CHAPITRE V.

Hypothèse des alephs inaccessibles.

Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible*, s'il est régulier, c. à d. qu'il n'est pas une somme de moins que $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux dont chacun est $< \aleph_\alpha$, et si, en même temps, son indice α est un nombre ordinal de deuxième espèce (nombre-limite). On ignore s'il existe des alephs inaccessibles [1]; en tout cas il résulte de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ que l'on a la proposition suivante:

Proposition C_{81}. *Il n'existe aucun aleph inaccessible qui ne dépasse* $2^{\aleph_0}$.

La proposition C_{81} est d'ailleurs une conséquence des hypothèses moins restrictives que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$: elle résulte p. ex. de l'hypothèse $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\Omega$.

En effet, distinguons deux cas:

1⁰ $2^{\aleph_0} < \aleph_\Omega$. Dans ce cas $\aleph_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$ entraîne $\aleph_\alpha < \aleph_\Omega$, donc $\alpha < \Omega$. Comme un nombre de seconde espèce, α est par conséquent confinal avec ω, de sorte que $\aleph_\alpha$ est une somme de $\aleph_0$ nombres cardinaux dont chacun est inférieur à $\aleph_\alpha$ et par suite $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inaccessible.

2⁰ $2^{\aleph_0} = \aleph_\Omega$. Dans ce cas $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_0}$ entraîne $\aleph_\alpha < \aleph_\Omega$ et on en conclut, comme dans le cas 1⁰, que $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inaccessible. Or, si $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, on a $\aleph_\alpha = \aleph_\Omega = \sum_{\xi<\Omega} \aleph_\xi$ et $\aleph_\alpha$ est une somme de $\aleph_1$, donc de moins que $\aleph_\alpha$, nombres cardinaux inférieurs à $\aleph_\alpha$, ce qui prouve que $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inaccessible.

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 131, W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 226; cf. aussi W. Sierpiński et A. Tarski, *Fund. Math.* XV, p. 292.

On démontre que la condition nécessaire (mais non suffisante) pour que $\aleph_\alpha$ soit un aleph inaccessible est qu'on ait $\alpha = \omega_\alpha$ où ω_α désigne le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\alpha$ [1]).

On en conclut sans peine que la proposition C_{81} résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_\omega}$ et aussi de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\omega_\zeta}$ où $\zeta = \omega + \omega_\omega + \omega_{\omega_\omega} + \ldots$ (ζ étant le plus petit nombre ordinal satisfaisant à l'équation $\zeta = \omega_\zeta$). Si la proposition C_{81} était fausse, la puissance du continu occuperait donc dans l'échelle des alephs un rang si élevé qu'il est difficile de s'en faire une idée.

Or, l'hypothèse C_{81} permet de déduire plusieurs propositions importantes qu'on ne savait démontrer auparavant qu'à l'aide de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Nous en donnerons ici quelques exemples.

Lemme 1 (de M. S. Ulam [2])). *T étant un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$* (où α est un nombre ordinal donné $\geqslant 0$), *il existe un système d'ensembles $A_\eta^\xi \subset T$, où $\xi < \omega_\alpha$ et $\eta < \omega_{\alpha+1}$, tel que:*

1⁰ $A_\eta^\xi A_\zeta^\xi = 0$ *pour* $\xi < \omega_\alpha$ *et* $\eta < \zeta < \omega_{\alpha+1}$,

2⁰ $A_\eta^\xi A_\eta^\zeta = 0$ *pour* $\xi < \zeta < \omega_\alpha$ *et* $\eta < \omega_{\alpha+1}$,

3⁰ *l'ensemble* $T - \sum_{\xi<\omega_\alpha} A_\eta^\xi$ *est de puissance* $\leqslant \aleph_\alpha$ *pour* $\eta < \omega_{\alpha+1}$.

Démonstration. L'ensemble T étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, nous pouvons regarder ses éléments comme termes d'une suite transfinie p_λ où $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$.

Soit λ un nombre ordinal tel que $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \lambda$ est de puissance $\aleph_\alpha$ et nous pouvons les supposer rangés en une suite transfinie du type ω_α, soit $\{\varphi_\xi^\lambda\}$ où $\xi < \omega_\alpha$.

[1]) Voir p. ex. mon livre précité, p. 226.

[2]) *Fund. Math.* XVI, p. 142—143.

Désignons pour $\xi<\omega_\alpha$ et $\eta<\omega_{\alpha+1}$ par A^ξ_η l'ensemble de tous les éléments p_λ où $\varphi^\lambda_\xi=\eta$. Si $p_\lambda \in A^\xi_\eta A^\xi_\zeta$, on a donc $\varphi^\lambda_\xi=\eta$ et $\varphi^\lambda_\xi=\zeta$, d'où $\eta=\zeta$. Or, si $p_\lambda \in A^\xi_\eta A^\zeta_\eta$, on a $\varphi^\lambda_\xi=\eta$ et $\varphi^\lambda_\zeta=\eta$, donc $\varphi^\lambda_\xi=\varphi^\lambda_\zeta$, ce qui donne $\xi=\zeta$, en vertu de la définition de la suite φ^λ_ξ. Le système d'ensembles $\{A^\xi_\eta\}$ jouit donc des propriétés 1° et 2°.

Etant donné maintenant un nombre ordinal $\eta<\omega_{\alpha+1}$, considérons un nombre ordinal λ tel que $\omega_\alpha<\lambda<\omega_{\omega+1}$ et $\lambda>\eta$. D'après la définition de la suite $\{\varphi^\lambda_\xi\}$ où $\xi<\omega_\alpha$ il existe un nombre ordinal $\xi<\omega_\alpha$ tel que $\varphi^\lambda_\xi=\eta$. D'après la définition de l'ensemble A^ξ_η on a par conséquent $p_\lambda \in A^\xi_\eta$, d'où $p_\lambda \in \sum\limits_{\xi<\omega_\alpha} A^\xi_\eta$ pour les indices λ qui satisfont aux inégalités $\omega_\alpha<\lambda<\omega_{\alpha+1}$ et $\lambda<\eta$. Il en résulte que la puissance de l'ensemble $T-\sum\limits_{\xi<\omega_\alpha} A^\xi_\eta$ est $\leqslant \overline{\overline{\eta}} \leqslant \aleph_\alpha$ (puisque $\eta<\omega_{\alpha+1}$). La propriété 3° du système d'ensembles $\{A^\xi_\eta\}$ est donc aussi réalisée, c. q. f. d.

Ceci établi, envisageons la propriété suivante d'un ensemble infini Q formé d'éléments quelconques:

Propriété U. *Etant donnée une famille arbitraire Φ de sous-ensembles de Q, assujettie à la condition:*

(Δ) *toute famille de sous-ensembles disjoints (non vides) de Q qui appartiennent à Φ est au plus dénombrable,*

il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles de Q n'appartenant pas à la famille Φ et tels que l'ensemble $Q-\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable [1]).

Lemme 2. *Si tout ensemble Q de puissance $\aleph_\alpha$ où $\alpha \geqslant 0$ jouit de la propriété* **U**, *il en est autant de tout ensemble Q de puissance $\aleph_{\alpha+1}$.*

[1]) En admettant l'hypothèse ***H*** nous avons démontré la propriété **U** pour tout ensemble Q de nombres réels (voir Chap. IV, § 2, p. 106, proposition C_{52}).

D é m o n s t r a t i o n. Admettons que la propriété **U** se présente pour tout ensemble de puissance $\aleph_\alpha$ et considérons un ensemble Q de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Soit Φ une famille de sous-ensembles de Q assujettie à la condition (Δ). Soit $\{A^\xi_\eta\}$ le système d'ensembles satisfaisant aux conditions 1°—3° du lemme 1.

Nous allons établir d'abord l'existence d'un indice $\zeta<\omega_{\alpha+1}$ tel qu'aucun ensemble A^ξ_ζ, où $\xi<\omega_\alpha$, n'appartient à Φ. En effet, supposons qu'il n'en est pas ainsi: il existe alors pour tout indice $\eta<\omega_{\alpha+1}$ un indice $\xi_\eta<\omega_\alpha$ tel que l'ensemble $A^{\xi_\eta}_\eta$ appartient à Φ. Or, l'ensemble de tous les indices $\eta<\omega_{\alpha+1}$ étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ et celui de tous les indices $\xi_\eta<\omega_\alpha$ étant de puissance $\leqslant\aleph_\alpha$, on voit sans peine qu'il existe un indice $\xi<\omega_\alpha$ tel que $\xi_\eta=\xi$ pour une infinité non dénombrable d'indices différents $\eta<\omega_{\alpha+1}$ (puisque $\aleph_0\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$). Or, c'est impossible, les ensembles $A^\xi_\eta=A^{\xi_\eta}_\eta$ étant disjoints (pour des valeurs distinctes de η) et appartenant à Φ.

Posons

$$R=Q-\sum_{\xi<\omega_\alpha} A^\xi_\zeta. \tag{1}$$

En vertu de la condition 3° du lemme 1, c'est un ensemble de puissance $\leqslant\aleph_\alpha$. Soit Q_1 l'ensemble dont les éléments sont les ensembles A^ξ_η où $\xi<\omega_\alpha$ et les ensembles formés d'un seul élément (quelconque) de R. L'ensemble Q_1 est évidemment de puissance $\aleph_\alpha$ (comme somme d'un ensemble de puissance $\leqslant\aleph_\alpha$ et d'un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$) et ses éléments sont des sous-ensembles d i s j o i n t s de Q.

Etant donné un sous-ensemble quelconque E de Q_1, désignons d'une façon générale par S_E la somme de tous les sous-ensembles de Q qui sont des éléments de E; d'après (1) et selon la définition de l'ensemble Q_1 il vient alors:

$$Q=S_{Q_1}. \tag{2}$$

Convenons de ranger un sous-ensemble E de Q_1 dans la famille Φ_1, lorsque l'ensemble $S_E\,(\subset Q)$ appartient à la famille Φ et seulement dans ce cas. On voit sans peine que toute famille d'ensembles disjoints et appartenant à Φ_1 est au plus dénombrable, puisque si E' et E'' sont deux ensembles disjoints appartenant à Φ_1, les ensembles $S_{E'}$ et $S_{E''}$ sont des sous-ensembles disjoints de Q appartenant à Φ et toute famille d'ensembles disjoints de la famille Φ est au plus dénombrable par hypothèse.

Or, la propriété **U** étant admise pour tous les ensembles de la puissance $\aleph_\alpha$ et Q_1 étant de puissance $\aleph_\alpha$, on en conclut qu'il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles n'appartenant pas à Φ_1 et tels que l'ensemble

$$(3) \qquad R_1 = Q_1 - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite que l'on a

$$S_{Q_1} = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n},$$

d'où selon (2):

$$(4) \qquad Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n}.$$

Or, l'ensemble (3) est au plus dénombrable et les éléments du sous-ensemble R_1 de Q_1 sont soit des ensembles A_ζ^ξ qui n'appartiennent pas à la famille Φ, soit des ensembles formés d'un seul élément de Q. Donc

$$(5) \qquad S_{R_1} = D + H_1 + H_2 + H_3 \ldots,$$

où D est un ensemble au plus dénombrable d'éléments de Q et $H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ est une série finie ou dénombrable d'ensembles n'appartenant pas à Φ. On tire de (4) et (5):

$$(6) \qquad Q = D + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$$

Les ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ n'appartenant pas à Φ_1, les ensembles S_{E_n} n'appartiennent pas à Φ. La formule (6) prouve donc que Q est une somme d'un ensemble au plus dénombrable et d'une infinité dénombrable d'ensembles n'appartenant pas à Φ. Ainsi l'ensemble Q jouit de la propriété **U**, c. q. f. d.

Lemme 3. *Si $\aleph_\alpha$ est un aleph accessible et si tous les ensembles Q de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent de la propriété* **U**, *il en est encore de même pour les ensembles de puissance $\aleph_\alpha$.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du lemme 2, nous pouvons supposer que l'indice α est un nombre ordinal de seconde espèce. L'aleph $\aleph_\alpha$ n'étant pas inaccessible, on a

$$\aleph_\alpha = \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} \quad \textit{où} \quad \aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha \qquad \textit{pour} \quad \xi < \beta \quad \textit{et} \quad \overline{\beta} < \aleph_\alpha.$$

Admettons que la propriété **U** se présente pour tout ensemble de puissance $< \aleph_\alpha$ et considérons un ensemble Q de puissance $\aleph_\alpha$. Nous pouvons poser, comme on voit sans peine:

$$(7) \qquad Q = \sum_{\xi<\beta} T_\xi,$$

où $\overline{T}_\xi < \aleph_{\alpha_\xi}$ et $T_\xi T_\zeta = 0$ pour $\xi < \zeta < \beta$.

Soit Φ_1 une famille des sous-ensembles de Q assujettie à la propriété (Δ). Les ensembles T_ξ (où $\xi < \beta$) qui appartiennent à la famille Φ_1 sont donc en nombre fini ou en infinité dénombrable. Soit $T_{\xi_1}, T_{\xi_2}, T_{\xi_3}, \ldots$ la suite de ces derniers. Les ensembles T_ξ où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) n'appartiennent donc pas à la famille Φ_1; en conséquence leur ensemble est évidemment de puissance $\overline{\beta} - \aleph_0 = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$.

Soit Q_1 l'ensemble (de puissance $\overline{\beta}$) dont les éléments sont des ensembles T_ξ où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Convenons de ranger un sous-ensemble E de Q_1 dans la famille Φ, si la somme S_E de tous les sous-ensembles de Q qui sont des éléments de E appartient à Φ_1. Les éléments de Q_1 étant des sous-ensembles disjoints de Q, on voit sans peine (d'après l'hypothèse sur la famille Φ) que toute famille de sous-ensembles disjoints de Q_1 qui appartiennent à la famille Φ est au plus dénombrable. Comme $\overline{Q}_1 = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$ et comme tous les ensembles de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent par hypothèse de la propriété **U**, il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles de Q_1 n'appartenant pas à la famille Φ et tels que l'ensemble (3) est au plus dénombrable. Comme plus haut, on trouve la formule $S_{Q_1} = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n}$.

Or, la définition de l'ensemble Q_1 entraîne selon (7) que

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n} + S_{Q_1},$$

d'où par substitution

$$Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n}, \tag{8}$$

Soit maintenant n un indice naturel quelconque. Comme $T_{\xi_n} \subset Q$, toute famille de sous-ensembles disjoints de T_{ξ_n} qui appartiennent à la famille Φ_1 est au plus dénombrable. Comme $\overline{\overline{T}}_{\xi_n} = \aleph_{\xi_n} < \aleph_\alpha$ et comme les ensembles de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent par hypothèse de la propriété **U**, il existe une suite infinie $E_1^n, E_2^n, E_3^n, \ldots$ de sous-ensembles T_{ξ_n} (donc de sous-ensembles de Q) tels que l'ensemble

$$H_n = T_{\xi_n} - \sum_{n=1}^{\infty} E_k^n \tag{9}$$

est au plus dénombrable.

Comme $E_k^n \subset T_{\xi_n}$, on tire de (9)

$$T_{\xi_n} = H_n + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n \qquad \textit{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et la formule (8) donne

$$Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n.$$

L'ensemble $S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ étant au plus dénombrable et les ensembles E_k^n et S_{E_n} (n et k naturels) n'appartenant pas à la famille Φ, on en conclut que l'ensemble Q jouit de la propriété **U**, c. q. f. d.

La propriété **U** appartenant évidemment à tous les ensembles dénombrables, les lemmes 2 et 3 impliquent par l'induction transfinie ce

Théorème [1]). *S'il n'existe aucun aleph inaccessible* $\leqslant \mathfrak{m}$ *où* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, *tous les ensembles de puissance* $\mathfrak{m}$ *jouissent de la propriété* **U**.

Ainsi, pour le cas particulier où $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$, la proposition C_{81} entraîne aussitôt en vertu du théorème qui précède (et sans d'autres hypothèses) la proposition C_{52}, p. 106, donc aussi les propositions $C_{53} - C_{57}$, qui sont des conséquences de C_{52} (voir Chap. IV, § 3). La proposition C_{53} constitue, comme il a été déjà observé p. 107, la solution négative de l'ainsi dit *problème généralisé de la mesure*. Or, l'implication $C_{81} \to C_{52} \to C_{55}$ nous permet, en outre, de déduire de l'hypothèse C_{81} (sans aucune autre hypothèse) la proposition qui suit:

Proposition C_{82} [2]). *Tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints dont chaucun est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle.*

D é m o n s t r a t i o n. En admettant la proposition C_{55}, nous allons démontrer d'abord que, étant donné un ensemble linéaire M qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle, il existe dans tout intervalle I un ensemble Q de deuxième catégorie contenu dans MI et tel que $M - Q$ est encore un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.

En effet, l'ensemble MI (en tant qu'un ensemble de deuxième catégorie) contient en vertu de la proposition C_{55} une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de deuxième catégorie: soit Φ leurs famille.

Considérons un ensemble $E \in \Phi$. En tant qu'un ensemble de deuxième catégorie, l'ensemble E est, comme on sait, de deuxième catégorie en tout point d'un certain intervalle J aux extrémités rationnelles (et qui dépend de E). La famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles étant dénombrable et la famille Φ

[1]) W. S i e r p i ń s k i, *Fund. Math.* XX, p. 214.

[2]) W. S i e r p i ń s k i, *Fund. Math.* XXII, p. 1. Cf. le problème de M. C. K u r a t o w s k i, *Fund. Math.* IV, p. 368, problème 21.

étant non dénombrable, il existe un intervalle J_0 aux extrémités rationnelles tel qu'une infinité non dénombrable d'ensembles de la famille Φ sont de deuxième catégorie en tout point de J_0. Soient E_0 et E_1 deux ensembles de ce genre.

Posons $Q = J_0 E_0$: nous aurons évidemment $Q \subset I$, puisque $E_0 \subset IM \subset I$. L'ensemble Q est donc de deuxième catégorie et on a $M - Q = (M - J_0) + (M J_0 - Q) = (M - J_0) + J_0 (M - E_0) \supset (M - J_0) + J_0 E_1$, puisque $M - E_0 \supset E_1$, car E_0 et E_1 sont disjoints. Vu la propriété de l'ensemble M (et E_1 étant de deuxième catégorie en tout point de l'intervalle J_0), l'ensemble $M - Q$ est donc de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Ceci établi, considérons un ensemble linéaire E qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle. Soit

$$(10) \qquad I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

Nous définirons par induction une suite infinie de sous-ensembles disjoints de l'ensemble E comme il suit.

En posant $M = E$, il existe, d'après ce qui vient d'être démontré pour M, un ensemble Q_1 de deuxième catégorie contenu dans EI_1 et tel que $E - Q_1$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle. De même, étant donné un nombre naturel $n > 1$, admettons que $E - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle. D'après ce qui a été établi pour M, il existe (en posant $M = E - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i$) un ensemble Q_n de deuxième catégorie contenu dans $[E - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})] I_n$ et tel que l'ensemble

$$[E - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})] - Q_n = E - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)$$

est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

La suite infinie d'ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ est ainsi définie par l'induction et ce sont évidemment des ensembles disjoints de deuxième catégorie. De plus, on a $Q_n \subset I_n E$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

Or, en vertu de la proposition C_{55}, l'ensemble Q_n contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints de deuxième catégorie. Désignons en $\aleph_1$ ensembles par Q_n^ξ où ξ parcourt tous les nombres ordinaux $< \Omega$. On a donc

$$(11) \qquad Q_n^\xi \subset Q_n \subset I_n E \qquad \textit{pour} \quad \xi < \Omega \quad \textit{et} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$(12) \qquad Q_n^\xi Q_n^\eta = 0 \qquad \textit{pour} \quad \xi < \eta < \Omega \quad \textit{et} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posons pour tout nombre ordinal $\xi < \Omega$

$$(13) \qquad E^\xi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\xi.$$

L'ensemble Q_n^ξ étant de deuxième catégorie et, d'après (11), contenu dans I_n, et la suite (10) étant formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles, on conclut de (13) que l'ensemble E^ξ est de deuxième catégorie dans tout intervalle, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$. D'autre part, on a selon (11) et (13) $E^\xi \subset E$ pour $\xi < \Omega$. Or, les ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ étant disjoints, il résulte de (11) que $Q_m^\xi Q_n^\eta = 0$ pour $m \neq n$, $\xi < \Omega$ et $\eta < \Omega$. Moyennant (12) la formule (13) donne donc

$$E^\xi E^\eta = 0 \qquad \textit{pour} \quad \xi < \eta < \Omega.$$

Ainsi, les ensembles E^ξ ($\xi < \Omega$) sont disjoints, contenus dans E et chacun d'eux est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

L'implication $C_{55} \rightarrow C_{82}$ et par conséquent l'implication $C_{81} \rightarrow C_{82}$ est donc démontrée, sans avoir recours à aucune autre hypothèse.
