

CHAPITRE IV.

Autres conséquences de l'hypothèse du continu.

§ 1. Décompositions du plan. Conséquences C_{48} et C_{49} de P_1 .

Proposition C_{48} . *Il existe une fonction de variable réelle $f(x)$ telle que le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble de tous les points de la courbe $y = f(x)$ ¹⁾.*

Démonstration. La proposition P_1 implique immédiatement que l'ensemble Q de tous les points du carré ouvert ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$) admet une décomposition $Q = A + B$ où A est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses.

Soient A_1 l'ensemble obtenu de A par rotation de -90° autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et B_1 l'ensemble obtenu de B par rotation de $+90^\circ$ autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Soient H_1 l'ensemble de tous les points du plan $(x, 0)$ où $0 \leq x < 1$ et H_2 l'ensemble des points $(0, y)$ où $0 < y \leq 1$.

Posons:

$$M = A + B_1 + H_1 \quad \text{et} \quad N = B + A_1 + H_2.$$

¹⁾ Le problème d'existence d'une telle fonction a été posé par M. N. Lusin; voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXI, p. 39. Le terme *courbe* est entendu ici dans le sens défini au Chap. I, p. 11.

Les ensembles M et N sont, comme on voit sans peine, superposables: notamment N s'obtient de M par une rotation de -90° autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

On voit aussi sans peine que la somme $M + N$ contient tous les points du carré Q

$$0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1.$$

Or, il résulte aussitôt des propriétés des ensembles A et B (et des définitions des ensembles B_1 et H_1) que l'ensemble M est non vide et au plus dénombrable sur chaque droite $x = a$ où $0 \leq a < 1$. Il en résulte de suite que l'ensemble M est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $M_1 + M_2 + M_3 + \dots$ dont chacun a un et un seul point sur chaque droite $x = a$ où $0 \leq a < 1$.

Ceci établi, définissons la fonction d'une variable réelle $f(x)$ comme il suit.

Soit x_0 un nombre réel donné. Le nombre $a = x_0 - \text{Ex}_0$ (où Ex_0 désigne l'entier de x_0) satisfait évidemment à la condition $0 \leq a < 1$ et la droite $x = a$ rencontre chacun des ensembles M_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) en un et un seul point. Si $x_0 \geq 1$, posons $m = 2 \text{Ex}_0$ et si $x_0 < 1$, posons $m = -2 \text{Ex}_0 + 1$: ainsi le nombre m est toujours entier positif. Nous définirons $f(x_0)$ comme l'ordonnée du point (unique) en lequel la droite $x = a$ rencontre l'ensemble M_m .

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tout x réel. Nous allons montrer que le plan P est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble E de tous les points de la courbe $y = f(x)$.

Désignons à ce but par $E_{k,l}$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $(x - k, y - l)$ est un point de l'ensemble E et par $H_{k,l}$ l'ensemble qui s'obtient de $E_{k,l}$ par la rotation de -90° autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Les ensembles $E_{k,l}$ et $H_{k,l}$ pour k et l entiers sont évidemment tous superposables avec l'ensemble E .

Nous prouverons que

$$(1) \quad P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (E_{k,l} + H_{k,l}).$$

Soit, en effet, (x_0, y_0) un point donné du plan P . Posons $a = x_0 - Ex_0$, $b = y_0 - Ey_0$: ce sont des nombres ≥ 0 et < 1 et (a, b) est un point du carré $Q \subset M + N$. Le point (a, b) appartient donc à un au moins des ensembles M et N .

Si $(a, b) \in M$, il existe d'après $M = M_1 + M_2 + \dots$ un indice n tel que $(a, b) \in M_n$. Or, d'après la propriété de l'ensemble M_n , (a, b) est le seul point en lequel la droite $x = a$ rencontre l'ensemble M_n et d'après la définition de la fonction $f(x)$ on a $f(a + q) = b$ pour $n = 2q$ et $f(a + q + 1) = b$ pour $n = 2q - 1$. D'après la définition des ensembles E et $E_{k,l}$, il en résulte que l'on a:

$$(x_0, y_0) \in E_{Ex_0 - q, Ey_0} \quad \text{pour } n = 2q$$

et

$$(x_0, y_0) \in E_{Ex_0 + q - 1, Ey_0} \quad \text{pour } n = 2q - 1,$$

de sorte que d'après (1) le point (x_0, y_0) appartient à la somme (1).

Si $(x_0, y_0) \in N$, le point (ξ_0, η_0) qui s'obtient du point (x_0, y_0) par la rotation de 90° autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ appartient à l'ensemble M et, comme nous avons démontré tout à l'heure, il existe un terme $E_{k,l}$ de la somme (1) tel que $(\xi_0, \eta_0) \in E_{k,l}$. Il en résulte tout de suite (d'après la définition de l'ensemble $H_{k,l}$) que $(x_0, y_0) \in H_{k,l}$.

Le point (x_0, y_0) appartient donc toujours à la somme (1). L'implication $P_1 \rightarrow C_{48}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer qu'en appliquant une décomposition de l'espace dont j'ai parlé dans ma communication parue aux *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* XXV (1932), p. 10—11, on pourrait démontrer sans peine que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe deux fonctions d'une variable réelle $f_1(x)$ et $f_2(x)$ telles que l'espace à 3 dimensions est une somme d'infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble des points de la courbe gauche définie par les équations $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$.

Définissons maintenant à l'aide de la fonction $f(x)$ une nouvelle fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle comme il suit. Posons $\varphi(x) = f(x)$ pour $x < 1$. Si $x \geq 1$, Ex est un nombre naturel que l'on peut écrire (d'une façon unique) sous la forme $Ex = 2^{p-1}(2q-1)$ où p et q sont des nombres naturels; nous poserons alors

$$\varphi(x) = f[(-1)^p q + x - Ex].$$

On voit sans peine que l'ensemble de tous les points de la courbe $y = \varphi(x)$ peut être décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints (correspondant aux intervalles $k \leq x < k+1$ où k est un entier) et dont on peut former, par une translation convenable de chacun de ces ensembles, une infinité dénombrable de courbes congruentes avec la courbe $y = f(x)$. On en déduit aussitôt, en vertu de la propriété de la fonction $f(x)$, la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ telle que la courbe $y = \varphi(x)$ peut être divisée en une infinité dénombrable d'"arcs" (correspondant aux intervalles $k \leq x < k+1$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), dont on peut, en les déplaçant convenablement (par translations et rotations), couvrir tout le plan.

Il est à remarquer que, comme l'a démontré M. Mazurkiewicz¹⁾, les mots „d'une infinité dénombrable" dans l'énoncé de la proposition C_{48} ne peuvent pas être remplacés par les mots „d'un nombre fini", le plan n'étant pas une somme d'un nombre fini de courbes.

Une autre conséquence immédiate de la proposition P_1 est la

Proposition C_{49} . Il existe un ensemble plan E tel que toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre l'ensemble E dans un ensemble linéaire de points de mesure nulle et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre le complémentaire de E dans un ensemble linéaire de mesure nulle²⁾.

Nous ne savons pas démontrer la proposition C_{49} sans faire intervenir l'hypothèse H ³⁾. Or, il est à remarquer que sans l'hypothèse H (mais en faisant appel au théorème de M. Zermelo) nous savons démontrer qu'il existe un ensemble plan que toute

¹⁾ S. Mazurkiewicz, *Fund. Math.* XXI, p. 43.

²⁾ Le problème d'existence d'un tel ensemble E a été posé par M. H. Steinhaus.

³⁾ En vertu du lemme p. 9, il suffit d'ailleurs, pour démontrer la proposition C_{49} , d'employer l'hypothèse suivant laquelle tout ensemble (linéaire) de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est de mesure nulle.

droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre dans un seul point et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre dans un ensemble (linéaire) de points non mesurable au sens de Lebesgue ¹⁾.

§ 2. Conséquences $C_{50} - C_{52}$ de P_4 ($P_4 a$).

Proposition C_{50} . *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ qui ne prennent que deux valeurs 0 et 1 et qui sont telles que, quelle que soit la suite infinie croissante d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, la suite infinie $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \dots$ n'est convergente que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x ²⁾.*

Démonstration. Admettons la proposition P_4 et soit $\{A_x^i\}$ le système d'ensembles vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de P_4 . Posons pour i naturels et x réels

$$(1) \quad f_i(x) = 1 \quad \text{pour } x \in A_0^i$$

et

$$(2) \quad f_i(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathcal{E} - A_0^i.$$

Nous allons montrer que la suite $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) satisfait à la proposition C_{50} .

Soit à ce but $m_1, m_2, m_3, \dots$ une suite infinie croissante quelconque d'indices. Posons

$$(3) \quad D = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\mathcal{E} - \sum_{i=p}^{\infty} A_0^{m_i} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\mathcal{E} - \sum_{i=p}^{\infty} A_1^{m_i} \right)$$

Le système d'ensembles A_x^i satisfait par hypothèse à la condition 3) de P_4 , qui équivaut, comme nous savons, à la condition 3''), p. 18. Or, la condition 3'') implique tout de suite que l'ensemble (3) est au plus dénombrable.

¹⁾ Cf. ma Note du 24 Février 1919 dans le *Bull. Acad. Cracovie*.

²⁾ C'est la solution négative d'un problème posé par M. S. Saks; voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XVIII, p. 110 et *Bull. Acad. Serbe A.*, 1932, p. 73. Cf. la proposition C_{13} , Chap. II, p. 62.

Soit maintenant x un nombre de l'ensemble $\mathcal{E} - D$. On a donc selon (3):

$$x \in \sum_{i=p}^{\infty} A_0^{m_i} \quad \text{et} \quad x \in \sum_{i=p}^{\infty} A_1^{m_i} \quad \text{pour } p = 1, 2, 3, \dots$$

Il existe par conséquent une infinité d'indices différents i tels que $x \in A_0^{m_i}$, donc d'après (1) que $f_{m_i}(x) = 1$, et une infinité d'indices différents m_i tels que $x \in A_1^{m_i}$, donc d'après (2) et d'après la propriété 2) de P_4 tels que $f_{m_i}(x) = 0$. La suite infinie des fonctions $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \dots$ diverge donc pour tout $x \in \mathcal{E} - D$. Les valeurs de x pour lesquelles cette suite est convergente appartiennent donc à D et forment par suite un ensemble au plus dénombrable.

L'implication $P_4 \rightarrow C_{50}$ est ainsi démontrée.

Il est à remarquer que, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz ¹⁾, il n'existe aucune suite infinie de fonctions mesurables $f_1(x), f_2(x), \dots$ vérifiant la proposition C_{50} .

La proposition C_{50} équivaut, comme on démontre sans peine (sans utiliser l'hypothèse H), à la proposition C_{51} suivante:

Proposition C_{51} . *Il existe deux suites infinies d'ensembles $\{E_i\}$ et $\{H_i\}$ telles que*

$$1) \quad \mathcal{E} = E_i + H_i \quad \text{pour tout } i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$2) \quad E_i H_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots,$$

3) N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que l'on a

$$NE_i \neq 0 \quad \text{et} \quad NH_i \neq 0 \quad \text{pour tout } i \geq p.$$

Démonstration. L'implication $C_{51} \rightarrow C_{50}$ se démontre tout à fait comme l'implication $P_4 \rightarrow C_{50}$ de tout à l'heure et pour démontrer l'implication $C_{50} \rightarrow C_{51}$ il suffit, comme on voit sans peine, de poser

$$E_i = \bigcup_x [f_i(x) = 0] \quad \text{et} \quad H_i = \bigcup_x [f_i(x) = 1] \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots$$

¹⁾ Voir *Fund. Math.* XVIII, p. 114.

Proposition C_{52} . *Etant donné un ensemble quelconque Q de nombres réels et une famille arbitraire Φ de sous-ensembles de Q assujettie à la condition:*

(A) *toute famille de sous-ensembles disjoints (non vides) de Q qui appartiennent à Φ est au plus dénombrable,*

il existe toujours une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ de sous-ensembles de Q n'appartenant pas à Φ et tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable ¹⁾.

Démonstration. Admettons la proposition P_{1a} et soit $\{A_x^i\}$ un système d'ensembles satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3^a) de cette proposition. Imaginons tous les sous-ensembles de Q partagés en deux familles Φ et $\mathcal{V}$ de façon que la condition (A) soit réalisée pour Φ .

Nous allons montrer d'abord qu'il existe un nombre réel x tel que l'on ait pour tout i naturel:

$$(4) \quad \text{soit } Q \cdot A_x^i = 0, \quad \text{soit } Q \cdot A_x^i \in \mathcal{V}.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait pour tout nombre x réel un indice naturel i_x tel que $Q \cdot A_x^{i_x} \neq 0$ et $Q \cdot A_x^{i_x} \in \Phi$. L'ensemble de tous les nombres réels étant indénombrable et celui de tous les indices naturels dénombrable, il existerait par conséquent un nombre naturel p tel qu'on aurait $i_x = p$ pour une infinité indénombrable de nombres réels x . On aurait donc $0 \neq Q \cdot A_x^p \in \Phi$ pour une infinité non dénombrable de nombres réels x , contrairement à la propriété (A) de la famille Φ et à la condition 2) de la proposition P_{1a} . L'existence d'un x réel donnant lieu à l'alternative (4) est ainsi établie.

¹⁾ Voir S. Ulam, *Fund. Math.* XVI, p. 145, théorème (B), où la proposition C_{52} est démontrée sans l'hypothèse H pour les ensembles Q de puissance $\aleph_1$. Voir aussi *Fund. Math.* XX, p. 214, où j'ai démontré la proposition C_{52} en me basant sur une hypothèse moins restrictive que l'hypothèse H ; cf. S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 221 et p. 223 (Bemerkung III).

Or, désignons par E_n le n -ième terme non vide de la suite infinie d'ensembles $Q \cdot A_x^1, Q \cdot A_x^2, Q \cdot A_x^3, \dots$. En vertu de la condition 3^a) de la proposition P_{1a} cette suite infinie d'ensembles satisfait à la proposition C_{52} .

Il est ainsi démontré que $P_{1a} \rightarrow C_{52}$.

Il est à remarquer que dans la proposition C_{52} l'hypothèse d'après laquelle l'ensemble Q est formé de nombres réels, peut être remplacée évidemment par celle que Q soit un ensemble de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ formé d'éléments quelconques. D'ailleurs, la proposition C_{52} peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse H pour tous les ensembles Q de puissance $m \geq \aleph_0$, s'il n'existe aucun aleph inaccessible ¹⁾ $\leq m$, donc en particulier, pour tous les ensembles Q de puissance $\aleph_\alpha$ où $\alpha \leq \Omega$ ²⁾.

§ 3. Mesure et catégorique. Conséquences $C_{53} - C_{57}$ de C_{52} .

Proposition C_{53} . *Etant donné un ensemble Q quelconque de nombres réels, il n'existe aucune fonction $m(E)$ qui fasse correspondre à chaque sous-ensemble E de Q un nombre réel (fini) $m(E)$ conformément aux conditions suivantes:*

1) *$m(E)$ ne s'annule pas identiquement pour tous les sous-ensembles E de Q ,*

2) *$m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, quelle que soit la suite infinie $E_1, E_2, \dots$ de sous-ensembles disjoints de Q ,*

3) *$m(E) = 0$ pour tout sous-ensemble E de Q composé d'un seul élément ³⁾.*

¹⁾ Voir pour la définition plus loin, Chap. V, p. 152.

²⁾ Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 214.

³⁾ La proposition C_{53} constitue la solution négative du problème de la mesure généralisé, considéré au Chap. II, § 12, p. 60 (dans sa forme affranchie de la restriction (i) du th. 5, p. 44). Cf. S. Banach et C. Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 129 et S. Ulam, *Fund. Math.* XVI, p. 145 — 146.

Démonstration. Admettons la proposition C_{52} et supposons qu'il existe une fonction $m(E)$ satisfaisant aux conditions 1)–3) de C_{53} . Soit M un sous-ensemble de Q tel que $m(M) \neq 0$. Un tel M existe en vertu de 1). Désignons par Φ la famille de tous les sous-ensembles E de Q tels que $m(EM) \neq 0$ et par Ψ celle de tous les autres sous-ensembles de Q .

Nous allons montrer au préalable que la famille Φ satisfait à la condition (A), p. 106.

Supposons qu'il n'en est pas ainsi et soit F une famille indénombrable de sous-ensembles disjoints de Q appartenant à Φ . Comme $F \subset \Phi$, on a donc $m(XM) \neq 0$ pour tout $X \in F$ et, la famille F étant indénombrable, le nombre $m(XM)$ a le même signe, p. ex. $m(XM) > 0$, pour une infinité indénombrable d'ensembles $X \in F$. Il existe par conséquent un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $m(XM) > \eta$ se présente pour une infinité indénombrable, donc à plus forte raison pour certaine suite infinie $\{X_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) d'ensembles $X \in F$. Les ensembles qui appartiennent à F étant par hypothèse disjoints deux à deux, on conclut de 2) qu'on a la relation $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n M\right) \geq \eta + \eta + \dots = +\infty$, ce qui est impossible, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} X_n M \subset M \subset Q$, d'où, selon 2), le nombre $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n M\right)$ est fini. La propriété (A) de Φ est ainsi établie.

En vertu de la proposition C_{52} , il existe donc dans Ψ une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable. Comme $M \subset Q$, il vient par conséquent $M = D + \sum_{n=1}^{\infty} E_n M$ où $\overline{D} \leq \aleph_0$ et $D \cdot E_n M = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$. Selon les conditions 2) et 3), il en résulte que

$$(5) \quad m(M) = m(D) + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n M) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n M),$$

puisque ces conditions entraînent l'égalité $m(D) = 0$ pour tout D fini ou dénombrable. Or, comme $m(E_n M) = 0$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ (puisque $E_n \in \Psi$), la formule (5) donnerait d'après la condition 2)

l'égalité $m(M) = 0$, contrairement à l'hypothèse admise sur l'ensemble M .

L'implication $C_{52} \rightarrow C_{53}$ se trouve donc démontrée.

Il est à remarquer que dans la proposition C_{53} on peut, bien entendu, remplacer également l'ensemble Q de nombres réels par un ensemble d'éléments quelconques de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$.

Proposition C_{54} . *Tout ensemble linéaire de mesure extérieure positive contient une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure positive ¹⁾.*

Démonstration. Admettons la proposition C_{52} et supposons que la proposition C_{54} soit en défaut pour un ensemble linéaire Q , c. à d. que l'ensemble Q soit de mesure extérieure positive, tandis que chaque famille de sous-ensembles de Q disjoints deux à deux et ayant la mesure extérieure positive est au plus dénombrable. Désignons par Φ la famille de tous les sous-ensembles de Q qui sont de mesure extérieure positive et par Ψ la famille de tous les autres sous-ensembles de Q . Chaque famille d'ensembles disjoints et qui appartiennent à Φ est par conséquent au plus dénombrable. D'après C_{52} on obtient facilement $Q = D + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, où D est un ensemble au plus dénombrable et E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont des ensembles de la famille Ψ , donc de mesure nulle. L'ensemble Q serait donc de mesure nulle, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $C_{52} \rightarrow C_{54}$.

Il est à remarquer que le théorème selon lequel tout ensemble linéaire mesurable de mesure positive (au sens de Lebesgue) est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles non mesurables disjoints deux à deux peut être démontré sans faire appel à l'hypothèse H ²⁾.

¹⁾ Voir S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 223 (Satz III).

²⁾ Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une décomposition du continu en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables*, C. R. 165; cf. aussi W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 150.

Un raisonnement correspondant par dualité à celui qui nous a servi pour établir l'implication $C_{52} \rightarrow C_{54}$ permet de déduire de C_{52} la conséquence suivante (qui est donc en relation de dualité avec C_{54}):

Proposition C_{55} . *Tout ensemble linéaire de deuxième catégorie de Baire contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie de Baire ¹⁾.*

Proposition C_{56} . *Tout ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive contient un sous-ensemble qui n'est pas mesurable relativement à Q , c. à d. qui n'est pas un produit de Q et d'un ensemble mesurable ²⁾.*

Démonstration. Admettons la proposition C_{53} et supposons que chaque sous-ensemble E d'un ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive soit mesurable relativement à Q . Désignons par $m(E)$ la mesure extérieure de E . Nous allons montrer d'abord que la fonction $m(E)$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3) de la proposition C_{53} .

Pour 3) cela est évident. Pour 1) cela résulte de l'hypothèse que la mesure extérieure de Q est positive, donc que $m(Q) \neq 0$. Reste à examiner la condition 2).

Soit donc $E_1, E_2, E_3, \dots$ une suite infinie de sous-ensembles disjoints de Q . On a par hypothèse, pour tout n naturel

$$(6) \quad E_n = QM_n$$

où M_n est un ensemble mesurable. Posons

$$(7) \quad R_1 = M_1 \quad \text{et} \quad R_n = M_n - \sum_{i=1}^{n-1} M_i \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$

Ce sont évidemment des ensembles mesurables disjoints. Or, les ensembles E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) étant deux à deux disjoints, on a selon (6) $QM_n M_k = 0$ pour $k \neq n$, donc, en tenant compte de (7),

¹⁾ S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 222 (Satz I).

²⁾ Voir S. Eilenberg, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV (1932), p. 98 (Corollaire 7).

$$E_n = QM_n = QM_n - Q \cdot \sum_{i=1}^{n-1} M_i = QR_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ sont donc contenus respectivement dans les ensembles mesurables disjoints $R_1, R_2, R_3, \dots$. Il en résulte d'après les théorèmes connus de la théorie de la mesure, que la mesure extérieure de leur somme est égale à la somme de leurs mesures extérieures, c. à d. que $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

La condition 2) de la proposition C_{53} est donc aussi vérifiée. Or, la fonction $m(E)$ n'étant pas identiquement nulle pour $E \subset Q$ (puisque $m(Q) > 0$), on se trouve en contradiction avec la proposition C_{53} . Ainsi $C_{53} \rightarrow C_{56}$.

Notons que M. Lusin a démontré récemment sans faire appel à l'hypothèse H que *tout ensemble linéaire Q qui n'est pas toujours de première catégorie contient un sous-ensemble non mesurable (B) relativement à Q .*

La proposition C_{56} équivaut à la suivante

Proposition C_{57} . *Quel que soit l'ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe une fonction réelle définie sur lui et n'admettant aucun prolongement à une fonction mesurable de variable réelle ¹⁾.*

Démonstration. Admettons la proposition C_{56} et considérons un ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive. En vertu de C_{56} il existe dans Q un sous-ensemble E qui n'est pas mesurable relativement à Q . Définissons sur Q une fonction $\varphi(x)$ comme il suit:

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in E, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in Q - E$$

et supposons qu'il existe une fonction mesurable $f(x)$ d'une variable réelle x telle que l'on ait

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in Q.$$

¹⁾ Voir S. Eilenberg, l. c., p. 95.

L'ensemble $M = \bigcup_x [f(x) > 0]$ serait alors mesurable et les définitions de $\varphi(x)$ et $f(x)$ donneraient $E = MQ$, contrairement à l'hypothèse sur E .

Le prolongement de la fonction $\varphi(x)$ à une fonction mesurable de variable réelle est donc impossible.

Ainsi $C_{56} \rightarrow C_{57}$. La démonstration de l'implication inverse $C_{57} \rightarrow C_{56}$ n'exige non plus d'hypothèse H^1 .

Il est à remarquer qu'on peut déduire de la proposition C_{55} la conséquence suivante, qui est en relation de dualité avec la proposition C_{56} :

Proposition C_{58} . *Tout ensemble linéaire Q de deuxième catégorie contient un sous-ensemble qui n'est pas un produit de Q et d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire (relativement à la droite).*

Démonstration. Soit Q un ensemble linéaire de deuxième catégorie. D'après C_{55} l'ensemble Q contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie et, par suite, *partout* de deuxième catégorie dans un certain intervalle aux extrémités rationnelles. La famille de tels intervalles étant dénombrable, il en résulte qu'il existe dans Q deux ensembles disjoints Q_1 et Q_2 qui sont partout de deuxième catégorie dans un intervalle I .

Or, on montre sans peine que Q_1 n'est pas un produit de Q et d'un ensemble E jouissant de la propriété de Baire (relativement à la droite). En effet, un tel ensemble E , en tant que contenant Q_1 , serait partout de deuxième catégorie dans I . L'ensemble E jouissant de la propriété de Baire, l'ensemble $I - E$ serait donc de première catégorie, ce qui est impossible, puisque les hypothèses que $Q_1 = EQ$, $Q_2 \subset Q$ et $Q_1 Q_2 = 0$ entraînent les relations $EQ_2 = 0$ et $I - E \supset (I - E) Q_2 = IQ_2 - EQ_2 = IQ_2$, de sorte que $I - E$ contient l'ensemble IQ_2 , qui est de deuxième catégorie.

Il est ainsi établi que $C_{55} \rightarrow C_{58}$.

¹⁾ S. Eilenberg, l. c., p. 94 (Théorème 1).

De C_{58} on déduit facilement la conséquence suivante, duale relativement à C_{57} .

Proposition C_{59} . *Quel que soit l'ensemble linéaire de deuxième catégorie, il existe une fonction réelle définie sur lui qui n'admet aucun prolongement à une fonction de variable réelle satisfaisant à la condition de Baire.*

§ 4. Ensembles croissants. Conséquences $C_{60} - C_{61}$ de l'hypothèse H .

Théorème 1. *Etant donnée une famille F de puissance $m \geq \aleph_0$ de sous-ensembles de puissance m d'un ensemble quelconque M de puissance m , l'ensemble M contient m ensembles disjoints dont chacun admet m éléments communs avec chaque ensemble de la famille F^1 .*

Démonstration. Soit φ le plus petit type ordinal correspondant au nombre cardinal m . En vertu du théorème de M. Zermelo, il existe une suite transfinie du type φ

$$(8) \quad p_1, p_2, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les éléments (différents) de l'ensemble donné M . Considérons une famille quelconque de puissance m de sous-ensembles de M de puissance m . Comme $m \geq \aleph_0$, on a $m^2 = m$ et il existe une suite transfinie du type φ

$$(9) \quad E_1, E_2, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\alpha, \dots \quad (\alpha < \varphi)$$

composée de tous les ensembles appartenant à la famille F et qui en contient chacun une infinité de puissance m des fois.

Nous définirons d'abord par l'induction transfinie pour $\beta \leq \alpha < \varphi$ une suite double $\{q_\beta^\alpha\}$ d'éléments de M .

Désignons par q_1^1 le premier terme de la suite (8) qui appartient à l'ensemble E_1 . Etant donné un nombre ordinal quelconque λ compris entre 1 et φ , l'ensemble Q_λ de tous les termes q_β^α où $\beta \leq \alpha < \lambda$ est évidemment de puissance $< m$ (puisque $\lambda < \varphi$ et φ est le plus petit nombre ordinal de la puissance m), tandis que

¹⁾ Ce théorème est une généralisation d'un lemme établi par M. C. Kuratowski et moi, *Fund. Math.* VIII, p. 193.

l'ensemble E_λ de la suite (9) est de puissance m (puisque $E_\lambda \in F$). Il existe par conséquent m éléments de la suite (8) qui appartiennent à $E_\lambda - Q_\lambda$; ils forment donc une suite partielle de (8), également du type φ . Soient

$$(10) \quad q_1^\lambda, q_2^\lambda, \dots, q_w^\lambda, q_{w+1}^\lambda, \dots, q_\xi^\lambda, \dots, q_\lambda^\lambda$$

les λ premiers éléments de cette dernière. La suite double $\{q_\beta^{\alpha_1}\}$ où $\beta \leq \alpha < \varphi$ se trouve ainsi définie.

Ceci étant, désignons d'une façon générale par R_β l'ensemble de tous les $q_\beta^{\alpha_1}$ où $\beta \leq \alpha < \varphi$ et considérons deux éléments quelconques $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \in R_{\beta_1}$ et $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \in R_{\beta_2}$ où $\beta_1 \leq \alpha_1 < \varphi$, $\beta_2 \leq \alpha_2 < \varphi$ et $\beta_1 < \beta_2$.

Or, dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2$, les éléments $q_{\beta_1}^{\alpha_1}$ et $q_{\beta_2}^{\alpha_2}$ figurent donc dans la suite (10) avec $\lambda = \alpha_1 = \alpha_2$, d'où $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$, puisque la suite en question a été extraite par définition de la suite (8), formée d'éléments différents. Dans le cas où $\alpha_1 < \alpha_2$, il vient $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \in Q_{\alpha_1+1} \subset Q_{\alpha_2}$ (selon la définition de Q_λ) et $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \in E_{\alpha_2} - Q_{\alpha_2}$ (selon la définition de $q_\beta^{\alpha_1}$), d'où $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \notin Q_{\alpha_2}$ et par conséquent $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$. Enfin, dans le cas où $\alpha_1 > \alpha_2$, un raisonnement tout à fait analogue conduit à la même inégalité. Ainsi l'inégalité $\beta_1 \neq \beta_2$ (où $\beta_1 \leq \alpha_1 < \varphi$ et $\beta_2 \leq \alpha_2 < \varphi$) entraîne en tout cas l'inégalité $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$, c. à d. que les ensembles R_{β_1} et R_{β_2} sont alors disjoints.

Comme il y en a m , il reste à montrer que chaque R_β admet m éléments communs avec n'importe quel ensemble E de la famille F , donné à l'avance.

Or, selon la définition de la suite (9) on a $E = E_\alpha$ pour m valeurs distinctes de l'indice α , donc aussi pour m valeurs distinctes de cet indice telles que $\beta \leq \alpha < \varphi$. Pour chacune de ces valeurs de α , l'élément $q_\beta^{\alpha_1}$ figure donc dans la suite (10) et par conséquent appartient à l'ensemble E_α ; d'autre part, $q_\beta^{\alpha_1}$ appartient à R_β en vertu de la définition de cet ensemble. On a ainsi $q_\beta^{\alpha_1} \in E_\alpha R_\beta = ER_\beta$ et cette relation se présente pour m valeurs différentes de α .

Or, selon la définition de Q_λ on a pour $\alpha_1 < \alpha_2$ les relations $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \in Q_{\alpha_1+1}$, $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \in E_{\alpha_2} - Q_{\alpha_2}$ et $Q_{\alpha_1+1} \subset Q_{\alpha_2}$, d'où $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$. L'ensemble ER_β contient donc bien m éléments distincts (et pas davantage, puisque $ER_\beta \subset M$ et M est de puissance m), c. q. f. d.

Proposition C_{60} . *Tout ensemble linéaire qui est partout de deuxième catégorie ¹⁾ est une somme d'infinité indénombrable d'ensembles disjoints qui sont aussi partout de deuxième catégorie.*

Démonstration. Admettons l'hypothèse H et considérons un ensemble linéaire Q qui est partout de deuxième catégorie de Baire. Soit, d'autre part, E un G_δ linéaire qui n'est pas non-dense; il existe alors un intervalle I tel que l'ensemble E est dense dans I . L'ensemble $I - E$ est par conséquent un F_σ ne contenant aucun intervalle, donc un F_σ de première catégorie. Or, Q étant par hypothèse de deuxième catégorie dans I , il en résulte que l'ensemble $QE \supset QEI = QI - (I - E)$ est de deuxième catégorie. C'est donc un ensemble indénombrable et par suite, en vertu de l'hypothèse H , de puissance $2^{\aleph_0}$.

Ainsi l'ensemble Q admet $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec tout ensemble linéaire G_δ qui n'est pas non-dense.

Or, soit F la famille de tous les ensembles QE où E est un G_δ linéaire qui n'est pas non-dense. La famille F est par suite de puissance $2^{\aleph_0}$ et chaque ensemble de la famille F est de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit M la somme de tous les ensembles de la famille F . C'est évidemment un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ et on a $M \subset Q$. En vertu du théorème 1, l'ensemble M contient $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles disjoints dont chacun admet $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec tout ensemble de la famille F .

Soit R un tel sous-ensemble de M . Nous allons montrer que l'ensemble R est de deuxième catégorie dans tout intervalle I arbitrairement donné à l'avance.

Supposons, par contre, que l'ensemble RI soit de première catégorie, donc contenu dans un F_σ de première catégorie. En dé-

¹⁾ c. à d. de deuxième catégorie dans chaque intervalle (voir p. 41).

signant ce dernier par S , l'ensemble $E = I - S$ est un G_δ et il n'est pas non-dense. QE serait par conséquent un ensemble appartenant à la famille F et, comme tel, il admettrait $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec R . Cependant c'est impossible, car on a $RI \subset S$ et $QE = Q(I - S)$.

Ainsi l'ensemble M contient $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie dans tout intervalle. Il est donc vrai à plus forte raison que l'ensemble $Q \supset M$ se compose de $2^{\aleph_0}$ ensembles de ce genre.

L'implication $H \rightarrow C_{60}$ est par conséquent établie.

Il est à remarquer que l'on peut établir (sans employer l'hypothèse H) l'implication $C_{65} \rightarrow C_{60}$ ¹⁾. Toutefois, on ne sait démontrer sans faire appel à H où à une autre hypothèse, peut-être moins restrictive, non seulement la proposition C_{60} , mais non plus la proposition, d'après laquelle tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie dans chaque intervalle est une somme de deux ensembles disjoints de même nature²⁾.

Théorème 2. *Etant donnée une famille F de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours une fonction d'une variable réelle $g(x)$ telle que pour toute fonction $f(x)$ appartenant à F l'équation $f(x) = g(x)$ admet $< 2^{\aleph_0}$ racines différentes.*

Démonstration. φ désignant le plus petit nombre ordinal correspondant à la puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ

$$(11) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots \quad (\xi < \varphi)$$

formée de toutes les fonctions de la famille F , répétées au besoin $2^{\aleph_0}$ fois, si la puissance de la famille F est inférieure à $2^{\aleph_0}$. Soit

$$(12) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi)$$

¹⁾ Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXII, p. 1 et suivantes.

²⁾ *Fund. Math.* IV, p. 368, Problème 21 (de M. C. Kuratowski).

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels différents.

Pour définir la fonction $g(x)$, posons $g(x_1) = 0$ et procédons par l'induction transfinie comme il suit. Soit $1 < \alpha < \varphi$. Désignons par E_α l'ensemble de tous les nombres $f_\xi(x_\alpha)$ où $\xi < \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, on a $\bar{\alpha} < 2^{\aleph_0}$, donc $\bar{E}_\alpha < 2^{\aleph_0}$, et il existe par conséquent dans la suite (12) des nombres qui n'appartiennent pas à E_α . Soit x_{ξ_α} le premier de tels nombres et $g(x_\alpha) = x_{\xi_\alpha}$.

La fonction $g(x)$ est ainsi définie pour tous les nombres de la suite (12), donc pour tout x réel, et on a

$$(13) \quad g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha) \quad \text{pour } \xi < \alpha < \varphi.$$

Considérons à présent une fonction quelconque $f(x)$ appartenant à la famille F . C'est donc un terme de la suite (11) et il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \varphi$ tel que $f(x) = f_\lambda(x)$. On a en vertu de (13) $g(x_\alpha) \neq f_\lambda(x_\alpha)$ pour $\lambda < \alpha < \varphi$, de sorte que l'égalité $g(x_\alpha) = f_\lambda(x_\alpha)$ ne peut se présenter que, peut-être, pour des nombres ordinaux $\alpha \leq \lambda$, dont l'ensemble est de puissance $\leq \bar{\lambda} < 2^{\aleph_0}$ (puisque $\lambda < \varphi$). Tous les nombres réels x tels que $f(x) = g(x)$ forment donc un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Proposition C_{61} . *Etant donnée une famille F de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours une fonction d'une variable réelle $g(x)$ telle que pour toute fonction $f(x)$ de la famille F l'ensemble des x réels qui satisfont à l'équation $f(x) = g(x)$ est au plus dénombrable.*

L'implication $H \rightarrow C_{61}$ résulte, en effet, directement du théorème 2, qui précède.

En désignant par F la famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle (dont la puissance est, comme on sait, $2^{\aleph_0}$), le théorème 2 entraîne en particulier ce

Corollaire 1. *Il existe une fonction $g(x)$ d'une variable réelle telle que, $f(x)$ étant une fonction de Baire quelconque (d'une va-*

riable réelle), l'ensemble de tous les x réels satisfaisant à l'équation $f(x) = g(x)$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Or, nous allons montrer que la fonction $g(x)$ dont il est question dans ce corollaire n'est une fonction de Baire sur aucun ensemble de puissance du continu.

En effet, en supposant que la fonction $g(x)$ soit une fonction de Baire sur un ensemble E de puissance du continu, il existerait, comme on sait ¹⁾, une fonction de Baire d'une variable réelle $f(x)$ qui coïncide avec $g(x)$ sur E , donc sur un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, contrairement au corollaire 1.

Ainsi la fonction $g(x)$ n'est, en particulier, continue sur aucun ensemble de puissance du continu. On a donc ce

Corollaire 2 ²⁾. *Il existe une fonction de variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu* ³⁾.

Moyennant l'hypothèse H il en résulte tout de suite cette

Proposition C_{62} . *Il existe une fonction de variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble non dénombrable.*

Or, comme l'a démontré M. H. Blumberg ⁴⁾, toute fonction d'une variable réelle est continue sur un ensemble dénombrable dense dans chaque intervalle.

Théorème 3 ⁵⁾. *Il existe une suite transfinie du type Ω formée d'ensembles linéaires G_δ croissants.*

Démonstration. Soient

$$(14) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots$$

¹⁾ Voir p. ex. *Fund. Math.* XVI, p. 81.

²⁾ W. Sierpiński et A. Zygmund, *Fund. Math.* IV, p. 316.

³⁾ En vertu d'un théorème de M. Lusin, une telle fonction ne peut pas être mesurable (voir p. ex. *Fund. Math.* III, p. 320).

⁴⁾ *Proceed. National Acad. U. S. A.* 8 (1922), p. 283—288.

⁵⁾ W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 103; cf. Z. Zalcwasser, *Fund. Math.* III, p. 45.

une suite transfinie (du type ordinal quelconque) formée de tous les nombres réels et

$$(15) \quad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \dots, \Gamma_\xi, \dots$$

une suite transfinie (quelconque) formée de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle.

Nous définirons par l'induction transfinie une suite du type Ω d'ensembles G_δ de mesure nulle

$$(16) \quad E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

comme il suit.

Posons $E_1 = \Gamma_1$. Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω , posons $S_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} E_\xi$, où E_ξ pour $\xi < \alpha$ sont supposés des G_δ de mesure nulle. Comme la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, S_α est encore un ensemble de mesure nulle. Il existe donc des termes de la suite (14) qui n'appartiennent pas à S_α . Soient x_{ξ_α} le premier de ces termes et $T_\alpha = S_\alpha + (x_{\xi_\alpha})$; l'ensemble T_α est encore un ensemble de mesure nulle.

Or, tout ensemble de mesure nulle étant, comme on sait, contenu dans un G_δ de mesure nulle, il existe des termes de la suite (15) qui contiennent l'ensemble T_α ; nous désignerons par E_α le premier de ces termes.

La suite transfinie (16) est ainsi définie par l'induction transfinie et on a par définition $S_\alpha \subset T_\alpha \subset E_\alpha$. Il en résulte selon la définition de S_α que

$$E_\xi \subset E_\alpha \quad \text{pour } \xi < \alpha.$$

D'autre part, on a $x_{\xi_\alpha} \in T_\alpha \subset E_\alpha$ et en même temps $x_{\xi_\alpha} \notin S_\alpha$, d'où $x_{\xi_\alpha} \notin E_\xi$, puisque $E_\xi \subset S_\alpha$. Par conséquent

$$E_\xi \neq E_\alpha \quad \text{pour } \xi < \alpha.$$

La suite (16) est donc croissante et formée d'ensembles différents, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en prenant pour chaque nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un point t_α de l'ensemble $E_{\alpha+1} - E_\alpha$, on obtient un ensemble N (de puissance $\aleph_1$) qui jouit de la propriété λ .

En effet, soit

$$D = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3}, \dots)$$

un sous-ensemble dénombrable de N . Tous les indices α_i ($i=1, 2, 3, \dots$) étant des nombres ordinaux $< \Omega$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $\alpha_i < \alpha$ pour $i=1, 2, 3, \dots$. Comme $t_\xi \in E_{\xi+1} - E_\xi$, on a donc $t_{\alpha_i} \in E_{\alpha_i+1} \subset E_\alpha$ pour $i=1, 2, 3, \dots$ (la suite (16) étant croissante). Par conséquent $D \subset E_\alpha$.

Désignons par R l'ensemble de tous les points t_ξ aux indices $\xi < \alpha$. On a $t_\xi \notin E_\xi$ pour $\xi < \Omega$, donc $t_\xi \notin E_\alpha$ pour $\xi \geq \alpha$. Il vient donc $R = NE_\alpha$ et, comme $D \subset E_\alpha$ et $D \subset N$, on trouve $D = N \cdot [E_\alpha - (R - D)]$. L'ensemble $R - D$ étant au plus dénombrable (donc un F_σ) et l'ensemble E_α étant un G_δ , l'ensemble $E_\alpha - (R - D)$ est un G_δ et l'ensemble D est un produit de N par un G_δ .

L'ensemble N jouit donc de la propriété λ , c. q. f. d.

Ajoutons que la démonstration du théorème 3 est basée sur la théorie de la mesure, mais qu'on peut démontrer ce théorème d'une façon purement topologique (sans faire intervenir la théorie de la mesure)¹⁾.

Proposition C_{63} . *Il existe une suite transfinie décroissante de puissance du continu formée d'ensembles linéaire F_σ distincts.*

L'implication $H \rightarrow C_{63}$ résulte, en effet, aussitôt du théorème 3.

Il est à remarquer que sans l'hypothèse H nous ne savons même établir l'existence d'une suite transfinie croissante de puissance $2^{\aleph_0}$ formée d'ensembles linéaires mesurables (B) distincts.

Proposition C_{64} . *Il existe une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles croissants de nombres réels²⁾.*

¹⁾ Voir W. Sierpiński, C. R. Soc. Sc. Varsovie XXVI, note du 26.X.1933.

²⁾ Une famille est formée d'ensembles croissants, lorsque de deux ensembles de cette famille l'un est toujours contenu dans l'autre; cf. p. 24.

Démonstration. Soit T l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω

$$(17) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

dont les termes a_ξ sont égaux à 0 ou à 1.

L'ensemble T est évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$, donc, d'après l'hypothèse H , de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Etant donné un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, désignons par E_α l'ensemble de toutes les suites transfinies (ou finies, si $\alpha < \omega$) du type α formées de nombres 0 et 1.

Comme $\alpha < \Omega$, nous aurons évidemment

$$(18) \quad \bar{E}_\alpha = 2^\alpha \leq 2^{\aleph_0}.$$

Posons

$$(19) \quad E = \sum_{\alpha < \Omega} E_\alpha.$$

Selon (18) et (19) nous trouvons tout de suite $\bar{E} \leq \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ et, puisqu'on a évidemment $\bar{E} \geq \bar{E}_\omega = 2^{\aleph_0}$, nous avons

$$(20) \quad \bar{E} = 2^{\aleph_0}.$$

Pour démontrer la proposition C_{64} , il suffit donc selon (20) de définir une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles croissants de l'ensemble E .

Considérons à ce but un élément x quelconque de l'ensemble T : c'est donc une suite transfinie du type Ω formée de nombres 0 et 1, p. ex. la suite (17). Nous désignerons par $M(x)$ l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble E , donc de toutes les suites finies ou transfinies dénombrables

$$(21) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, b_{\omega+1}, \dots, b_\xi, \dots \quad (\xi < \alpha)$$

formées de nombres 0 et 1, telles qu'il existe un nombre ordinal $\mu < \alpha$ assujetti à la condition

$$(22) \quad b_\xi \leq a_\xi \quad \text{pour} \quad \xi < \mu \quad \text{et} \quad b_\mu < a_\mu.$$

Nous allons montrer que si x et x' sont deux éléments différents de l'ensemble T , on a $M(x) \neq M(x')$: notamment soit $M(x) \subset M(x')$, soit $M(x') \subset M(x)$.

Considérons donc la suite transfinie $x' \neq x$ de l'ensemble T :

$$(23) \quad a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_\omega, a'_{\omega+1}, \dots, a'_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

La suite (23) diffère par conséquent de la suite (17). Il existe donc un nombre ordinal ν , le plus petit pour lequel on a $a_\nu \neq a'_\nu$. On a par suite soit $a_\nu < a'_\nu$, soit $a_\nu > a'_\nu$. Admettons que $a_\nu < a'_\nu$.

Soit p un élément de $M(x)$: c'est donc une suite (finie ou transfinie dénombrable) de la forme (21) et il existe un nombre ordinal μ assujéti à la condition (22). Or, la définition du nombre ν entraîne que

$$(24) \quad a_\xi = a'_\xi \quad \text{pour } \xi < \nu \text{ et } a_\nu < a'_\nu$$

Si $\nu \leq \mu$, on a donc selon (22) et (24):

$$b_\xi < a_\xi \quad \text{pour } \xi < \nu \text{ et } b_\nu < a'_\nu$$

et si $\nu > \mu$, on a selon les mêmes conditions

$$b_\xi < a'_\xi \quad \text{pour } \xi < \mu \text{ et } b_\mu < a'_\mu.$$

Dans les deux cas on conclut de la définition de $M(x')$ que la suite (21) appartient à $M(x')$, c. à d. que $p \in M(x')$. Nous avons ainsi démontré que $M(x) \subset M(x')$.

Or, désignons par q la suite (finie ou transfinie) du type $\nu + 1$:

$$a_1, a_2, \dots, a_\xi, \dots, a_\nu.$$

La définition des ensembles $M(x)$ et $M(x')$ entraîne alors selon (24) que $q \notin M(x)$ et $q \in M(x')$. On a donc $M(x) \neq M(x')$.

Nous avons ainsi démontré que deux ensembles $M(x)$ et $M(x')$ correspondant aux éléments différents x et x' de l'ensemble T sont toujours différents l'un de l'autre et que l'un d'eux est toujours contenu dans l'autre. Soit Φ la famille de tous les ensembles $M(x)$

correspondant aux éléments x de T . Comme $\bar{T} = 2^{2^{\aleph_0}}$, la famille Φ est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, d'après ce que nous venons d'établir sur les ensembles $M(x)$, la famille Φ est formée d'ensembles croissants et la définition des ensembles $M(x)$ montre que ce sont des sous-ensembles de l'ensemble E .

Φ est donc une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles croissants de l'ensemble E . Ce dernier étant d'après (20) de puissance $2^{\aleph_0}$, l'implication $H \rightarrow C_{64}$ se trouve établie.

Il est à remarquer que *sans admettre l'hypothèse H nous savons démontrer qu'il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles croissants de nombres réels*¹⁾.

§ 5. Ensembles presque disjoints. Conséquences $C_{65} - C_{70}$ (C_{70}^a) de H .

Proposition C_{65} . *Il existe une famille F de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles de nombres réels de puissance $2^{\aleph_0}$, telle que deux ensembles (différents) de la famille F ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs*²⁾.

Démonstration. Soient T , E_α et E les ensembles qui viennent d'être considérés dans la démonstration de la proposition C_{64} . Soit x un élément de T . C'est donc une suite transfinie (17) formée de nombres 0 et 1. Désignons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ par $P(x, \alpha)$ la suite partielle du type α de la suite transfinie (17) et par $P(x)$ l'ensemble de toutes les suites $P(x, \alpha)$ où $\alpha < \Omega$. C'est donc un ensemble de puissance $\aleph_1$.

A tout élément x de T correspond ainsi un sous-ensemble $P(x)$ de E (puisque l'on a $P(x, \alpha) \in E_\alpha$ pour $x \in T$ et $\alpha < \Omega$). Nous allons montrer que x et y étant deux éléments distincts de T , les ensembles $P(x)$ et $P(y)$ ont un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

¹⁾ Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* III, p. 109.

²⁾ Voir W. Sierpiński, *Monatshefte für Math. u. Phys.* 35 (1928), p. 241; cf. A. Tarski *Fund. Math.* XII, p. 199 (Corollaire 20 pour $\alpha = 0$).

Soit à ce but $y \neq x$ la suite transfinie

$$(25) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, b_{\omega+1}, \dots, b_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega).$$

Les suites (17) et (25) sont donc différentes et il existe par conséquent un indice $\mu < \Omega$ tel que

$$(26) \quad a_\mu \neq b_\mu.$$

D'après la définition des suites $P(x, \alpha)$ et $P(y, \alpha)$, nous avons selon (26)

$$P(x, \alpha) \neq P(y, \alpha) \quad \text{pour } \mu < \alpha < \Omega.$$

D'autres part, on a évidemment

$$P(x, \alpha) \neq P(y, \beta) \quad \text{pour } \alpha \neq \beta,$$

puisque $P(x, \alpha)$ est une suite du type α et $P(x, \beta)$ en est une du type β .

Selon la définition des ensembles $P(x)$ et $P(y)$ ces ensembles ont donc en commun au plus $\bar{\mu}$ éléments, où $\bar{\mu} \leq \aleph_0$, puisque $\mu < \Omega$.

Désignons par F la famille de tous les ensembles $P(x)$ correspondant aux éléments x de l'ensemble T . Ce dernier étant, comme nous savons, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, la famille F est aussi de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ et, comme nous venons de démontrer, deux ensembles distincts de la famille F ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Or, $P(x) \subset E$ pour $x \in T$, de sorte que F est une famille de sous-ensembles de E . Ce dernier étant selon (20) de puissance $2^{\aleph_0}$, l'implication $H \rightarrow C_{65}$ se trouve démontrée.

Il est à remarquer que l'hypothèse H n'est intervenue dans la démonstration des propositions C_{64} et C_{65} que pour établir la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de l'ensemble T . Or, on a le théorème suivant:

Théorème 4¹⁾. *La proposition C_{65} est équivalente à l'égalité*

$$2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}.$$

¹⁾ A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 199 (Corollaire 20).

Démonstration. 1° D'après la remarque qui précède, il suffit, pour établir la proposition C_{65} , de démontrer que l'ensemble T de toutes les suites transfinies du type Ω de nombres 0 et 1 (qui est par définition de puissance $2^{\aleph_1}$) est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, c. à d. que $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}$. Cette égalité entraîne donc la proposition C_{65} .

2° Admettons à présent la proposition C_{65} . Il existe donc une famille F de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles indénombrables de nombres réels, ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. A tout ensemble N de F faisons correspondre un sous-ensemble $Q(N)$ de N de puissance $\aleph_1$. La famille Φ de tous les ensembles de nombres réels de puissance $\aleph_1$ étant de puissance $2^{\aleph_1}$, il résulte de l'inégalité $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_1}$ qu'on ne peut pas avoir toujours $Q(N) \neq Q(N')$ pour deux ensembles distincts N et N' de F , donc qu'il existe deux ensembles N et $N' \neq N$ de F tels que l'on a $Q(N) = Q(N')$. Or, c'est impossible, les ensembles N et N' ayant d'après la propriété de la famille F un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs et l'ensemble $Q(N)$ étant de puissance $\aleph_1$.

L'inégalité $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_1}$ ne peut donc avoir lieu. On a par conséquent $2^{2^{\aleph_0}} \leq 2^{\aleph_1}$ et, puisque d'autre part on a évidemment $2^{\aleph_1} \leq 2^{2^{\aleph_0}}$, on obtient $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}$.

Dans le même ordre d'idées on a encore ce

Théorème 5¹⁾. *L'inégalité $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille F de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles de nombres réels de puissance $2^{\aleph_0}$ ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit F une famille d'ensembles satisfaisant aux conditions du théorème. Faisons correspondre à tout ensemble N de F un sous-ensemble $Q(N)$ de N de puissance $\aleph_1$. Par hypothèse on doit avoir $Q(N) \neq Q(N')$ pour tout couple N et N' d'ensembles distincts appartenant à la

¹⁾ Cf. A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 198 (Corollaire 18).

famille F . La famille Φ de tous les ensembles $Q(N)$ où $N \in F$ est donc de la même puissance que la famille F . Par conséquent $\bar{F} = \bar{\Phi} > 2^{\aleph_0}$. Or, les ensembles N étant des sous-ensembles de puissance $\aleph_1$ de l'ensemble de tous les nombres réels, on a évidemment $\bar{\Phi} \leq 2^{\aleph_1}$. Ainsi $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

La condition est suffisante. Il suffit pour le montrer de consulter la démonstration de la proposition C_{64} (où C_{65}) et d'appliquer la remarque que $\bar{T} = 2^{\aleph_1}$.

Considérons à présent un ensemble linéaire N qui satisfait aux conditions de la proposition C_{32} . L'ensemble N étant de puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre N et l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels. En vertu de la proposition C_{65} , il existe donc une famille Φ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ formée de sous-ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ de N et telle que deux ensembles (différents) de la famille Φ ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Or, l'ensemble N satisfaisant à la proposition C_{32} , tout sous-ensemble non dénombrable de N , donc tout ensemble de la famille Φ , est non mesurable. On a ainsi cette

Proposition C_{66} . *Il existe une famille Φ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles linéaires non mesurables qui ont deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

Appelons *presque disjoints* deux ensembles infinis, si l'ensemble de leurs éléments communs est d'une puissance inférieure à celle de l'un et de l'autre. Il est à remarquer qu'on peut démontrer sans l'hypothèse H que *tout ensemble infini de puissance m est la somme d'une famille de puissance $> m$ d'ensembles presque disjoints*¹⁾.

¹⁾ Voir ma Note dans *Monatshefte für Math. und Phys.* 35, p. 239. La décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints a été l'objet d'un Mémoire de M. A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 188–205.

Proposition C_{67} . *Il existe une décomposition de l'intervalle $\mathcal{I} = [0 \leq x \leq 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles qui sont de mesure extérieure 1, de deuxième catégorie dans tout intervalle et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs*¹⁾.

Démonstration. E étant un ensemble linéaire quelconque, désignons d'une façon générale par $E(r)$ l'ensemble obtenu de E par translation de longueur r (dans la direction positive). Partageons tous les nombres réels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans le cas et dans ce cas seulement où leur différence est rationnelle. Choisissons un seul nombre dans chacune de ces classes et désignons par V leur ensemble: c'est le bien connu ensemble non mesurable de G. Vitali.

Soit

$$(27) \quad r_1, r_2, r_3, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels différents.

On a évidemment

$$(28) \quad V(r_i) \cdot V(r_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$

et

$$(29) \quad \mathcal{C} = V(r_1) + V(r_2) + V(r_3) + \dots$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels est donc la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints, superposables avec V . Par conséquent V est un ensemble de deuxième catégorie.

Divisons l'ensemble (27) en deux ensembles denses disjoints:

$$(30) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

et

$$(31) \quad q_1, q_2, q_3, \dots$$

Admettons maintenant l'hypothèse H . L'ensemble V étant de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, il existe d'une part d'après la proposition C_{32} un ensemble $P \subset V$ de puissance $2^{\aleph_0}$ et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de P est non mesurable (L), et d'autre part d'après la proposition C_6

¹⁾ W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIII, p. 195.

un ensemble $Q \subset V$ de puissance $2^{\aleph_0}$ et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de Q est de deuxième catégorie.

Il résulte de la proposition C_{65} qu'il existe une décomposition de tout ensemble de puissance du continu en une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles non dénombrables ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs: soit

$$(32) \quad P = \sum_{\xi < \varphi} P_{\xi}$$

une telle décomposition de l'ensemble P et

$$(33) \quad Q = \sum_{\xi < \varphi} Q_{\xi}$$

une telle décomposition de l'ensemble Q (φ désigne ici le premier nombre ordinal tel que $\bar{\varphi} = 2^{2^{\aleph_0}}$).

Posons maintenant

$$(34) \quad X_{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} [P_{\xi}(p_n) + Q_{\xi}(q_n)] \quad \text{pour } 1 < \xi < \varphi$$

et

$$(35) \quad X_1 = \left(X - \sum_{1 < \xi < \varphi} X_{\xi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_1(p_n) + Q_1(q_n)].$$

Nous aurons évidemment d'après (34) et (35)

$$(36) \quad \mathcal{G} = \sum_{\xi < \varphi} \mathcal{G} X_{\xi}$$

Or, nous allons montrer que la décomposition (36) de l'intervalle $\mathcal{G}$ satisfait à la proposition à démontrer.

Soient ξ et $\eta \neq \xi$ deux indices donnés inférieurs à φ . Il vient d'après les propriétés des décompositions (32) et (33):

$$(37) \quad \overline{P_{\xi} P_{\eta}} \leq \aleph_0 \quad \text{et} \quad \overline{Q_{\xi} Q_{\eta}} \leq \aleph_0.$$

Comme $P \subset V$ et $Q \subset V$, on a évidemment d'après (32) et (33) $P_{\xi} \subset E$ et $Q_{\eta} \subset E$, donc

$$(38) \quad P_{\xi}(r_n) \subset V(r_n) \quad \text{et} \quad Q_{\eta}(r_n) \subset V(r_n) \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

et par suite, d'après (28), les termes des suites (30) et (31) étant des termes différents de la suite (27):

$$[P_{\xi}(p_i) + Q_{\xi}(q_i)] \cdot [P_{\eta}(p_j) + Q_{\eta}(q_j)] = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$

ce qui donne selon (34) et (35)

$$X_{\xi} X_{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} [P_{\xi}(p_n) + Q_{\xi}(q_n)] \cdot [P_{\eta}(p_n) + Q_{\eta}(q_n)].$$

Il en résulte sans peine en vertu des inégalités $p_n \neq q_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) et d'après (38) et (28) que

$$(39) \quad X_{\xi} X_{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} [P_{\xi}(p_n) P_{\eta}(p_n) + Q_{\xi}(q_n) Q_{\eta}(q_n)].$$

Or, on a selon (37)

$$\overline{P_{\xi}(p_n) P_{\eta}(p_n)} \leq \aleph_0 \quad \text{et} \quad \overline{Q_{\xi}(q_n) Q_{\eta}(q_n)} \leq \aleph_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

La formule (39) donne donc

$$\overline{X_{\xi} X_{\eta}} \leq \aleph_0 \quad \text{pour } \xi \neq \eta.$$

Nous avons ainsi démontré que les termes de la série (36) ont deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.

Soit $\xi < \varphi$ un indice donné. L'ensemble P_{ξ} , en tant que sous-ensemble non dénombrable de P , est de mesure extérieure positive. Les nombres (30) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte sans peine que le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_{\xi}(p_n)$ est de mesure intérieure nulle¹⁾.

¹⁾ En effet, on démontre sans peine le théorème suivant:

Etant donné un ensemble linéaire T de mesure extérieure positive et une suite infinie $p_1, p_2, p_3, \dots$ de nombres réels, dense dans tout intervalle, le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} T(p_n)$ est de mesure intérieure nulle.

Or, l'ensemble Q_ξ , en tant que sous-ensemble non dénombrable de Q , est de deuxième catégorie. Les nombres (31) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi(q_n)$ est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

On en conclut tout de suite selon (34) et (35) que les ensembles X_ξ ($\xi < \varphi$) sont de deuxième catégorie dans tout intervalle et que leurs complémentaires sont de mesure intérieure nulle, c. q. f. d.

Proposition C_{68} ¹⁾. *Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble K de première catégorie que chaque translation le long de la droite transforme en lui-même, abstraction faite tout au plus d'une infinité dénombrable de points.*

Démonstration. Admettons l'hypothèse H et soit

$$(40) \quad x_1 = 0, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels.

Soit Q un ensemble linéaire de *mesure nulle* ne contenant pas le nombre 0 et tel que son complémentaire CQ soit de *première catégorie*. Désignons d'une façon générale par $Q(a)$ la translation de l'ensemble Q de longueur a , c. à d. l'ensemble de tous les nombres réels $x + a$ où $x \in Q$.

Nous allons d'abord définir par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$, où $\alpha < \Omega$, comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Etant donné un α ordinal compris entre 1 et Ω , désignons par Q_α la somme de tous les ensembles

$$Q(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n}),$$

où $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombre ordinaux $< \alpha$. Comme $\alpha < \Omega$, l'ensemble de telles suites est évidemment au plus dénombrable. Or, $Q(a)$ étant pour tout a réel un ensemble de mesure nulle, il en est de même pour tout $\alpha < \Omega$ de l'ensemble Q_α , qui est par définition une somme d'un nombre

fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de *mesure nulle*. En désignant donc par P_α l'ensemble de tous les points p_ξ où $\xi < \alpha$ (c. à d. un ensemble au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$), la somme $S_\alpha = P_\alpha + Q_\alpha$ constitue encore un ensemble de mesure nulle. Il existe par conséquent, dans la suite (40) de tous les nombres réels, des nombres n'appartenant pas à S_α et c'est le premier de ces nombres que nous désignerons par p_α .

La suite transfinie

$$(41) \quad p_1 = 0, p_2, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

se trouve ainsi définie et il est évident que tous les termes de cette suite sont distincts.

Ceci établi, désignons par K l'ensemble formé de p_1 et de tous les nombres de la forme

$$(42) \quad p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n},$$

où $1 < \alpha < \Omega$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux $< \alpha$. Comme $x_1 = 0$, l'ensemble K ainsi défini contient évidemment tous les points p_α où $\alpha < \Omega$. Par conséquent il est indénombrable. Or, nous allons montrer que

$$(43) \quad K \cdot Q = 0.$$

A ce but supposons, par contre, qu'il existe un point $p \in K \cdot Q$. On a $p \neq p_1$, puisque $p_1 = x_1 = 0$ et le point 0 n'appartient pas à Q . Comme appartenant à K , le nombre p serait donc de la forme (42), d'où, en tenant compte que $p \in Q$, on tire aussitôt $p_\alpha \in Q(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n})$ et par conséquent $p_\alpha \in Q_\alpha \subset S_\alpha$, contrairement à la définition de la suite (41).

L'égalité (43) est ainsi établie. Elle revient à dire que K est situé dans CQ , qui est par hypothèse de première catégorie. L'ensemble K est donc lui-même de *première catégorie*.

Considérons enfin les translations de K . Soit a un nombre réel quelconque. C'est donc un terme de la suite (40). Il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $a = x_\lambda$. Etant

¹⁾ W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 22. Cf. S. Banach, *ibid.*, p. 15.

donné un point arbitraire $p \in K(a) - K$, on a selon la définition de K d'une part

$$(44) \quad p = p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n} + x_\lambda,$$

puisque $p \in K(a)$ et d'autre part $\alpha \leq \lambda$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à K .

Il est ainsi démontré que chaque point p de l'ensemble $K(a) - K$ est de la forme (44) où $\alpha \leq \lambda$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$. Or, l'ensemble de tous les nombres p de ce genre pour $a = x_\lambda$ fixe est évidemment au plus dénombrable, c. q. f. d.

L'implication $H \rightarrow C_{08}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer qu'en remplaçant partout dans la démonstration qui précède les termes *première catégorie* par *mesure nulle* et inversement, on transforme cette démonstration en celle de la proposition suivante, qui est donc avec C_{08} en relation de dualité:

Proposition C_{09} . *Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble M de mesure nulle que chaque translation transforme en lui-même, si l'on en néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

Ajoutons qu'on peut démontrer le théorème suivant:

Etant donné un ensemble mesurable (linéaire) M qui se transforme par chaque translation en lui-même, si l'on en néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$, soit M , soit le complémentaire de M est un ensemble de mesure nulle.

Ce théorème résulte sans peine de la propriété d'ensembles de mesure positive de contenir des points de densité.

Théorème 6¹⁾. *Il existe un ensemble linéaire N de puissance $2^{\aleph_0}$, non mesurable et tel que chaque translation le transforme en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. Soient φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et

¹⁾ W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 24.

$$(45) \quad x_1 = 0, x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels. La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ :

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_\omega, P_{\omega+1}, \dots, P_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Nous allons d'abord définir par l'induction transfinie deux suites $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ du type φ .

Soient à ce but p_1 le premier terme de la suite (45) qui appartient à P_1 et q_1 le premier terme de la même suite qui appartient à P_1 , mais qui est distinct de p_1 . Etant donné un α ordinal quelconque compris entre 1 et φ , désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$q_\xi - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n}$$

où $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux inférieurs à α . L'ensemble S_α est évidemment de puissance $\leq \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3 + \dots$, donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha < \varphi$, d'où $\bar{\alpha} < 2^{\aleph_0}$. L'ensemble parfait P_α étant (comme parfait) de puissance du continu, l'ensemble $P_\alpha - S_\alpha$ n'est pas vide et c'est le premier terme de la suite (45) appartenant à $P_\alpha - S_\alpha$ que nous désignerons par p_α . Désignons, d'autre part, par T_α l'ensemble de tous les nombres réels de la forme

$$p_\xi + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n}$$

où $\xi \leq \alpha$ et les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont $< \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, on voit sans peine que $\bar{T}_\alpha < 2^{\aleph_0}$, de sorte que l'ensemble $P_\alpha - T_\alpha$ n'est pas vide; c'est le premier terme de la suite (45) appartenant à $P_\alpha - T_\alpha$ que nous désignerons par q_α .

Les suites transfinies $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ étant ainsi définies, soient N l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n}$$

où $\alpha < \varphi$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et Q l'ensemble de tous les points q_α où $\alpha < \varphi$. Nous allons prouver que

$$(46) \quad N \cdot Q = 0.$$

Supposons, par contre, qu'il existe un nombre $p \in N \cdot Q$. Comme $p \in N$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$ et une suite finie de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ inférieurs à α , tels que

$$(47) \quad p = p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n}.$$

D'autre part, comme $p \in Q$, il existerait un nombre ordinal $\beta < \varphi$ tel que

$$(48) \quad p = q_\beta$$

et on aurait par définition $q_\beta \text{ non-} \in T_\beta$; or, pour $\alpha \leq \beta$ on a selon la définition de T_β la relation $p \in T_\beta$, de sorte qu'on obtiendrait dans ce cas $p \neq q_\beta$, contrairement à (45); enfin, pour $\alpha > \beta$ on a d'après la définition de p_α la relation $p_\alpha \text{ non-} \in S_\alpha$ et comme la définition de S_α entraîne la relation $q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n} \in S_\alpha$, il vient $p_\alpha \neq q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n}$, contrairement à (47) et (48).

L'égalité (46) est ainsi établie. Comme la définition de l'ensemble N et celles de $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ entraînent respectivement que $p_\alpha \in N$, $p_\alpha \in P_\alpha$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour tout $\alpha < \varphi$, il vient $P_\alpha N \neq 0 \neq P_\alpha Q$ pour $\alpha < \varphi$, de sorte que chacun des ensembles N et Q admet des points communs avec tout ensemble parfait. Or, les deux ensembles en question étant selon (46) disjoints, il en résulte qu'ils sont de puissance du continu, non mesurables et partout de deuxième catégorie.

Considérons enfin les translations de N . Soit a un nombre réel arbitraire. C'est donc un terme de la suite (45). Il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \varphi$ tel que $a = x_\lambda$. En désignant d'une façon générale par $N(a)$ l'image de la translation de N de longueur a , soit p un point quelconque $p \in N(a) - N$.

Comme $p \in N(a)$, on a alors selon la définition de N d'une part:

$$(49) \quad p = q_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n} + x_\lambda,$$

où $\alpha < \varphi$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et, d'autre part, $\lambda \leq \alpha$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à N .

Il est ainsi démontré que chaque point de l'ensemble $N(a) - N$ est de la forme (49) où $\lambda \leq \alpha$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont des nombres ordinaux $< \alpha$. Or, l'ensemble de tous les nombres p de ce genre est évidemment de puissance $\leq \aleph_0 + \bar{\lambda}$, donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$, puisque $\lambda < \varphi$ et $\bar{\varphi} < 2^{\aleph_0}$.

Proposition C_{70} . *Il existe un ensemble linéaire non mesurable que chaque translation transforme en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

L'implication $H \rightarrow C_{70}$ est une conclusion immédiate du théorème 6, qui vient d'être établi.

Signalons l'application suivante de la proposition C_{70} .

Etant donnée une fonction $f(x)$ de variable réelle, appelons *presque-période* de $f(x)$ tout nombre réel a qui satisfait à l'équation $f(x+a) = f(x)$ pour toutes les valeurs de $x \in \mathcal{E}$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable¹⁾. En désignant alors par $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble N assujetti aux conditions de la proposition C_{70} , cette dernière peut s'exprimer comme il suit:

Proposition C_{70}^a . *Il existe parmi les fonctions d'une variable réelle une fonction non mesurable telle que chaque nombre réel est sa presque-période.*

§ 6. Images par fonctions de Baire. Conséquences $C_{71} - C_{74}$ de l'hypothèse H .

Proposition C_{71} . *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ et Φ une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ de fonctions mesurables d'une variable réelle, il existe un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que pour toute fonction $\varphi(x)$ de la*

¹⁾ Dans ma Note de *Fund. Math.* XIX, p. 27, j'ai donné une autre définition de la *presque-période*; elle coïncide avec celle qui est adoptée ici dans le cas où l'hypothèse H est vraie.

famille Φ l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F^1).

Démonstration. Les familles F et Φ étant de la puissance $2^{\aleph_0}$, donc d'après l'hypothèse H de la puissance $\aleph_1$, il existe (en vertu de l'égalité $\aleph_1^2 = \aleph_1$) une suite transfinie du type Ω d'ensembles de la famille F :

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

et une suite transfinie du type Ω de fonctions de la famille Φ :

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots \quad (\xi < \Omega)$$

telles que pour tout ensemble $M \in F$ et pour toute fonction $\varphi \in \Phi$ il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ pour lequel $M = E_\alpha$ et $\varphi(x) = f_\alpha(x)$.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie du type Ω d'ensembles de mesure nulle

$$(50) \quad N_1, N_2, N_3, \dots, N_\omega, N_{\omega+1}, \dots, N_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

et une suite transfinie du type Ω de nombres réels

$$(51) \quad p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega).$$

Pour définir l'ensemble N_1 distinguons deux cas:

1) $E_1 - f_1(\mathcal{C}) \neq 0$. Nous poserons dans ce cas $N_1 = 0$.

2) $E_1 \subset f_1(\mathcal{C})$. Les ensembles $Q(a) = \bigcup_x [f_1(x) = a]$ qui viennent correspondre aux différents nombres a de E_1 sont disjoints et mesurables, puisque $f_1(x)$ est une fonction mesurable. L'ensemble E_1 étant indénombrable et contenu dans $f_1(X)$, il existe un nombre $a_1 \in E_1$ tel que $Q(a_1)$ est un ensemble non vide de mesure nulle. Nous poserons alors $N_1 = Q(a_1)$.

Le nombre p_1 sera défini dans le cas 1) aussi bien que dans le cas 2) comme un nombre réel arbitraire n'appartenant pas à N_1 .

Etant donné un nombre ordinal α tel que $1 < \alpha < \Omega$, distinguons encore deux cas:

¹⁾ W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 205 et p. 210.

1) Si $E_\alpha - f_\alpha(\mathcal{C}) \neq 0$, posons $N_\alpha = 0$.

2) Si $E_\alpha \subset f_\alpha(\mathcal{C})$, nous concluons comme plus haut qu'il existe une infinité indénombrable de nombres a de E_α tels que $\bigcup_x [f_\alpha(x) = a]$ est un ensemble non vide de mesure nulle. Les ensembles $\bigcup_x [f_\alpha(x) = a]$ qui viennent correspondre aux nombres a différents étant disjoints deux à deux, on voit sans peine qu'il existe un nombre $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que l'ensemble $\bigcup_x [f_\alpha(x) = a_\alpha]$ est non vide, de mesure nulle et ne contient aucun nombre p_ξ où $\xi < \alpha$ (l'ensemble de ces derniers étant au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$). Nous poserons alors

$$(52) \quad N_\alpha = \bigcup_x [f_\alpha(x) = a_\alpha].$$

Enfin, les ensembles N_ξ ($\xi < \alpha$) étant de mesure nulle, il en est de même de leur somme (puisque $\alpha < \Omega$), ainsi que de l'ensemble $S_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} N_\xi + \sum_{\xi < \alpha} (p_\xi)$. Il existe donc un nombre p_α non- $\in S_\alpha$.

Ainsi les ensembles (50) et les nombres (51) se trouvent définis par l'induction transfinie.

Or, soit E l'ensemble de tous les nombres de la suite (51): c'est un ensemble de puissance $\aleph_1$, donc d'après l'hypothèse H de puissance $2^{\aleph_0}$, puisqu'on a p_α non- $\in S_\alpha$ pour $1 < \alpha < \Omega$, d'où selon la définition de l'ensemble S_α l'inégalité $p_\alpha \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$.

Supposons que l'on ait $f_\alpha(E) \supset E_\alpha$ pour un nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

De la définition des suites (50) et (51) résulte tout de suite que p_ξ non- $\in N_\eta$ pour $\xi < \eta$ et $\eta < \Omega$. Il vient donc

$$(53) \quad E N_\alpha = 0.$$

Or, l'hypothèse que $f_\alpha(E) = E_\alpha$ entraîne que $E_\alpha \subset f_\alpha(E) \subset f_\alpha(\mathcal{C})$, puisque $E \subset \mathcal{C}$. D'après la définition de l'ensemble N_α on a donc la formule (52). Mais la définition du nombre a_α donne $a_\alpha \in E_\alpha$; comme $E_\alpha \subset f_\alpha(E)$, il existe donc un nombre x_0 de E tel que $a_\alpha = f_\alpha(x_0)$, ce qui entraîne d'après (52) la relation $x_0 \in N_\alpha$, contraire à (53).

Il est ainsi démontré que l'on a $E_\alpha - f_\alpha(E) \neq 0$ pour $\alpha < \Omega$. L'ensemble E satisfait donc aux conditions de la proposition C_{71} , de sorte que l'implication $H \rightarrow C_{71}$ se trouve établie.

Il est à remarquer que la proposition C_{71} cesse d'être vraie (si l'on admet l'hypothèse H) pour les familles Φ , même dénombrables, de fonctions quelconques d'une variable réelle et même dans le cas où la famille F est formée d'un seul ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels. C'est une conséquence immédiate de la proposition P_3 (Chap. I, p. 12).

La famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle ayant la puissance du continu et toute fonction de Baire étant mesurable, on déduit tout de suite de la proposition C_{71} cette

Proposition C_{72} . *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que pour toute fonction de Baire $\varphi(x)$ d'une variable réelle l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F .*

La proposition C_{72} peut être aussi exprimée comme il suit:

Proposition C_{72}^a . *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe toujours un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ dont les images obtenues par des fonctions de Baire définies dans E ne contiennent aucun ensemble de la famille F .*

En effet, soient F une famille donnée de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires et E un ensemble linéaire satisfaisant à la proposition C_{72} . Etant donnée une fonction de Baire $f(x)$ définie dans E , il existe, comme on sait, une fonction de Baire $\varphi(x)$ d'une variable réelle, telle que l'on ait $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \in E$. D'après la proposition C_{72} il vient $Q - f(E) \neq 0$ pour $Q \in F$. Or, on a évidemment $\varphi(E) = f(E)$, d'où $Q - \varphi(E) \neq 0$ pour $Q \in F$, ce qui prouve que l'ensemble E satisfait à la proposition C_{72}^a .

Il est à remarquer qu'un cas particulier très spécial de la proposition C_{72}^a est donné par la proposition C_5 (voir Chap. II, p. 51).

Nous allons déduire une conséquence de la proposition C_{72}^a . Soit ω_2 le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_2$. Considérons la suite transfinie du type ω_2 d'ensembles linéaires E_α ($\alpha < \omega_2$) définie par l'induction transfinie comme il suit.

Soit $E_1 = \mathcal{C}$. Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et ω_2 , soit F_α la famille de tous les ensembles E_ξ où $\xi < \alpha$. En vertu de l'hypothèse H la puissance $\overline{\alpha} \leq \aleph_1$ de la famille F_α est donc $\leq 2^{\aleph_0}$. En désignant par Φ_α la famille de tous les ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ qui sont des images des ensembles de F_α données par fonctions de Baire, il vient aussi $\overline{\Phi_\alpha} \leq 2^{\aleph_0}$, puisque tout ensemble linéaire admet $\leq 2^{\aleph_0}$ images par fonctions de Baire. En vertu de la proposition C_{72}^a il existe donc un ensemble linéaire E_α de puissance $2^{\aleph_0}$ dont toutes les images par fonctions de Baire sont distinctes de tous les ensembles de la famille Φ_α . La suite transfinie d'ensembles E_α ($\alpha < \omega_2$) est ainsi définie.

Or, nous allons montrer que des deux termes différents de cette suite aucun n'est une image par fonction de Baire d'aucun autre.

En effet, soient α et $\beta > \alpha$ deux nombres ordinaux $< \omega_2$. Comme $\alpha < \beta$, on conclut aussitôt de la définition de l'ensemble E_β que E_α n'est pas une image par fonction de Baire de E_β . D'autre part, E_β ne peut être une telle image de E_α , puisqu'on aurait dans ce cas $E_\beta \in \Phi_\alpha$, contrairement à la définition de E_β .

On aboutit ainsi à la proposition suivante:

Proposition C_{73} . *Il existe une famille F formée de $\aleph_2$ ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ et telle que des deux ensembles distincts quelconques de cette famille aucun ne s'obtient par une fonction de Baire comme une image de l'autre.*

On voit en outre qu'aucun ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ n'est une image par fonction de Baire de deux ensembles distincts de la famille F .

M. A. Lindenbaum a déduit récemment de l'hypothèse H le théorème suivant ¹⁾:

Etant donnée une famille quelconque F de puissance $2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ dont aucun ne s'obtient comme image d'aucun autre par aucune fonction appartenant à la famille F .

Φ étant une famille quelconque d'ensembles linéaires, désignons par $\mathcal{V}(\Phi)$ la famille de toutes les images des ensembles de la famille Φ qui s'en obtiennent par des fonctions de Baire. La famille $\mathcal{V}(\Phi)$ jouit évidemment de la propriété suivante: toute image par fonction de Baire d'un ensemble de la famille $\mathcal{V}(\Phi)$ appartient encore à cette famille. Le famille $\mathcal{V}(\Phi)$ constitue donc un invariant envers les transformations par fonctions de Baire.

Or, considérons une famille d'ensembles F satisfaisant à la proposition C_{73} . Soient Φ_1 et Φ_2 deux sous-familles de F et admettons que $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Il existe par conséquent un ensemble $E \in F$ qui appartient à l'une des familles Φ_1 et Φ_2 , sans appartenir à l'autre. Soit donc $E \in \Phi_1$ et $E \text{ non-} \in \Phi_2$. En vertu de la proposition C_{73} la première de ces relations donne aussitôt $E \in \mathcal{V}(\Phi_1)$ et la deuxième $E \text{ non-} \in \mathcal{V}(\Phi_2)$.

L'inégalité $\Phi_1 \neq \Phi_2$ entraîne donc l'inégalité $\mathcal{V}(\Phi_1) \neq \mathcal{V}(\Phi_2)$, de sorte que les familles $\mathcal{V}(\Phi)$ qui viennent correspondre aux différentes sous-familles Φ de F sont différentes elles-mêmes. Comme $\bar{F} = \aleph_2$, leur ensemble est de la puissance $2^{\aleph_2}$. Comme chaque famille $\mathcal{V}(\Phi)$ est un invariant des transformations par fonctions de Baire, on arrive à cette

Proposition C_{74} . *Il existe une classe de puissance $2^{\aleph_2}$ formée de familles différentes d'ensembles linéaires et dont chacune est invariante envers les transformations par fonctions de Baire.*

¹⁾ à paraître dans *Fund. Math.* XXII, 1934.

Il est à remarquer qu'en admettant au lieu de H l'hypothèse (peut-être plus forte) que $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, on tire de C_{74} aussitôt la proposition suivante:

La classe de toutes les familles d'ensembles linéaires, invariantes envers les transformations par fonctions de Baire, est de la puissance $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.

§ 7. Ensemble ordonné universel. Conséquences C_{75} et C_{76} de H .

Lemme 1. *Soit U l'ensemble de toutes les suites transfinies A du type Ω*

$$(54) \quad a_1, a_2, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\xi, a_{\xi+1}, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

ayant pour éléments a_ξ les nombres 0 ou 1 et telles qu'il existe un $\lambda < \Omega$ pour lequel on ait $a_\lambda = 1$ et $a_\xi = 0$, si $\xi > \lambda$. Supposons l'ensemble U ordonné selon le principe de premières différences.

Dans ces hypothèses, il existe pour chaque suite infinie $A_1, A_2, \dots$ d'éléments de U deux éléments B et C de U tels que l'on a $B \prec A_n \prec C$ pour $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. Soit $A_n = \{a_\xi^n\}_{\xi < \Omega}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Comme $A_n \in U$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, il existe selon la définition de U pour tout n naturel un indice $\lambda_n < \Omega$ tel que l'on ait $a_{\lambda_n}^n = 1$ et $a_\xi^n = 0$, si $\lambda_n < \xi < \Omega$. Considérons un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $\lambda > \lambda_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Un tel nombre λ existe, puisqu'on a $\lambda_n < \Omega$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Posons

$$b_\xi = 0 \quad \text{pour } \xi \neq \lambda \quad \text{et} \quad b_\lambda = 1,$$

$$c_\xi = 1 \quad \text{pour } \xi \leq \lambda \quad \text{et} \quad c_\xi = 0 \quad \text{pour } \xi > \lambda.$$

Soient $B = \{b_\xi\}_{\xi < \Omega}$ et $C = \{c_\xi\}_{\xi < \Omega}$. Etant donné un n naturel quelconque, nous aurons évidemment $b_\xi = 0 \leq a_\xi^n$ pour $\xi < \lambda$ et $b_{\lambda_n} = 0 < 1 = a_{\lambda_n}^n$, puisque $\lambda_n < \lambda$. Il en résulte que $B \prec A_n$.

D'autre part $a_\xi^n \leq 1 = c_\xi$ pour $\xi < \lambda$ et $a_\lambda^n = 0 < 1 = c_\lambda$. Il en résulte que $A_n \prec C$, c. q. f. d.

¹⁾ Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XVI.

Lemme 2. *Dans les mêmes hypothèses, étant données deux suites infinies $A_1, A_2, A_3, \dots$ et $B_1, B_2, B_3, \dots$ d'éléments de U telles que l'on ait $A_k \leq B_l$ pour k et l naturels, il existe toujours un élément C de U tel que $A_n \leq C \leq B_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$*

Démonstration. Soit $A_n = \{a_\xi^n\}_{\xi < \Omega}$ et $B_n = \{b_\xi^n\}_{\xi < \Omega}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Nous définirons une suite transfinie auxiliaire $\{u_\xi\}_{\xi < \Omega}$ comme il suit. Posons $u_1 = 1$, s'il existe un n naturel tel que $a_1^n = 1$, et $u_1 = 0$, si l'on a $a_1^n = 0$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Étant donné un nombre ordinal ξ compris entre 1 et Ω , posons $u_\xi = 1$, s'il existe un n naturel tel que l'on ait $a_\eta^n = u_\eta$ pour $\eta < \xi$ et si $a_\xi^n = 1$; enfin, nous poserons $u_\xi = 0$ dans le cas contraire.

La suite $\{u_\xi\}_{\xi < \Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie. Elle n'appartient pas nécessairement à U , mais toutes les suites A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) appartenant à U , on voit sans peine (d'après la définition de U) qu'il existe un indice $\lambda < \Omega$ tel que l'on ait $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$.

En effet, comme $A_n \in U$, il existe pour tout n naturel un nombre ordinal $\lambda_n < \Omega$ tel que $a_\xi^n = 0$ pour $\lambda_n < \xi < \Omega$. Or, il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $\lambda > \lambda_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et il est évident que l'on a $a_\xi^n = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \dots$, d'où $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$. De même, comme $B_n \in U$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on voit sans peine qu'il existe un indice $\mu < \Omega$ tel que l'on ait $b_\xi^n = 0$ pour $\mu \leq \xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \dots$. Nous pouvons admettre toujours que $\mu > \lambda$.

Posons maintenant $c_\xi = u_\xi$ pour $\xi \neq \mu$ et $c_\mu = 1$; comme $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$ et comme $\mu < \lambda$, on a $c_\xi = 0$ pour $\mu < \xi < \Omega$ et on voit que la suite transfinie $C = \{c_\xi\}_{\xi < \Omega}$ appartient à U . Reste à montrer que $A_n \leq C \leq B_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

Soit à ce but n un nombre naturel donné.

Dans le cas où $A_n \neq \{u_\xi\}_{\xi < \Omega}$, il existe un plus petit nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que $a_\gamma^n \neq u_\gamma$. On a donc $a_\xi^n = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$. Il en résulte tout de suite, en tenant compte de la définition du nombre u_γ et de l'inégalité $a_\gamma^n \neq u_\gamma$, que $a_\gamma^n = 0$ et $u_\gamma = 1$ (puisque en supposant que $a_\gamma^n = 1$, on aurait $u_\gamma = 1$, donc $a_\gamma^n = u_\gamma$). Vu la défini-

tion de la suite C , on trouve donc $a_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^n < c_\gamma$ (puisque l'inégalité $\gamma \neq \mu$ entraînerait $c_\gamma = u_\gamma > a_\gamma^n$ et $\gamma = \mu$ donnerait $a_\gamma^n = 0 < 1 = c_\gamma$). Par conséquent $A_n \leq C$. Dans le cas où $A_n = \{u_\xi\}_{\xi < \Omega}$, on a selon la définition de la suite C l'égalité $a_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \mu$ et $a_\mu^n = u_\mu = 0 < c_\mu = 1$, d'où encore $A_n \leq C$.

Or, si n est un nombre naturel, on ne peut pas avoir $B_n = C$, puisque $b_\mu^n = 0$ et $c_\mu = 1$. Admettons donc que l'on a $B_n \leq C$ pour un indice n : il existe par conséquent un nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que $b_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \gamma$, $b_\gamma^n = 0$ et $c_\gamma = 1$; il en résulte que $\gamma \leq \mu$, puisqu'on a $c_\xi = 0$ pour $\mu < \xi < \Omega$, donc (d'après la définition de la suite C) que $b_\xi^n = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$.

Si $\gamma < \mu$, on a $b_\xi^n = c_\xi = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $u_\gamma = c_\gamma = 1$. Vu la définition du nombre u_γ , il existe donc un indice m tel que $a_\xi^m = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^m = 1$. Par conséquent $a_\xi^m = c_\xi = b_\xi^n$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^m = 1 > 0 = b_\gamma^n$, d'où $B_n \leq A_m$, contrairement à l'hypothèse.

On a donc $\gamma = \mu$. Comme $B_n \in U$, il existe par conséquent un indice $\delta < \Omega$ tel que $b_\delta^n = 1$ et $b_\xi^n = 0$ pour $\delta < \xi < \Omega$. Comme $b_\xi^n = 0$ pour $\mu \leq \xi < \Omega$, il vient $\delta < \mu$.

On a donc $b_\xi^n = c_\xi = u_\xi$ pour $\xi < \gamma = \mu$ et $u_\delta = b_\delta^n = 1$. Vu la définition du nombre u_δ , il existe en conséquence un indice k tel que $a_\xi^k = u_\xi$ pour $\xi < \delta$ et $a_\delta^k = 1$. Comme $\delta < \mu$, on obtient donc $a_\xi^k = b_\xi^n$ pour $\xi < \delta$, $a_\delta^k = 1 = b_\delta^n$ et $a_\xi^k \geq 0 = b_\xi^n$ pour $\delta < \xi < \Omega$, contrairement à la relation $A_k \leq B_n$.

Notre hypothèse qu'on ait $B_n \leq C$ pour un indice n est donc impossible. On a par suite $C \leq B_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, c. q. f. d.

Théorème 7. *Il existe un ensemble ordonné U de puissance du continu et tel que tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_1$ est semblable (au sens d'ordre) à un sous-ensemble de U .*

Démonstration. Soit U l'ensemble ordonné de suites, défini dans l'énoncé du lemme 1, p. 141. Étant donné un nombre ordinal quelconque $\xi < \Omega$, désignons par U_ξ le sous-ensemble de U formé de toutes les suites (54) de U pour lesquelles on a $a_\eta = 0$, lorsque $\xi \leq \eta < \Omega$. On voit sans peine que $U = \sum_{\xi < \Omega} U_\xi$ et que $\overline{U}_\xi \leq 2^{\aleph_0}$ pour $\xi < \Omega$. Par conséquent $\overline{U} \leq \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

D'autre part, on voit sans peine que $\bar{U} \geq 2^{\aleph_0}$, puisque toutes les suites (54) dans lesquelles a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) est une suite infinie quelconque formée de nombres 0 ou 1, tandis que $a_\omega = 1$ et $a_\xi = 0$ pour $\omega < \xi < \Omega$, appartiennent évidemment à U . On a ainsi $\bar{U} = 2^{\aleph_0}$.

Ceci établi, soient

$$(55) \quad p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

un ensemble ordonné quelconque de puissance $\aleph_1$ et

$$(56) \quad A_1, A_2, A_3, \dots, A_\omega, A_{\omega+1}, \dots, A_\xi, \dots$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de U .

Posons $f(p_1) = A_1$ et, étant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω , définissons $f(p_\alpha)$, comme le premier terme de la suite (56) qui, pour tout indice $\xi < \alpha$, a les mêmes relations d'ordre dans U par rapport à $f(p_\xi)$ que p_α par rapport à p_ξ . On conclut aussitôt des lemmes 1 et 2 qu'un tel élément $f(p_\alpha)$ existe toujours dans la suite (56). Or, on voit sans peine que le sous-ensemble de U formé de tous les éléments de la suite $\{f(p_\xi)\}_{\xi < \Omega}$ ainsi définie est semblable à l'ensemble ordonné (55), c. q. f. d.

Proposition C_{75} . *Il existe un ensemble ordonné U de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que tout ensemble ordonné de puissance $2^{\aleph_0}$ est semblable à un sous-ensemble de U^1 .*

L'implication $H \rightarrow C_{75}$ est une conséquence immédiate du théorème 7, qui vient d'être établi.

Considérons à présent l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites infinies de nombres naturels et supposons-le ordonné de façon que deux suites $A = \{a_k\}$ et $B = \{b_k\}$ soient en relation $A < B$, lorsqu'il existe un i naturel tel que l'on ait $a_k < b_k$ pour tout $k \geq i$.

Théorème 8. *Étant donnée une suite infinie de suites des nombres naturels $A^{(1)} = \{a_k^{(1)}\}$, $A^{(2)} = \{a_k^{(2)}\}$, ..., $A^{(i)} = \{a_k^{(i)}\}$, ..., il existe une*

¹⁾ W. Sierpiński, *Fund. Math.* XVIII, p. 280; cf. aussi F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 181 et 182.

suite infinie de nombres naturels $B = \{b_k\}$ telle que l'on a $A^{(i)} < B$ pour tout $i = 1, 2, \dots$

Démonstration. Il suffit de poser pour tout $k = 1, 2, \dots$

$$b_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \dots + a_k^{(k)} + 1,$$

pour avoir $b_k > a_k^{(i)}$ à partir de $k \geq i$, où i est un nombre naturel arbitrairement donné à l'avance. Par conséquent $A^{(i)} < B$ pour $i = 1, 2, \dots$, c. q. f. d.

Proposition C_{76} . *En convenant pour deux suites infinies de nombres naturels $A = \{a_k\}$ et $B = \{b_k\}$ d'écrire $A < B$, lorsqu'il existe un i naturel tel que $a_k < b_k$ pour $k \geq i$, l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites infinies de nombres naturels contient un ensemble S de $2^{\aleph_0}$ suites, bien ordonné d'après la relation $<$ et ayant la propriété suivante: étant donnée une suite infinie quelconque A (appartenant ou non à S) de nombres naturels, il se trouve dans S une suite B telle que $A < B$.*

Démonstration. Admettons l'hypothèse H . L'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites infinies de nombres naturels ayant la puissance $2^{\aleph_0}$, donc $\aleph_1$ d'après H , il existe une suite transfinie du type Ω

$$(54) \quad A_1, A_2, A_3, \dots, A_\omega, A_{\omega+1}, \dots, A_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les suites distinctes de $\mathcal{S}$.

Nous définirons par l'induction une suite transfinie de nombres ordinaux $\alpha_\xi < \Omega$ (où $\xi < \Omega$) comme il suit.

Posons $\alpha_1 = 1$. Étant donné un nombre ordinal γ tel que $1 < \gamma < \Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux α_ξ où $\xi < \gamma$ est donc au plus dénombrable. Il existe alors, comme on sait, des nombres ordinaux λ tels que l'on ait $\gamma < \lambda < \Omega$ et $\alpha_\xi < \lambda$ pour tout $\xi < \gamma$. Soit λ_γ le plus petit parmi les nombres de ce genre. D'autre part, l'ensemble de toutes les suites A_ξ où $\xi < \lambda_\gamma$ étant au plus dénombrable (puisque $\lambda_\gamma < \Omega$), il existe en vertu du théorème 8 une suite $B \in \mathcal{S}$ telle que l'on ait $A_\xi < B$ pour tout $\xi < \lambda_\gamma$. C'est le premier indice avec lequel un tel B figure parmi les termes de la suite transfinie (54) qui est à désigner par α_γ .

La suite transfinie de nombres ordinaux α_ξ ($\xi < \Omega$) est ainsi définie par l'induction transfinie et on a $A_{\alpha_\xi} < A_{\alpha_\gamma}$ pour $\xi < \gamma < \Omega$.

Or, soit S l'ensemble de toutes les suites A_{α_ξ} où $\xi < \Omega$. L'ensemble S est donc de puissance $\aleph_1$ et par suite (en vertu de l'hypothèse H) de puissance $2^{\aleph_0}$. En même temps, il est bien ordonné selon la relation $<$. Enfin, étant donnée une suite infinie quelconque A de nombres naturels, donc un terme $A = A_\gamma$ de la suite transfinie (54), il vient $\gamma < \lambda_\gamma \leq \alpha_\gamma < \Omega$ et $A_\gamma < A_{\alpha_\gamma}$, d'où $A < B$ où $B = A_{\alpha_\gamma}$ appartient par définition à l'ensemble S . Cet ensemble satisfait donc à la proposition C_{76} , c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en s'appuyant sur le théorème 8, on peut établir, sans faire appel à l'hypothèse H , l'existence d'un ensemble indénombrable S (de puissance $\aleph_1$) de suites infinies de nombres naturels, bien ordonné d'après la relation $<$ ¹⁾. Si l'on envisage les suites de cet ensemble comme points de l'espace (topologique métrisable) à 0 dimensions de Baire, l'espace S jouit de la propriété λ ²⁾, dont il a été question au Chap. III, § 3, p. 94.

§ 8. Complémentaires d'ensembles analytiques. Conséquences C_{77} et C_{78} de l'hypothèse H .

Proposition C_{77} . *Φ étant une famille quelconque de puissance du continu d'ensembles indénombrables (formés d'éléments arbitraires), il existe dans chaque ensemble indénombrable N un sous-ensemble indénombrable N_0 qui ne contient aucun ensemble de la famille Φ .*

Démonstration. Il existe en vertu de l'hypothèse H une suite transfinie $\{E_\xi\}_{\xi < \Omega}$ du type Ω formée de tous les ensembles de la famille Φ . Or, l'ensemble N étant indénombrable, il existe une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi < \Omega}$ du type Ω dont les termes sont des éléments distincts de l'ensemble N .

Nous allons définir par induction deux suites transfinies: une suite $\{r_\xi\}_{\xi < \Omega}$, où $r_\xi \in E_\xi$ pour $\xi < \Omega$, et une suite $\{s_\xi\}_{\xi < \Omega}$, où $s_\xi \in N$.

Soient à ce but r_1 un élément quelconque de E_1 et s_1 le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi < \Omega}$ qui est distinct de r_1 . Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω , nous définirons r_α comme un élément de E_α qui est distinct de tous les éléments s_ξ où $\xi < \alpha$ (un tel élément r_α existe dans E_α , puisque l'ensemble E_α est indénombrable, tandis que l'ensemble de tous les éléments s_ξ où $\xi < \alpha < \Omega$ est au plus dénombrable) et nous désignerons par s_α le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi < \Omega}$ qui est distinct de tous les éléments r_ξ où $\xi \leq \alpha$.

Or, nous allons montrer que l'ensemble N_0 de tous les termes de la suite transfinie $\{s_\xi\}_{\xi < \Omega}$ satisfait à la proposition C_{77} .

En effet, étant donné un nombre ordinal quelconque $\lambda < \Omega$, la définition de l'élément r_λ implique que $r_\lambda \neq s_\xi$ où $\xi < \lambda$ et la définition des éléments s_α entraîne que $s_\alpha \neq r_\lambda$ pour $\lambda \leq \alpha$. On a donc $r_\lambda \neq s_\xi$ pour $\xi < \Omega$, d'où $r_\lambda \text{ non-} \in N_0$. D'autre part, $r_\lambda \in E_\lambda$ et par conséquent $E_\lambda - N_0 \neq \emptyset$. Le nombre ordinal $\lambda < \Omega$ étant arbitraire, on conclut que l'ensemble N_0 ne contient aucun ensemble E_λ où $\lambda < \Omega$, donc aucun ensemble de la famille Φ , c. q. f. d.

L'implication $H \rightarrow C_{77}$ est ainsi démontrée.

La famille de tous les complémentaires analytiques linéaires indénombrables étant, comme on sait, de puissance du continu, la proposition C_{77} entraîne immédiatement la conséquence suivante:

Proposition C_{78} . *Tout ensemble linéaire indénombrable admet un sous-ensemble indénombrable qui ne contient aucun complémentaire analytique indénombrable.*

Il est à remarquer que sans faire usage de l'hypothèse H , on montre facilement que *tout ensemble linéaire indénombrable admet un sous-ensemble indénombrable qui ne contient aucun ensemble analytique indénombrable.*

¹⁾ Ce résultat est dû à M. G. H. Hardy (voir A. Schoenflies, *Entwicklung der Mengenlehre*, Erste Hälfte, Leipzig 1913, p. 221).

²⁾ Voir N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 155 et C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 127—128.

Cependant, sans l'aide de l'hypothèse H , je ne sais pas établir non seulement la proposition C_{78} , mais même la proposition selon laquelle tout complémentaire analytique linéaire indénombrable contiendrait un sous-ensemble qui ne soit pas un complémentaire analytique (problème de M. N. Lusin).

§ 9. Propriétés J et J_c . Conséquence C_{79} de l'hypothèse H .

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété J* , si pour tout sous-ensemble *indénombrable* N de E il existe dans E un ensemble parfait P ayant avec N une infinité indénombrable de points communs. Lorsque des pareils ensembles parfaits P existent dans E pour tout sous-ensemble N de E de puissance du continu, nous dirons que E jouit de la *propriété J_c* . Si l'on admet l'hypothèse H , les deux propriétés en question sont donc équivalentes.

Théorème 9. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire jouisse de la propriété J_c est qu'il soit une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles fermés ¹⁾.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit, en effet, E un ensemble linéaire qui n'est pas une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles fermés. La famille de tous les ensembles fermés contenus dans E est évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$: il existe donc une suite transfinie du type φ

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_\omega, F_{\omega+1}, \dots, F_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les sous-ensembles fermés de E .

Parmi les ensembles

$$(55) \quad F_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} F_\xi \quad \text{où } \alpha < \varphi$$

il y a une infinité de puissance $2^{\aleph_0}$ qui sont non vides, puisque dans le cas contraire on aurait pour un $\mu < \varphi$

¹⁾ Voir W. Sierpiński, *Ann. Soc. Polonaise de Math.* VIII (1929), p. 323.

$$F_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} F_\xi = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \geq \mu,$$

ce qui donne, comme on voit sans peine,

$$E = \sum_{\alpha < \varphi} F_\alpha = \sum_{\alpha < \varphi} \left(F_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} F_\xi \right) = \sum_{\alpha < \varphi} \left(F_\alpha - \sum_{\xi < \mu} F_\xi \right) = \sum_{\alpha < \mu} F_\alpha$$

et comme $\mu < \varphi$, l'ensemble E serait une somme de $\bar{\mu} < 2^{\aleph_0}$ ensembles fermés, contrairement à l'hypothèse.

Or, considérons un élément dans chacun des ensembles (55) qui n'est pas vide. Nous obtenons ainsi un ensemble N de puissance $2^{\aleph_0}$. On voit sans peine que pour $\alpha < \varphi$ l'ensemble NF_α est de puissance $\leq \bar{\alpha} < 2^{\aleph_0}$. L'ensemble N admettrait donc avec tout sous-ensemble fermé de E moins que $2^{\aleph_0}$ points communs. Par conséquent, l'ensemble E ne jouirait pas de la propriété J_c .

La condition est suffisante. Soit, en effet, E un ensemble linéaire qui est la somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles fermés:

$$(56) \quad E = \sum_{\xi < \mu} F_\xi \quad \text{où } \bar{\mu} < 2^{\aleph_0}.$$

Soit N un sous-ensemble de E de puissance du continu. Il existe donc dans la série (56) un terme F_ξ tel que l'ensemble NF_ξ est indénombrable, puisque dans le cas contraire $N = NE$ serait, contrairement à l'hypothèse, de puissance $\leq \aleph_0$, $\bar{\mu} < 2^{\aleph_0}$.

Or, l'ensemble fermé F_ξ étant indénombrable, on a $F_\xi = D_\xi + P_\xi$, où D_ξ est un ensemble au plus dénombrable et P_ξ un ensemble parfait. Comme $NF_\xi = ND_\xi + NP_\xi$, où l'ensemble NF_ξ est non dénombrable, il en est de même de l'ensemble NP_ξ . D'autre part, P_ξ est un sous-ensemble parfait de F_ξ , donc, d'après (56), de E . Ainsi, pour tout sous-ensemble N de E de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe dans E un ensemble parfait P admettant avec N une infinité non dénombrable de points communs. L'ensemble E jouit donc de la propriété J_c , c. q. f. d.

Proposition C_{79} . *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire jouisse de la propriété J est qu'il soit un F_σ ¹⁾.*

¹⁾ Voir W. Hurewicz, *Fund. Math.* XII, p. 106.

L'implication $H \rightarrow C_{79}$ résulte du théorème 9 en vertu de la définition des propriétés J et J_c .

Il est à remarquer que sans faire appel à l'hypothèse H on peut établir l'existence d'ensembles linéaires qui ne jouissent pas de la propriété J_c . Tels sont p. ex. les ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ qui ne contiennent aucun ensemble parfait.

Or, nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse H que l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les nombres irrationnels est dépourvu de la propriété J_c , tandis que cela résulte aussitôt de la conséquence C_{79} de H , puisque l'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas un F_σ .

Sans employer l'hypothèse H , on peut démontrer aussi qu'aucun ensemble linéaire qui est un complémentaire analytique non mesurable (B) ne jouit pas de la propriété J . Cependant, on ne sait pas démontrer sans l'hypothèse H qu'il existe des ensembles (linéaires) analytiques ne jouissant pas de la propriété J .

§ 10. Types de dimensions de M. Fréchet. Conséquence C_{80} de H .

Désignons d'une façon générale par dX le type de dimensions (au sens de M. Fréchet) de l'ensemble X^1 .

Théorème 10. *Etant donné un ensemble linéaire E de puissance du continu, il existe toujours un ensemble Q de puissance du continu tel que $dQ < dE$.*

Démonstration. Soient E un ensemble linéaire de puissance du continu et Φ la famille de tous les sous-ensembles de E qui sont homéomorphes à E . On voit sans peine que la famille Φ est de la puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ et que les ensembles formant Φ ont chacun la puissance $2^{\aleph_0}$. D'après le théorème 1, p. 113 il existe donc deux sous-ensembles disjoints Q et Q_1 de E dont chacun admet au moins un point commun avec tout ensemble de la famille Φ .

Comme $Q \subset E$, il vient $dQ \leq dE$. Or, si on avait $dQ = dE$, l'ensemble Q contiendrait un ensemble E_1 homéomorphe à E .

Comme $E_1 \subset Q \subset E$, l'ensemble E_1 serait donc en vertu de la définition de la famille Φ un ensemble de cette famille et on aurait par conséquent $Q_1 E_1 \neq 0$. Mais c'est impossible, puisque $E_1 \subset Q$ et $Q Q_1 = 0$.

Ainsi l'égalité $dQ = dE$ implique contradiction. Par conséquent $dQ < dE$, c. q. f. d.

Proposition C_{80} . *Parmi les types de dimensions de M. Fréchet d'ensembles linéaires indénombrables il n'y a aucun qui soit le plus petit ¹⁾.*

L'implication $H \rightarrow C_{80}$ est une conséquence immédiate du théorème 10.

¹⁾ Cf. plus haut Chap. III, § 4, p. 99.

¹⁾ Voir C. Kuratowski et W. Sierpiński, *Fund. Math.* VIII, p. 200.