CHAPITRE VI.

Hypothèse du continu et les exemples effectifs.

Les exemples d'ensembles dont nous ne savons pas démontrer l'existence qu'en admettant l'hypothèse ***H*** sont, *en général*, non effectifs [1]). Or, il y a des cas où nous savons définir *effectivement* des ensembles jouissant de certaines propriétés, mais seulement en admettant l'hypothèse ***H***. Tel est p. ex. l'exemple effectif d'un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$, formé de fonctions d'une variable réelle. Voici comment on peut définir d'une manière effective un tel ensemble, en admettant l'hypothèse ***H***.

Selon une idée de M. Lebesgue, on sait décomposer effectivement l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides

(1) $$E = \sum_{\xi<\Omega} E_\xi \text{ }^{2)}.$$

[1]) La notion d'*effectivité* — écrit M. C. Kuratowski (*Topologie I*, p. 109) — est de nature *méta-mathématique*: elle concerne le mode de démonstration des théorèmes d'existence. On dit notamment qu'un théorème d'existence est démontré d'une façon *effective*, lorsqu'on a *défini* un individu a et on a démontré que a satisfait au théorème considéré. Cf. aussi à ce sujet: F. Bernstein, Leipz. Ber. 60 (1908) et *Götting. Nachr.* 1904, p. 558; W. Sierpiński, *Fund. Math.* II, p. 112; B. Knaster et C. Kuratowski, *Fund. Math.* II, p. 251 et A. Lindenbaum, *Ann. Soc. Pol. Math.* 10 (1931), p. 118.

[2]) H. Lebesgue, *Journ. de Math.* I, 1905, p. 213; voir aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 209.

Soit S l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

formées de nombres 0 et 1. L'ensemble S est évidemment de la puissance $2^{\aleph_1}$. Ordonnons le d'après le principe de premières différences et, étant donnée une suite transfinie $\sigma = \{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ appartenant à l'ensemble S, posons

$$X_\sigma = \sum_{\xi<\Omega} a_\xi E_\xi$$

où $a_\xi E_\xi$ désigne l'ensemble vide, si $a_\xi = 0$, et l'ensemble E_ξ, si $a_\xi = 1$. Les ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$ étant non vides et disjoints, on voit sans peine que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entraîne $X_{\sigma_1} \neq X_{\sigma_2}$.

Désignons maintenant par $f_\sigma(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble X_σ. L'ensemble U de toutes les fonctions distinctes $f_\sigma(x)$ correspondant aux suites transfinies distinctes σ de S est donc de puissance $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_1}$ et il devient ordonné, si l'on convient de poser $f_{\sigma_1} \prec f_{\sigma_2}$, lorsqu'on a $\sigma_1 \prec \sigma_2$ dans S. Nous avons ainsi défini effectivement un ensemble ordonné U formé de $2^{\aleph_1}$ fonctions (distinctes) d'une variable réelle.

Or, si l'on admet l'hypothèse ***H***, on a $2^{\aleph_1} > \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Dans ce cas U est donc un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$, formé de fonctions d'une variable réelle. Ainsi, *en admettant l'hypothèse **H** on peut définir effectivement un ensemble ordonné de puissance* $> 2^{\aleph_0}$, *formé de fonctions d'une variable réelle.*

Notons que l'ensemble U est effectivement défini (et ordonné) sans faire usage de l'hypothèse ***H***, mais la démonstration que l'ensemble U est de puissance $> 2^{\aleph_0}$ exige cette hypothèse.

Il est à remarquer que s'il s'agissait seulement de démontrer l'*existence* (sans en donner un exemple effectif) d'un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$ qui soit formé de fonctions d'une variable réelle, on pourrait le faire sans l'hypothèse ***H***, notamment en ne s'appuyant que sur le théorème de bon ordre de M. Zermelo.

En effet, d'après le théorème de M. Zermelo, il existe un ensemble même bien ordonné, formé de toutes les fonctions d'une variable réelle, et un tel ensemble est, comme on sait, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, donc de puissance $> 2^{\aleph_0}$.

L'existence effective de la décomposition (1) implique aussitôt qu'*en admettant l'hypothèse **H** on peut définir effectivement un ensemble bien ordonné de puissance du continu, formé de fonctions d'une variable réelle.*

Dans la théorie des ensembles analytiques on montre en outre qu'en admettant l'hypothèse ***H***, on peut définir effectivement un ensemble bien ordonné de puissance $2^{\aleph_0}$, formé de fonctions de Baire (d'une variable réelle) et dont les classes croissent d'une manière monotone [1]). Or, même en admettant l'hypothèse ***H***, nous ne savons pas définir effectivement aucun ensemble bien ordonné indénombrable, formé de fonctions de Baire de classes finies (ou, plus généralement, de classes bornées par un nombre $\alpha < \Omega$).

Il est à remarquer que sans l'hypothèse ***H*** on sait parfois définir effectivement un ensemble de nombres réels E et démontrer qu'il n'est pas vide, sans qu'on sache toutefois définir effectivement aucun élément de E, sinon qu'en admettant l'hypothèse ***H*** [2]).

En effet, soit U un ensemble analytique universel, donné sur le plan, p. ex. l'ensemble construit par M. Lusin [3]). On obtient chaque complémentaire analytique linéaire, en coupant le complémentaire de U (par rapport au plan) avec une parallèle à l'axe OY.

Désignons par M l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x = a$ coupe le complémentaire U en un ensemble indénombrable de puissance $< 2^{\aleph_0}$ et par E l'ensemble égal à M, si l'ensemble M n'est pas vide, et égal à l'ensemble formé de nombre 0 seul, si l'ensemble M est vide.

1) Voir N. Lusin, *Annali Scuola Norm. Pisa,* Ser. II, Vol. II, p. 271.

2) Cf. W. Sierpiński, *Sur les ensembles de points qu'on sait définir effectivement,* Verh. des Intern. Math. Kongr. Zürich 1932, Bd. I, p. 281.

3) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications,* Paris 1930, p. 146.

L'ensemble E est ainsi défini d'une manière effective et il est non vide (ce qui est évident sans avoir recours ni à l'hypothèse ***H***, ni à l'axiome du choix).

Cependant, nous ne savons nommer effectivement aucun élément de E, sinon en admettant l'hypothèse ***H***. Si l'hypothèse ***H*** est vraie, l'ensemble M est évidemment vide et le nombre 0 est un élément de l'ensemble E.