CHAPITRE VII.

Hypothèse du continu généralisée.

On entend par *hypothèse du continu généralisée* ou par „hypothèse de Cantor sur les alephs“ l'hypothèse G[1]) suivante:

G. *Etant donné un nombre cardinal quelconque* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, *il n'existe aucun nombre cardinal* $\mathfrak{n}$ *tel que* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

On ignore jusqu'à présent si l'hypothèse G est vraie ou fausse, ou indépendante des axiomes de la Théorie des ensembles[2]). Nous allons montrer (à l'aide de l'axiome du choix) que l'hypothèse G équivaut à la proposition G^* suivante:

G^*[3]). *Etant donné un nombre ordinal quelconque* α, *on a*

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

1⁰ $G \rightarrow G^*$. Soit α un nombre ordinal donné. On a $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$ et $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$. Or, il n'existe, comme on sait, aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que l'on ait $\aleph_\alpha < \mathfrak{n} < \aleph_{\alpha+1}$. L'inégalité $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\alpha+1}$ est donc impossible et l'axiome du choix impliquant, comme on sait, la trichotomie, on en conclut que l'on a $\aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$.

1) que M. F. Hausdorff (*Math. Ann.* 65, 1908, p. 494) énonce d'une façon différente, mais équivalente à G (cf. A. Tarski, *Fund. Math.* VII, p. 10, renvoi[1])).

2) A. Tarski, l. c., p. 10.

3) A. Lindenbaum et A. Tarski, *C. R. Soc. Sc. de Varsovie* XIX (1926), p. 313.

Si on avait $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$, on aurait $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$, contrairement à l'hypothèse G. On a donc bien $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, c. à d. l'hypothèse G^*.

2⁰ $G^* \rightarrow G$. Soit $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ un nombre cardinal arbitraire. Il résulte de l'axiome du choix que $\mathfrak{m}$ est un aleph. Soit $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$. En vertu de G^* on a donc $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\mathfrak{m}}$. Or, il n'existe, comme on sait, aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\aleph_\alpha < \mathfrak{n} < \aleph_{\alpha+1}$, c. à d. que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$. On obtient donc l'hypothèse G, c. q. f. d.

MM. Lindenbaum et Tarski ont démontré[1]) que l'hypothèse G équivaut à l'affirmation simultanée (produit logique) de la proposition G^* et de l'axiome du choix.

En outre, chacune des trois propositions suivantes équivaut à l'hypothèse G[2]):

Proposition P^1. *Si* $\aleph_\alpha$ *n'est pas une somme de* $\aleph_\beta$ *nombres cardinaux plus petits que* $\aleph_\alpha$, *donc* ($\alpha > \beta$), *on a* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Proposition P^2. *Si* $\alpha \geqslant \beta$ *et* $\aleph_\alpha$ *est une somme de* $\aleph_\beta$ *nombres cardinaux inférieurs à* $\aleph_\alpha$, *on a* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

Proposition P^3. *Si* $\alpha < \beta$, *on a* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.

Une des plus faciles conséquences de l'hypothèse G est la suivante:

Proposition C^1. *L'inégalité* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ *entraîne l'inégalité* $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$.

En effet, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux tels que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, on a $2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}$ (ce qu'on démontre sans l'hypothèse G). Si on avait $2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{n}}$, l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ et l'inégalité générale connue $\mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{n}}$ donneraient $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$, contrairement à l'hypothèse G. Par conséquent on a bien $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$.

Il est à remarquer que la proposition réciproque à C^1, c. à d. que *l'inégalité* $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$ *entraîne l'inégalité* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, se déduit sans

1) ibidem, p. 314.

2) A. Tarski, *Fund. Math.* VII, p. 7, 9 et 10.

intervention de l'hypothèse G, directement de la trichotomie (qui résulte, comme on sait, de l'axiome du choix).

En effet, soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux nombres cardinaux tels que $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$. Or, si l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ était en défaut, on aurait par trichotomie $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, d'où $2^{\mathfrak{m}} \geqslant 2^{\mathfrak{n}}$, contrairement à l'inégalité admise. On a donc $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

Plusieurs conséquences de l'hypothèse G ont été déduites par M. A. Tarski, avant tout les propositions concernant les puissances des nombres cardinaux quelconques [1]) et les propositions sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints [2]). Parmi ces dernières, notons la conséquence suivante de l'hypothèse G:

Proposition C^2. *Quels que soient les nombres cardinaux $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ et $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, aucun ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ ne se laisse décomposer en $> \mathfrak{m}$ ensembles de puissance $> \mathfrak{n}$ ayant deux à deux $< \mathfrak{n}$ éléments communs.*

Il est remarquable qu'on ne sache établir cette proposition sans l'hypothèse G, même dans le cas le plus simple et le plus intuitif, où $\mathfrak{n} = \aleph_0$ [3]).

Une application de l'hypothèse G à l'Algèbre a été donnée par M. Reinhold Baer [4]).

Etant donné un nombre ordinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, appelons d'une façon générale *hypothèse* $G_{\mathfrak{m}}$ l'hypothèse suivante:

$G_{\mathfrak{m}}$. *Il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.*

On démontre à l'aide de l'axiome du choix [5]) que $G_{\aleph_0} = H$. Nous allons montrer que l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$ est équivalente à chacune des deux propositions suivantes [6]):

1) Voir p. ex. propositions P^1, P^2 et P^3, p. 167.

2) *Fund. Math.* XII, p. 201 et suivantes; *Fund. Math.* XIV, p. 211 et suivantes.

3) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XIV, p. 213.

4) *Journ. für reine u. angew. Math.* 162 (1930), p. 132—133.

5) cf. plus haut p. 4 et 5.

6) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XV, p. 1.

Proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$. *Il existe une famille F d'ensembles linéaires telle que*

(i) *des deux ensembles de la famille F un au moins est toujours une image continue de l'autre,*

(ii) *tout ensemble linéaire est une image continue d'un (au moins) des ensembles de la famille F.*

Proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$. *Il existe une famille F formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires distincts et satisfaisant à la condition* (i).

Démonstration. 1° $G_{2^{\aleph_0}} \to P^1_{2^{\aleph_0}}$. Admettons l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$ et soit

$$(1) \qquad E_1, E_2, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal possible, formée de tous les ensembles linéaires. On voit sans peine que l'inégalité $\xi < \varphi$ entraîne (pour les nombres ordinaux ξ) l'inégalité $\overline{\xi} < 2^{2^{\aleph_0}}$ où $\overline{\xi}$ désigne la puissance correspondant au nombre ordinal ξ. En vertu de l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$, elle entraîne donc l'inégalité $\overline{\xi} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

J'ai démontré [1]) que pour toute famille Φ de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$, formée d'ensembles linéaires, il existe un ensemble linéaire $\lambda(\Phi)$ tel que tout ensemble appartenant à Φ est une image continue de l'ensemble $\lambda(\Phi)$. Soit

$$(2) \qquad H_1, H_2, \dots, H_\omega, H_{\omega+1}, \dots, H_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ d'ensembles, définie par l'induction transfinie comme il suit.

Posons $H_1 = E_1$. Etant donné un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, soit Φ_α la famille formée de tous les ensembles E_ξ et H_ξ où $\xi < \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, nous avons $\overline{\alpha} \leqslant 2^{\aleph_0}$, ce qui donne sans peine $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$, et nous pouvons poser $H_\alpha = \lambda(\Phi_\alpha)$.

La famille F de tous les ensembles (2) ainsi définis satisfait évidemment à la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$.

L'implication $G_{2^{\aleph_0}} \to P^1_{2^{\aleph_0}}$ est ainsi établie.

1) *Fund. Math.* XIV, p. 234.

2° $P^1_{2^{\aleph_0}} \to P^2_{2^{\aleph_0}}$. Soit maintenant F une famille d'ensembles linéaires satisfaisant à la condition (ii) de la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$. Il s'agit de montrer que $\overline{\overline{F}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

En effet, posons $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{m}$. On a évidemment $\mathfrak{m} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. Or, tout ensemble linéaire admet, comme on sait, $2^{\aleph_0}$ images continues: la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des images continues d'un au moins des ensembles de la famille F a donc une puissance $\leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{m}$ et la condition (ii) donne tout de suite $2^{2^{\aleph_0}} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{m}$, d'où $\mathfrak{m} \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. On a donc $\mathfrak{m} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Nous avons ainsi démontré que toute famille F d'ensembles vérifiant la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$ est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, c. à d. satisfait à la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$.

3° $P^2_{2^{\aleph_0}} \to G_{2^{\aleph_0}}$. Admettons qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que

$$(3) \qquad 2^{\aleph_0} < \mathfrak{n} < 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Soit F une famille vérifiant la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$ et désignons par F_1 une partie quelconque de F composée de $\mathfrak{n}$ ensembles. La famille Γ_1 de toutes les images continues des ensembles de la famille F_1 aura donc la puissance $\leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{n}$. D'après (3) on trouve sans peine $2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} < 2^{2^{\aleph_0}}$. Il existe par conséquent un ensemble E de la famille F qui n'appartient pas à Γ_1.

Or, soit H un ensemble quelconque de la famille F_1. L'ensemble E n'appartenant pas à Γ_1, il s'en suit selon la définition de la famille Γ_1 que E n'est pas une image continue de H. Les ensembles E et H appartenant à la famille F, qui verifie la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$, H est une image continue de E. Ainsi tout ensemble de la famille F_1 est une image continue de E. Cependant c'est impossible, la famille F_1 étant formée de $\mathfrak{n} > 2^{\aleph_0}$ ensembles distincts.

En conséquence, si la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$ est vraie, il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ satisfaisant aux inégalités (3), c. à d. que $P^2_{2^{\aleph_0}}$ entraîne l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$.

L'équivalence entre les propositions $G_{2^{\aleph_0}}$, $P^1_{2^{\aleph_0}}$ et $P^2_{2^{\aleph_0}}$ est ainsi établie.

Plusieurs conséquences ont été déduites de l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$ (sans faire usage de l'axiome du choix) par M. M. Lindenbaum et Tarski (l. c.). On leurs doit aussi le théorème suivant:

Les trois hypothèses $G_{\mathfrak{m}}$, $G_{2^{\mathfrak{m}}}$ et $G_{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ *impliquent que les nombres cardinaux* $\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$ *et* $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ *sont des alephs* [1]).

D'ailleurs, pour établir (sans l'aide de l'axiome du choix) que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, les deux hypothèses $G_{\aleph_0}$ et $G_{2^{\aleph_0}}$ sont suffisantes [2]).

Trois propositions, dont chacune est équivalente à l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$, ont été données par M-lle S. Braun et par moi [3]). Notons encore la suivante:

Proposition $P_{\mathfrak{m}}$. *Tout ensemble de puissance* $2^{\mathfrak{m}}$ *est une somme d'ensembles croissants de puissance* $\mathfrak{m}$.

La démonstration que cette proposition équivaut à l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$ est tout à fait analogue à celle de l'équivalence des propositions H et P_6 (voir plus haut p. 23 et 24).

---

1) A. Lindenbaum et A. Tarski, l. c., p. 314, proposition 89.

2) l. c., proposition 92. Signalons encore le théorème suivant de M. Tarski (l. c., p. 310, proposition 72):

S'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{m}$ *tel que* $\aleph_\Omega = 2^{\mathfrak{m}}$, *on a* $\mathfrak{m} = \aleph_0$ (donc $2^{\aleph_0} = \aleph_\Omega$).

Or, il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ tel que $\aleph_\omega = 2^{\mathfrak{m}}$.

3) *Fund. Math.* XIX, p. 6, théorème II.