d'*ordre*. Plusieurs propositions équivalentes à cette hypothèse sont recueillies et envisagées dans le chapitre I.

Le chapitre II est consacré à une conséquence extrêmement importante de l'hypothèse du continu, tirée en 1914 par M. N. Lusin; j'en déduis une série d'autres conséquences, dont quelques unes sont très récentes ou même publiées ici pour la première fois. Le chapitre III contient l'étude des relations entre la catégorie de Baire et la mesure de Lebesgue autant qu'elles découlent de l'hypothèse du continu. Un grand nombre d'autres conséquences de cette hypothèse sont traitées dans le chapitre IV.

Les rapports entre l'hypothèse du continu, qui est en dernier lieu une proposition de pure *existence*¹⁾, et les ainsi dits *problèmes d'effectivité* occupent le chapitre VI. Les chapitres V et VII sont consacrés respectivement à deux hypothèses, l'une peut être plus faible (celle des *alephs inaccessibles*) et l'autre peut être plus forte (*l'hypothèse de Cantor sur les alephs*) que l'hypothèse du continu.

Enfin, le supplément à la fin du livre contient une méthode imaginée tout récemment par M. N. Lusin pour éliminer l'hypothèse du continu de quelques propositions déduites de cette hypothèse.

Sans prétendre d'épuiser *toutes* les conséquences ou applications de l'hypothèse du continu qui soient connues dans la littérature mathématique, je me suis proposé d'en exposer ici au moins celles qui me semblent importantes et d'en étudier les rap-

ports mutuels (cf. la table des relations, p. 178). Bien entendu, j'ai taché avant tout de me tenir au côté mathématique et non philosophique de la question.

La lecture du livre n'exige de la part du lecteur qu'une connaissance élémentaire des notions fondamentales de la Théorie générale des ensembles et de leurs principales propriétés (cf. p. ex. le début des tomes I, II et surtout du tome III de cette collection). J'emploie les notations usuelles; les autres sont recueillies p. 8.

En terminant, je tiens à exprimer ici mes remerciements à M. Bronisław Knaster, qui n'a ménagé ni son temps ni son travail à relire le manuscrit et et la plupart des épreuves de ce livre, et auquel je dois quelques précieux conseils concernant le groupement d'une partie des matériaux, de même que plusieurs remarques positives en matière du texte.

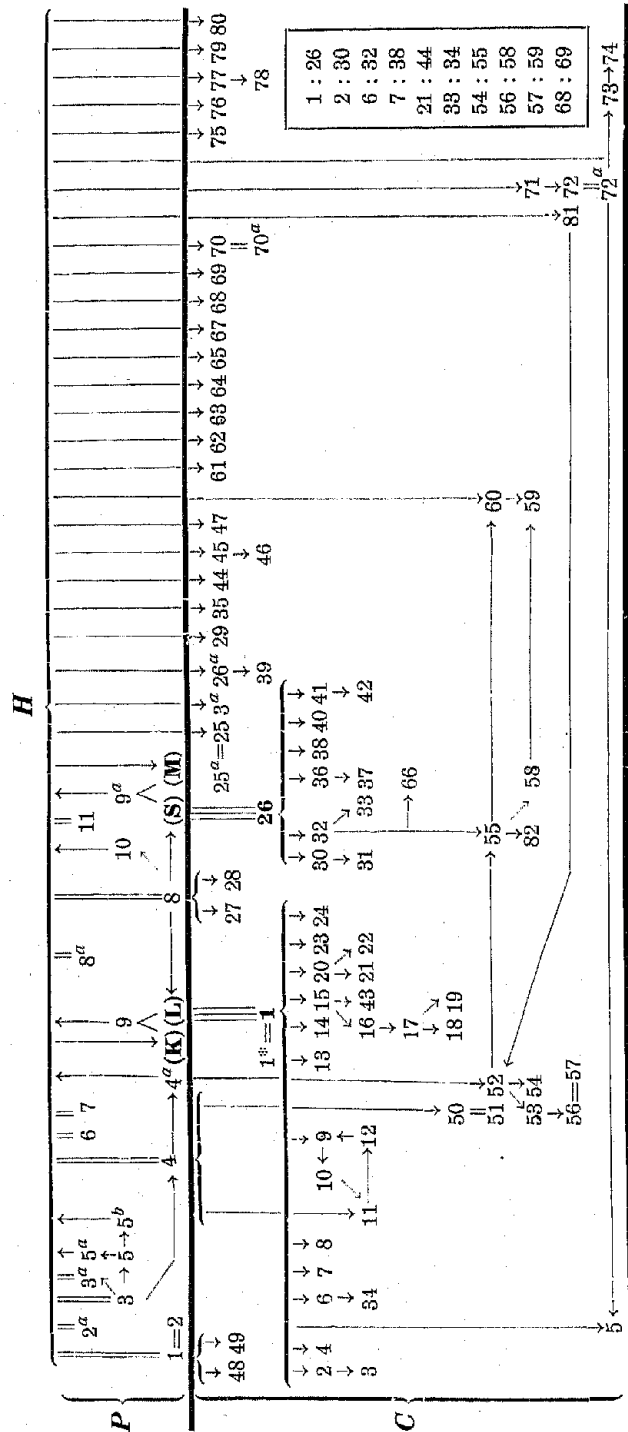
Wacław Sierpiński.

Varsovie, Avril 1934.

¹⁾ à savoir, de l'existence d'une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres réels et celui des nombres ordinaux transfinis de deuxième classe.

TABE DES RELATIONS.

Signes: → implication, = équivalence, ≡ identité, : dualité.



G_m
 P_m

$G_2^{N_0}$
 $P_1 \rightarrow P_2$
 $P_1 \rightarrow P_2$
 $P_2 \rightarrow P_3$

G
 $G^* P_1 = P_2 = P_3$
 $C_1 C_2$

INDEX TERMINOLOGIQUE.

Additivité absolue 28, 76.
Aleph 5, inaccessible 152.
Bien ordonné (ensemble) 3.
Caractéristique (fonction) 39.
Complet (ensemble-limite) 91, (famille de suites finies) 61.
Condition de Baire 38, (Δ) 106, 154.
Constituantes (d'ensembles analytiques) 64.
Continu (hypothèse du) 1, 3, (problème du) 5, (puissance du) 1.
Courbe 11, 12.
Croissants (ensembles) 24, (famille d'ensembles) 120.
Dénombrable (ensemble) 1.
Disjoints (ensembles) 6.
Dualité 76.
Effectifs (exemples) 25, 70, *effectivité* 162.
Ensemble de Lusin 37, dénombrable 1, de Vitali 127, -limite complet 91, ordonné 2, bien ordonné 3, parfaitement mesurable 50, partout de deuxième catégorie 115, totalement imparfait 87, toujours de première catégorie 63, universel analytique 164, universel ordonné 143.
Ensembles croissants (famille d') 120, *disjoints* 6, *presque disjoints* 126.

Famille complète (de suites finies) 61.
Familles semblables 80.
Fonction caractéristique 39, de Baire 38.
Généralisé problème de la mesure 44.
Généralisée homéomorphie 86, hypothèse du continu 166.
Héréditaire (propriété) 28.
Homéomorphie généralisée 86.
Hypothèse du continu ou *H* 1, 3, généralisée ou de Cantor sur les alephs ou *G* 166, *G** 166, G_m 168.
Image géométrique d'une fonction 71.
Inaccessible (aleph) 107, 152.
Mesurable parfaitement 50, relativement 137.
Ordonné (ensemble) 2.
Ordre 2.
Parfaitement mesurable (ensemble) 50.
Partout de deuxième catégorie (ensemble) 115.
Point simple d'une courbe 73.
Portion 45.
Presque disjoints (ensembles) 126.
Presque-période 135.
Problème de Hausdorff 91, de Kuratowski 116, de Lebesgue 70, de Lusin 148, de Ma-

- zurkiewicz 52, de Saks 63,
du continu 5, d'Urysohn 50, gé-
néralisé de la mesure 44.
- Propriété *C* 37, de Baire 38, *J*, *J_c* 148,
L 37, *M* 48, *P* 28, *S* 81, *U* 154,
(Δ) 106, 154, λ 94.
- Puissance 1.
- Régulier (nombre cardinal) 152.
- Relativement mesurable (ensemble)
137.
- Semblables* (familles) 80.
- Simple* (point) 73.
- Totalement imparfait (ensemble) 87.
- Toujours de première catégorie (ensem-
ble) 63.
- Type de dimensions 99, 150.
- Universel (ensemble) analytique 164,
ordonné 143.

AUTEURS CITÉS.

- Aronszajn 51.
- Baer 168.
- Baire 38, 69.
- Banach 44, 53, 57, 60, 107, 130.
- Bernstein 162.
- Blumberg 118.
- Borel 4, 37, 91.
- Braun 12, 17, 22, 171.
- Cantor 1, 4, 27, 166.
- Carathéodory 92.
- Egoroff 59.
- Eilenberg 110, 111, 112.
- Fraenkel 3.
- Fréchet 59, 99, 150.
- Hahn 91, 92.
- Hardy 146.
- Hausdorff 91, 144, 152, 166.
- Hilbert 3, 4, 32, 73.
- Hurewicz 32, 62, 63, 149.
- Knaster 162.
- König J. 6, 7.
- Kuratowski 25, 38, 39, 43, 44, 53, 57,
60, 61, 62, 64, 72, 86, 95, 98, 107,
113, 116, 146, 151, 159, 162, 172, 176.
- Lavrentieff 50.
- Lebesgue 69, 70, 81, 104, 162.
- Lindenbaum 51, 140, 162, 166, 167,
171.
- Lusin 3, 4, 6, 11, 24, 25, 29, 36, 37, 62,
63, 64, 65, 68, 69, 70, 76, 86, 90, 96, 100,
109, 111, 118, 146, 148, 163, 172, 176.
- Mazurkiewicz 52, 103, 105.
- Menger 48, 49, 62, 63.
- Novikoff 177.
- Peano 73.
- Poprougénko 43, 52.
- Richard 4.
- Russell 80.
- Saks 46, 47, 63, 90, 104.
- Schoenflies 146.
- Sierpiński 3, 5, 6, 9, 12, 14, 17, 18, 19,
20, 22, 23, 24, 28, 29, 31, 37, 39, 42,
45, 49, 50, 51, 52, 59, 60, 63, 64, 68,
70, 71, 75, 76, 80, 85, 86, 92, 94, 98,
99, 100, 102, 104, 106, 107, 109, 113,
116, 118, 120, 123, 126, 127, 130, 132,
135, 136, 144, 148, 151, 152, 153, 159,
162, 163, 164, 168, 169, 171.
- Steinhaus 103.
- Szpilrajn 38, 44, 80, 91, 92, 93.
- Tarski 33, 123, 124, 125, 126, 141, 152,
166, 167, 168, 171.
- Ulam 20, 106, 107, 109, 110, 153.
- Urysohn 50.
- Vitali 127.
- Waraszkiewicz 51.
- Whitehead 80.
- Zalcwasser 95, 118.
- Zermelo 5, 6, 9, 103, 163.
- Zygmund 118.

SOMMAIRE.

PRÉFACE	III
INTRODUCTION. L'hypothèse du continu et le problème du continu	1
NOTATIONS	8
CHAPITRE I. Propositions équivalentes à l'hypothèse du continu.	
P_1 . L'ensemble de tous les points du plan est une somme de deux ensembles dont l'un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses	9
P_2 . Le plan est une somme d'une infinité dénombrable de courbes.	11
P_{2a} . L'espace à trois dimensions est une somme d'une infinité dénombrable de courbes	12
P_3 . Il existe une suite infinie de fonctions univoques d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable N de nombres réels, toutes les fonctions de la suite, sauf peut être un nombre fini, transforment N en ensemble de tous les nombres réels	12
P_{3a} . Il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$ à une infinité dénombrable de valeurs (c. à d. faisant correspondre à tout nombre réel x un ensemble dénombrable $f(x)$) qui transforme tout ensemble indénombrable de nombres réels en ensemble \mathcal{C} de tous les nombres réels.	15
P_4 . Il existe un système d'ensembles A_x^i (où i est un nombre naturel et x un nombre réel) tel que	
1) $\mathcal{C} = \sum_{x \in \mathcal{C}} A_x^i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots;$	
2) $A_x^i A_y^i = 0 \quad \text{pour } x \neq y, \quad i = 1, 2, 3, \dots$	
et que	
3) N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que pour $i \geq p$ et pour tout nombre réel x l'ensemble $N \cdot A_x^i$ est non vide	15
P_4a . Il existe un système d'ensembles A_x^i , où $i = 1, 2, 3, \dots$ et x parcourt tous les nombres réels, qui satisfait aux conditions 1) et 2) de la proposition P_4 et à la condition suivante:	

3a) Quel que soit le nombre réel x , l'ensemble $\mathcal{C} - \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i$ est au plus dénombrable	18
P_5 . Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ telle que, quelle que soit la suite infinie de nombres réels y_1, y_2, y_3, \dots , à toute valeur de x , sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs (et qui dépend de la suite y_1, y_2, y_3, \dots), correspond une suite infinie croissante d'indices k_1, k_2, k_3, \dots (dépendant de x et de la suite y_1, y_2, y_3, \dots) qui satisfont à l'égalité $f_{k_i}(x) = y_{k_i}$ pour $i = 1, 2, \dots$	20
P_{5a} . Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ telle que, quel que soit le nombre réel y , la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ contient pour toute valeur de x , sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs (et qui dépend de y), une infinité de termes égaux à y	22
P_{5b} . Il existe une famille F de puissance du continu de suites infinies de nombres réels telle que y_1, y_2, y_3, \dots étant une suite infinie quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les suites x_1, x_2, x_3, \dots de la famille F pour lesquelles on a $x_k \neq y_k$, quel que soit $k = 1, 2, 3, \dots$, est au plus dénombrable	22
P_6 . L'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'ensembles croissants dénombrables	23
P_7 . Il existe un ensemble analytique linéaire qui n'est pas une somme de moins de 2^{\aleph_0} ensembles mesurables (B)	24
P_8 . Soit E un ensemble (formé d'éléments quelconques et Φ une famille de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de E telle que E n'est pas une somme de \aleph_0 ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable; dans ces conditions E contient un ensemble indénombrable N qui n'admet avec tout ensemble de la famille Φ qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.	25
P_{8a} . Soit P une propriété des ensembles de nombres réels assujettie aux conditions:	
1) P est une propriété héréditaire,	
2) P est une propriété absolument additive,	
3) Tout ensemble formé d'un nombre réel jouit de la propriété P ,	
4) Il existe une famille Φ de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ d'ensembles de nombres réels jouissant de la propriété P et telle que tout ensemble de nombres réels jouissant de cette propriété est contenu dans un (au moins) des ensembles de la famille Φ ;	
alors chaque ensemble E de nombres réels qui ne jouit pas de la propriété P contient un sous-ensemble non dénombrable N ayant tout au plus une infinité dénombrable de points communs avec tout ensemble jouissant de la propriété P	28
P_9 . Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:	
(K) Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de première catégorie de Baire,	
(L) Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non-dense	29
P_{9a} . Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:	
(M) Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de mesure nulle,	



- (S) Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble de mesure nulle 31
- P_{10} . Il existe dans l'espace de Hilbert un ensemble indénombrable de points, dont aucun sous-ensemble indénombrable n'est homéomorphe à une partie d'un espace euclidien 32
- P_{11} . Aucun ensemble de puissance \aleph_1 n'est une somme de plus que \aleph_1 ensembles infinis ayant deux à deux un nombre fini d'éléments communs 33

CHAPITRE II. L'ensemble de M. Lusin.

§ 1. Proposition C_1 .

- C_1 . Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble (linéaire) parfait non-dense 36
- § 2. Propriétés L et C. 37
- § 3. Fonctions définies sur les ensembles à propriété L. 38
- § 4. Propriété M. 48

§ 5. Conséquences $C_2 - C_9$ de la proposition C_1 .

- C_2 . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui est transformé par toute fonction de Baire d'une variable réelle en un ensemble jouissant de la propriété C 49
- C_3 . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toute image continue est de mesure nulle 49
- C_{3a} . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toutes les images homéomorphes sont de mesure nulle 49
- C_4 . La famille de tous les ensembles linéaires parfaitement mesurables est de la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ 50
- C_5 . Il existe un ensemble linéaire E de puissance du continu et tel que l'intervalle linéaire n'en est pas une image continue 51
- C_6 . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont aucun sous-ensemble indénombrable ne jouit de la propriété de Baire relativement à l'intervalle (donc, dont tout sous-ensemble indénombrable est de deuxième catégorie) 51
- C_7 . Il y a des ensembles de nombres réels sur lesquels il existe des fonctions de Baire des classes 0, 1 et 2, mais sur lequel il n'existe aucune fonction de Baire de classe 3 52
- C_8 . Il existe une fonction $f(x)$ continue sur un ensemble linéaire Q de puissance du continu, mais qui n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de Q 52
- C_9 . Il existe une suite infinie convergente de fonction d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ qui convergent non uniformément sur tout ensemble indénombrable 52

§ 6. Equivalences entre les conséquences C_9, C_{10}, C_{11} et C_{12} .

C_{10} . Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f^m(x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) et une suite double de fonctions d'une variable réelle $f_n^m(x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$), telles que

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^m(x) = f^m(x)$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$,
- (ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = 0$,

et que, quelles que soient la suite infinie croissante de nombres naturels $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ et la suite infinie d'indices n_1, n_2, n_3, \dots ,

(iii) l'égalité $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{m_k}(x) = 0$ ne se présente que tout au plus pour

une infinité dénombrable de valeurs de x 53

C_{11} . Il existe une double suite d'ensembles B_k^i telle que

- (I) $C = B_1^i + B_2^i + \dots + B_k^i + \dots$ pour $i = 1, 2, \dots$,
- (II) les ensembles d'une même (i -ème) ligne sont disjoints,
- (III) quelle que soit la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$, le produit $\prod_{i=1}^{\infty} (B_1^{k_i} + B_2^{k_i} + \dots + B_{k_i}^{k_i})$ est au plus dénombrable. 53

C_{12} . Etant données deux suites infinies différentes de nombres naturels $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, convenons d'écrire $T < S$, lorsque $n_i < k_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots$; ceci posé, il existe une famille F de la puissance 2^{\aleph_0} ayant pour éléments certaines suites infinies de nombres naturels et satisfaisant à la condition: pour chaque suite infinie S de nombres naturels (qu'elle appartienne à F ou non), l'ensemble de toutes les suites T de F différentes deux à deux et telles que $T < S$ est au plus dénombrable 53

§ 7. Origines et applications des propositions $C_9 - C_{12}$ 59

§ 8. Proposition C_1^* et son équivalence avec C_1 .

C_1^* Il existe une suite double d'ensembles B_k^i qui satisfait aux conditions (I) et (II) de la proposition C_{11} et à la condition suivante:

(III*) quelle que soit la famille complète de suites \mathfrak{E} , l'ensemble $\mathcal{E} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i} B_{n_1}^{i_1} \cdot B_{n_2}^{i_2} \cdot B_{n_i}^{i_i}$,

où la sommation s'étend à toutes les suites (n_1, n_2, \dots, n_i) de la famille \mathfrak{E} , est au plus dénombrable 61

§ 9. Conséquences C_{13} et C_{14} de C_1 .

C_{13} . Il existe une suite infinie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ de fonctions d'une variable réelle telles qu'étant donnée une suite infinie croissante quelconque d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels la limite (finie ou infinie) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}(x)$ existe est au plus dénombrable 62

C_{14} . Il existe un ensemble linéaire qui jouit de la propriété M et qui n'est pas un F_σ 63

§ 10. Ensembles toujours de 1-re catégorie 63

§ 11. Proposition C_{15} et ses conséquences $C_{16} - C_{19}$.

C_{15} . Il existe un ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui est une image continue et biunivoque d'un ensemble jouissant de la propriété L 68



C_{16} . Il existe une ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui jouit de la propriété C 68

C_{17} . La famille de tous les ensembles linéaires qui sont toujours de première catégorie est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ 69

C_{18} . La famille de tous les ensembles linéaires qui jouissent de la propriété de Baire est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ 69

C_{19} . La famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ 69

§ 12. Images géométriques de fonctions. Fonctions superposées.
Proposition C_{20} et ses conséquences $C_{21} - C_{24}$.

C_{20} . Il existe un ensemble linéaire K situé sur l'axe d'ordonnées et jouissant de la propriété de Baire (même un ensemble toujours de première catégorie) tel que l'ensemble plan S formé de toutes les parallèles à l'axe d'abscisses qui passent par les points de K ne jouit pas de la propriété de Baire. 71

C_{21} . Il existe une fonction (d'une variable réelle) qui satisfait à la condition de Baire, mais dont l'image géométrique ne jouit pas de la propriété de Baire. 72

C_{22} . Une fonction continue de deux fonctions (d'une variable réelle) satisfaisant à la condition de Baire peut (comme fonction de deux variables réelles) ne pas satisfaire à la condition de Baire 73

C_{23} . Il existe une fonction continue de variable réelle transformant d'une façon biunivoque un certain ensemble dépourvu de la propriété de Baire en un ensemble qui est toujours de première catégorie. 74

C_{24} . Il existe une fonction de variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et qui est une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue 75

CHAPITRE III. Applications aux relations entre catégorie et mesure.

§ 1. Proposition C_{25} (C_{25}^a) sur la dualité entre première catégorie et mesure nulle. Conséquence C_{26} (C_{26}^a).

C_{25} . Il existe une fonction biunivoque $f(x)$ définie dans l'ensemble \mathcal{C} de tous les nombres réels, telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et qui transforme chaque ensemble $E \subset \mathcal{C}$ de première catégorie en ensemble $f(E)$ de mesure nulle, tandis que sa fonction inverse $f^{-1}(x)$ transforme, réciproquement, tout ensemble $E \subset \mathcal{C}$ de mesure nulle en ensemble $f^{-1}(E)$ de première catégorie. 77

C_{25}^a . La famille de tous les ensembles linéaires de première catégorie et celle de tous les ensembles linéaires de mesure nulle sont semblables 80

C_{26} . Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle 80

C_{26}^a . Il existe un ensemble plan N de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable superficiellement (au sens de Lebesgue) 81

§ 2. Propriété S . Dualité entre L et S . Conséquences $C_{27} - C_{40}$.

C_{27} . Pour qu'un ensemble linéaire E contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété L , il faut et il suffit qu'il soit de deuxième catégorie de Baire. 81

C_{28} . Pour qu'un ensemble linéaire contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété S , il faut et il suffit qu'il soit de mesure extérieure positive 82

C_{29} . Si toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme un ensemble linéaire donné E en ensemble de première catégorie, l'ensemble E jouit de la propriété S 85

C_{30} . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu que toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme en ensemble toujours de première catégorie 86

C_{31} . Il existe un ensemble linéaire de puissance 2^{\aleph_0} dont toute image continue est un ensemble toujours de première catégorie 86

C_{32} . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable 87

C_{33} . Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles non mesurables. 88

C_{34} . Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles de deuxième catégorie 88

C_{35} . Il existe deux ensembles linéaires de puissance du continu dont aucun ne peut être transformé dans l'autre par une fonction de Baire d'une variable réelle 89

C_{36} . Il existe un ensemble qui est à la fois non mesurable et toujours de première catégorie 89

C_{37} . Il existe un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire. 89

C_{38} . Il y a des ensembles indénombrables (de nombres réels) sur lesquels il n'existe aucune fonction de classe 2 91

C_{39} . Il existe un ensemble plan de mesure linéaire infinie, dont chaque sous-ensemble est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans. 92

C_{40} . Il existe un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, dont toute image continue linéaire est un ensemble totalement imparfait 93

§ 3. Propriété λ . Conséquences $C_{41} - C_{46}$.

C_{41} . Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui jouit de la propriété λ 94

C_{42} . Il existe un ensemble linéaire qui contient une suite transfinie de puissance du continu de sous-ensembles croissants qui sont à la fois des F_γ et des G_δ relativement à lui 95

C_{43} . Il existe un ensemble linéaire toujours de première catégorie qui ne jouit pas de la propriété λ 96

C_{44} . Il existe une fonction d'une variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et dont l'image géométrique jouit de la propriété de Baire 97

C_{45} . Tout ensemble linéaire est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire qui jouit de la propriété λ 98



C_{16} . La propriété de Baire des ensembles linéaires n'est pas invariante relativement aux transformations continues et biunivoques . . . 98

§ 4. Conséquence C_{17} sur les types de dimensions de M. Fréchet.

C_{17} . Il existe deux ensembles indénombrables linéaires N_1 et N_2 tels qu'aucun ensemble linéaire non dénombrable E n'est d'un type de dimensions (au sens de M. Fréchet) qui soit à la fois plus petit que ceux de N_1 et de N_2 . . . 99

CHAPITRE IV. Autres conséquences de l'hypothèse du continu.

§ 1. Décompositions du plan. Conséquences C_{38} et C_{40} de P_1 .

C_{38} . Il existe une fonction de variable réelle $f(x)$ telle que le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble de tous les points de la courbe $y=f(x)$. . . 100

C_{40} . Il existe un ensemble plan E tel que toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre l'ensemble E dans un ensemble linéaire de points de mesure nulle et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre le complémentaire de E dans un ensemble linéaire de mesure nulle. 103

§ 2. Conséquences $C_{50} - C_{52}$ de P_1 ($P_1 a$).

C_{50} . Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ qui ne prennent que deux valeurs 0 et 1 et qui sont telles que, quelle que soit la suite infinie croissante d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, la suite infinie $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \dots$ n'est convergente que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x . . . 104

C_{51} . Il existe deux suites infinies d'ensembles $\{E_i\}$ et $\{H_i\}$ telles que

- 1) $C = E_i + H_i$ pour tout $i = 1, 2, 3, \dots$
- 2) $E_i H_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$,
- 3) N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que l'on a $NE_i \neq 0$ et $NH_i \neq 0$ pour tout $i \geq p$ 105

C_{52} . Etant donné un ensemble quelconque Q de nombres réels et une famille arbitraire Φ de sous-ensembles de Q assujétie à la condition: (A) toute famille de sous-ensembles disjoints (non vides) de Q qui appartiennent à Φ est au plus dénombrable, il existe toujours une suite infinie E_1, E_2, E_3, \dots de sous-ensembles de Q n'appartenant pas à Φ et tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable 106

§ 3. Mesure et catégorie. Conséquences $C_{63} - C_{67}$ de C_{52} .

C_{63} . Etant donné un ensemble Q quelconque de nombres réels, il n'existe aucune fonction $m(E)$ qui fasse correspondre à chaque sous-ensemble E de Q un nombre réel (fini) $m(E)$ conformément aux conditions suivantes:

- 1) $m(E)$ ne s'annule pas identiquement pour tous les sous-ensembles E de Q ,
- 2) $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, quelle que soit la suite infinie E_1, E_2, \dots de sous-ensembles disjoints de Q ,

3) $m(E) = 0$ pour tout sous-ensemble E de Q composé d'un seul élément. 107

C_{64} . Tout ensemble linéaire de mesure extérieure positive contient une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure positive 109

C_{65} . Tout ensemble linéaire de deuxième catégorie de Baire contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie de Baire 110

C_{66} . Tout ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive contient un sous-ensemble qui n'est pas mesurable relativement à Q . . . 110

C_{67} . Quel que soit l'ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe une fonction réelle définie sur lui et n'admettant aucun prolongement à une fonction mesurable de variable réelle 111

C_{68} . Tout ensemble linéaire Q de deuxième catégorie contient un sous-ensemble qui n'est pas un produit de Q et d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire (relativement à la droite) 112

C_{69} . Quel que soit l'ensemble linéaire de deuxième catégorie, il existe une fonction réelle définie sur lui et qui n'admet aucun prolongement à une fonction de variable réelle satisfaisant à la condition de Baire. 113

§ 4. Conséquences $C_{60} - C_{61}$ de l'hypothèse H . Ensembles croissants.

C_{60} . Tout ensemble linéaire qui est partout de deuxième catégorie est une somme d'infinité indénombrable d'ensembles disjoints qui sont aussi partout de deuxième catégorie 115

C_{61} . Etant donnée une famille F de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours une fonction d'une variable réelle $g(x)$ telle que pour toute fonction $f(x)$ de la famille F l'ensemble des x réels qui satisfont à l'équation $f(x) = g(x)$ est au plus dénombrable . . 117

C_{62} . Il existe une fonction de variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble non dénombrable 118

C_{63} . Il existe une suite transfinie décroissante de puissance du continu formée d'ensembles linéaires F_α distincts 120

C_{64} . Il existe une famille de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles croissants de nombres réels 120

§ 5. Ensembles presque disjoints. Conséquences $C_{65} - C_{70}$ ($C_{70} a$) de H .

C_{65} . Il existe une famille F de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles de nombres réels de puissance 2^{\aleph_0} , telle que deux ensembles (différents) de la famille F ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs 123

C_{66} . Il existe une famille Φ de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles linéaires non mesurables qui ont deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs 126

C_{67} . Il existe une décomposition de l'intervalle $\mathcal{I} = [0 \leq x \leq 1]$ en 2^{\aleph_0} ensembles qui sont de mesure extérieure 1, de deuxième catégorie dans tout intervalle et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs 127

C_{68} . Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble K de première catégorie que chaque translation le long de la

droite transforme en lui-même, abstraction faite tout au plus d'une infinité dénombrable de points 130

C_{70} . Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble M de mesure nulle que chaque translation transforme en lui-même, si l'on en néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points 132

C_{70} . Il existe un ensemble linéaire non mesurable que chaque translation transforme en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points 135

C_{70a} . Il existe parmi les fonctions d'une variable réelle une fonction non mesurable telle que chaque nombre réel est sa presque-période 135

§ 6. Images par fonctions de Baire. Conséquences C_{71} - C_{74} de l'hypothèse H .

C_{71} . F étant une famille de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles linéaires de puissance 2^{\aleph_0} et Φ une famille de puissance 2^{\aleph_0} de fonctions mesurables d'une variable réelle, il existe un ensemble linéaire E de puissance 2^{\aleph_0} tel que pour toute fonction $\varphi(x)$ de la famille Φ l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F 135

C_{72} . F étant une famille de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles linéaires de puissance 2^{\aleph_0} , il existe un ensemble linéaire E de puissance 2^{\aleph_0} tel que pour toute fonction de Baire $\varphi(x)$ d'une variable réelle l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F 138

C_{72a} . F étant une famille de puissance 2^{\aleph_0} d'ensembles linéaires de puissance 2^{\aleph_0} , il existe toujours un ensemble linéaire E de puissance 2^{\aleph_0} dont les images obtenues par des fonctions de Baire définies dans E ne contiennent aucun ensemble de la famille F 138

C_{73} . Il existe une famille F formée de \aleph_2 ensembles linéaires de puissance 2^{\aleph_0} et telle que de deux ensembles distincts quelconques de cette famille aucun ne s'obtient par une fonction de Baire comme une image de l'autre. 139

C_{74} . Il existe une classe de puissance 2^{\aleph_0} formée de familles différentes d'ensembles linéaires et dont chacune est invariante envers les transformations par fonctions de Baire. 140

§ 7. Ensemble ordonné universel. Conséquences C_{75} et C_{76} de H .

C_{75} . Il existe un ensemble ordonné U de puissance 2^{\aleph_0} tel que tout ensemble ordonné de puissance 2^{\aleph_0} est semblable à un sous-ensemble de U 144

C_{76} . En convenant pour deux suites infinies de nombres naturels $A = \{a_k\}$ et $B = \{b_k\}$ d'écrire $A < B$, lorsqu'il existe un i naturel tel que $a_k < b_k$ pour $k \geq i$, l'ensemble \mathcal{S} de toutes les suites infinies de nombres naturels contient un ensemble S de 2^{\aleph_0} suites, bien ordonné d'après la relation $<$ et ayant la propriété suivante: étant donnée une suite infinie quelconque A (appartenant ou non à S) de nombres naturels, il se trouve dans S une suite B telle que $A < B$ 145

§ 8. Complémentaires d'ensembles analytiques. Conséquences C_{77} et C_{78} de l'hypothèse H .

C_{77} . Φ étant une famille quelconque de puissance du continu d'ensembles indénombrables (formés d'éléments arbitraires), il existe

dans chaque ensemble indénombrable N un sous-ensemble indénombrable N_0 qui ne contient aucun ensemble de la famille Φ 146

C_{78} . Tout ensemble linéaire indénombrable admet un sous-ensemble indénombrable qui ne contient aucun complémentaire analytique indénombrable 148

§ 9. Propriétés J et J_c . Conséquence C_{79} de l'hypothèse H .

C_{79} . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire jouisse de la propriété J est qu'il soit un F_c 149

§ 10. Types de dimensions de M. Fréchet. Conséquence C_{80} de H .

C_{80} . Parmi les types de dimensions de M. Fréchet d'ensembles linéaires indénombrables il n'y a aucun qui soit le plus petit. 151

CHAPITRE V. Hypothèse des alephs inaccessibles.

C_{81} . Il n'existe aucun aleph inaccessible qui ne dépasse 2^{\aleph_0} 152

C_{82} . Tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle 159

CHAPITRE VI. Hypothèse du continu et les exemples effectifs.

CHAPITRE VII. Hypothèse du continu généralisée.

G . Etant donné un nombre cardinal quelconque $m \geq \aleph_0$, il n'existe aucun nombre cardinal n tel que $m < n < 2^m$ 166

G^* . Etant donné un nombre ordinal quelconque α , on a $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. 166

P^1 . Si \aleph_α n'est pas une somme de \aleph_β nombres cardinaux plus petits que \aleph_α , on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$ 167

P^2 . Si $\alpha \geq \beta$ et \aleph_α est une somme de \aleph_β nombres cardinaux inférieurs à \aleph_α , on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$ 167

P^3 . Si $\alpha < \beta$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ 167

C^1 . L'inégalité $m < n$ entraîne l'inégalité $2^m < 2^n$ 167

C^2 . Quels que soient les nombres cardinaux $m \geq \aleph_0$ et $n \geq \aleph_0$, aucun ensemble de puissance m ne se laisse décomposer en $> m$ ensembles de puissance $> n$ ayant deux à deux $< n$ éléments communs 168

G_m . Il n'existe aucun nombre cardinal n tel que $m < n < 2^m$ 168

$P_{\aleph_0}^1$. Il existe une famille F d'ensembles linéaires telle que

- (i) de deux ensembles de la famille F un au moins est toujours une image continue de l'autre,
- (ii) tout ensemble linéaire est une image continue d'un (au moins) des ensembles de la famille F 169

$P_{2^{\aleph_0}}^2$. Il existe une famille F formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires distincts et satisfaisant à la condition (i)	169
P_{III} . Tout ensemble de puissance 2^{\aleph_1} est une somme d'ensembles croissants de puissance \aleph_1	171
SUPPLÉMENT	172
TABLES DES RELATIONS	178
INDEX TERMINOLOGIQUE	179
AUTEURS CITÉS	181



Les „Monographies Mathématiques” sont publiées en volumes brochés de 150 à 300 pages environ, in 8°.

Parus: Tome I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, pages VIII+256, prix 3 dollars U. S. A.

Tome II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, pages VIII+292, prix 4 dollars U. S. A.

Tome III. C. Kuratowski, Topologie I, pages X+288, prix 4,50 dollars U. S. A.

Tome IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, pages VI+194, prix 3,50 dollars U. S. A.

Sous presse: Tome V. A. Zygmund, Trigonometric Series,

En préparation (parmi plusieurs autres):

S. Kaczmarz und H. Steinhaus,

Theorie der Orthogonalreihen.

Chaque volume est livré par la poste franco contre demande adressée directement à

„MONOGRAFJE MATEMATYCZNE”

SEMINAR. MATEM. UNIW. WARSZ.

OCZKI Nr. 3

WARSZAWA (Varsovie), Pologne

et accompagnée de l'envoi du montant par mandat poste international ou par chèque (ou bien du versement à P. K. O. Nr. 45.177 Prof. Dr. K. Kuratowski „Monografje Matematyczne”, Lwów).

Les volumes sont aussi en vente dans les librairies.

Le prix de ce volume est 3,50 dollars U. S. A.

Pour les Membres de la Société Polonaise de Mathématique tout Tome paru 15 zł. (par versements mensuels de 5 zł.).