MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:

TOM IV

HYPOTHÈSE DU CONTINU

PAR

WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA – LWÓW 1934

PRINTED IN POLAND
DRUK M. GARASIŃSKI, WARSZAWA, BRACKA 20.

PRÉFACE.

La question si l'ainsi dite *hypothèse du continu* est vraie ou non appartient aux problèmes les plus difficiles de la mathématique contemporaine. La présente monographie ne tend point à résoudre ce problème; elle a pour but de faire connaître au lecteur les conséquences que l'hypothèse du continu implique.

Il y a des personnes, même parmi les savants éminents, qui doutent de la possibilité de jamais résoudre le problème du continu. Dans ces conditions, les conséquences de l'hypothèse du continu peuvent être considérées pratiquement comme si elles étaient vraies. En tout cas, on peut affirmer avec certitude qu'une tentative d'ébranler une conséquence quelconque de l'hypothèse du continu serait non moins difficile que la tentative d'ébranler l'hypothèse même.

Ce fait justifie déjà l'intérêt qu'il y ait de prendre connaissance des conséquences qui résultent de l'hypothèse du continu. Chacune de ces conséquences donne naturellement lieu à la question si on peut la démontrer sans l'hypothèse du continu (ou, du moins, à l'aide des hypothèses plus faibles) ou bien si elle est, par contre, équivalente à cette hypothèse. Partout où c'était possible je tachais de tenir compte de ces questions, en indiquant au besoin le dégré des difficultés qu'elles comportent. Quant à la manière de déduire les conséquences de l'hypothèse du continu, je tachais autant que possible d'établir d'abord sans cette hypothèse les théorèmes généraux pour en tirer ensuite ces conséquences par l'application directe de l'hypothèse en question.

L'introduction de ce livre a pour but d'expliquer en quoi consiste l'hypothèse du continu et l'ainsi dit *problème du continu*. J'y donne deux énoncés de l'hypothèse du continu: l'un basé sur la notion de *quantité* (puissance d'un ensemble) et l'autre sur celle *d'ordre*. Plusieurs propositions équivalentes à cette hypothèse sont recueillies et envisagées dans le chapitre I.

Le chapitre II est consacré à une conséquence extrêmement importante de l'hypothèse du continu, tirée en 1914 par M. N. Lusin; j'en déduis une série d'autres conséquences, dont quelques unes sont très récentes ou même publiées ici pour la première fois. Le chapitre III contient l'étude des relations entre la catégorie de Baire et la mesure de Lebesgue autant qu'elles découlent de l'hypothèse du continu. Un grand nombre d'autres conséquences de cette hypothèse sont traitées dans le chapitre IV.

Les rapports entre l'hypothèse du continu, qui est en dernier lieu une proposition de pure *existence*[1]), et les ainsi dits *problèmes d'effectivité* occupent le chapitre VI. Les chapitres V et VII sont consacrés respectivement à deux hypothèses, l'une peut être plus faible (celle des *alephs inaccessibles*) et l'autre peut être plus forte *(l'hypothèse de Cantor sur les alephs)* que l'hypothèse du continu.

Enfin, le supplément à la fin du livre contient une méthode imaginée tout récemment par M. N. Lusin pour éliminer l'hypothèse du continu de quelques propositions déduites de cette hypothèse.

Sans prétendre d'epuiser *toutes* les conséquences ou applications de l'hypothèse du continu qui soient connues dans la littérature mathématique, je me suis proposé d'en exposer ici au moins celles qui me semblent importantes et d'en étudier les rapports mutuels (cf. la table des relations, p. 178). Bien entendu, j'ai taché avant tout de me tenir au côté mathématique et non philosophique de la question.

[1]) à savoir, de l'existence d'une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres réels et celui des nombres ordinaux transfinis de deuxième classe.

La lecture du livre n'exige de la part du lecteur qu'une connaissance élémentaire des notions fondamentales de la Théorie générale des ensembles et de leurs principales propriétés (cf. p. ex. le début des tomes I, II et surtout du tome III de cette collection). J'emploie les notations usuelles; les autres sont recueillies p. 8.

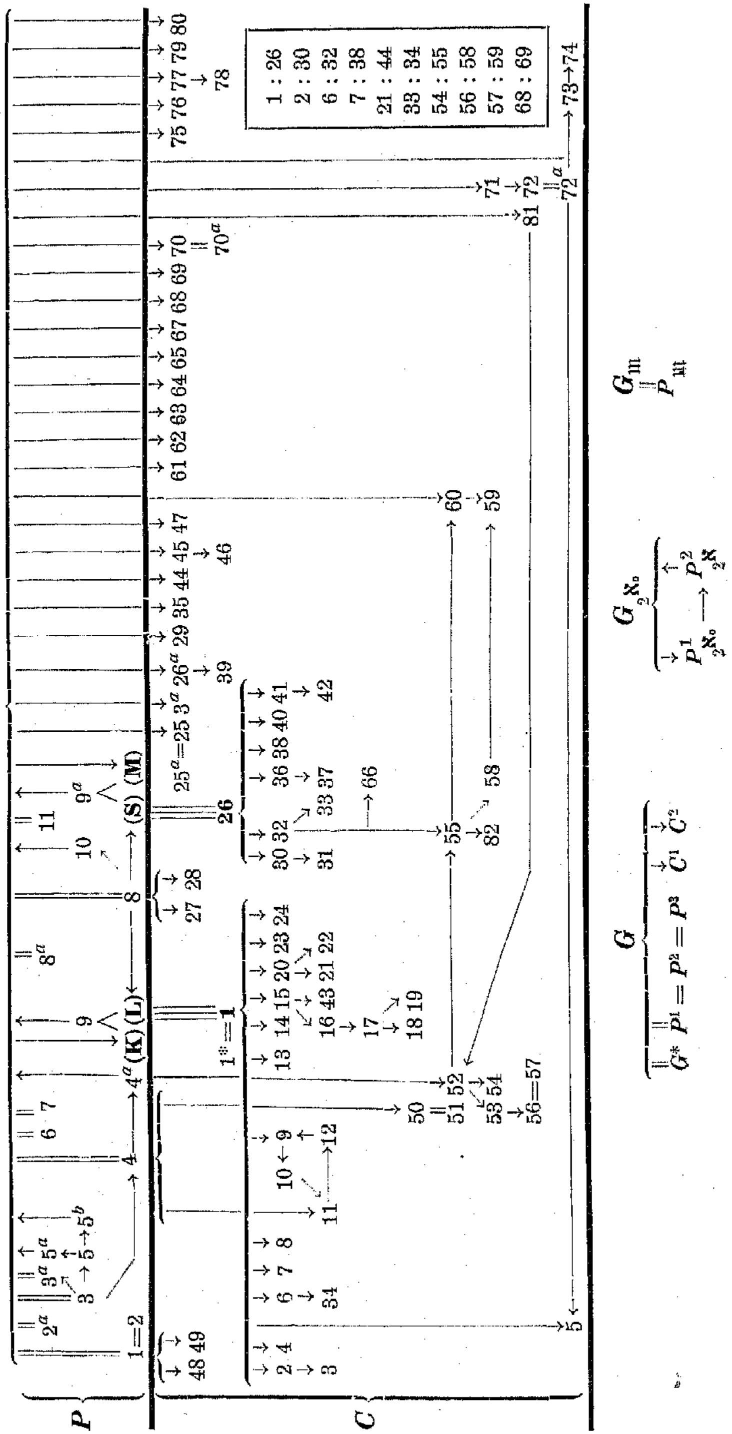
En terminant, je tiens à exprimer ici mes remerciements à M. Bronisław Knaster, qui n'a ménagé ni son temps ni son travail à relire le manuscrit et la plupart des épreuves de ce livre, et auquel je dois quelques précieux conseils concernant le groupement d'une partie des matériaux, de même que plusieurs remarques positives en matière du texte.

Wacław Sierpiński.

Varsovie, Avril 1934.

TABLE DES RELATIONS.

Signes: → implication, ≡ équivalence, : dualité.



INDEX TERMINOLOGIQUE.

AUTEURS CITÉS.

SOMMAIRE.

§ 12. Images géométriques de fonctions. Fonctions superposées. Proposition C_{20} et ses conséquences $C_{21}-C_{24}$.

CHAPITRE III. Applications aux relations entre catégorie et mesure.

§ 1. Proposition C_{25} ($C_{25}a$) sur la dualité entre première catégorie et mesure nulle. Conséquence C_{26} ($C_{26}a$).

§ 2. Propriété S. Dualité entre L et S. Conséquences $C_{27}-C_{40}$.

§ 3. Propriété λ. Conséquences $C_{41}-C_{46}$.