CHAPITRE III.

Applications aux relations entre catégorie et mesure.

§ 1. Proposition C_{25} ($C_{25}a$) sur la dualité entre première catégorie et mesure nulle. Conséquence C_{26} ($C_{26}a$).

Les conséquences de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, qui ont été déduites dans le chapitre précédent, découlent directement de la proposition $\boldsymbol{C}_1$ de M. N. Lusin, de sorte qu'on a pas besoin de faire intervenir dans leur démonstration d'autres conséquences de cette hypothèse. A présent nous ferons des applications de l'ensemble de M. N. Lusin aux propositions qui seront déduites de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ par des voies différentes.

La majeure partie de ce chapitre est consacrée aux questions liées avec une sorte de *dualité* qui s'observe entre les notions d'ensemble de *première catégorie* et d'ensemble de *mesure nulle*. On connait notamment plusieurs théorèmes qui restent vrais, quand on remplace dans leurs énoncés les ensembles de première catégorie par ceux de mesure nulle, ou inversement [1]). Nous verrons aussitôt que la raison de ce fait est d'un ordre très général et nous en poursuivrons les conséquences dans plusieurs problèmes particuliers, en faisant l'usage fréquent de la proposition $\boldsymbol{C}_1$.

[1]) Tel est p. ex. (outre les théorèmes exprimant l'*hérédité* et l'*additivité absolue* des deux notions) le lemme que j'ai établi dans les *Fund. Math.* XI, p. 302 (cf. aussi *Bull. Acad. Polonaise* 1928, p. 456, lemme 2).

Nous allons déduire de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ la conséquence suivante qui explique la dualité en question:

Proposition C_{25}. *Il existe une fonction biunivoque $f(x)$ définie dans l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels, telle que $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}$ et qui transforme chaque ensemble $E\subset\mathcal{E}$ de première catégorie en ensemble $f(E)$ de mesure nulle, tandis que sa fonction inverse $f^{-1}(x)$ transforme, réciproquement, tout ensemble $E\subset\mathcal{E}$ de mesure nulle en ensemble $f^{-1}(E)$ de première catégorie.*

Démonstration. La famille de tous les F_σ linéaires de première catégorie étant de puissance du continu, il existe en vertu de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ une suite transfinie du type Ω

$$(1)\qquad \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_\omega, \Phi_{\omega+1}, \dots, \Phi_\xi, \dots, \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires F_σ de première catégorie. Pareillement, la famille de tous les G_δ linéaires de mesure nulle étant de puissance du continu, l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ entraîne l'existence d'une suite transfinie du type Ω

$$(2)\qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \dots, \Gamma_\xi, \dots, \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle.

Posons pour tout $\alpha<\Omega$

$$(3)\qquad S_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi \text{ [1]}$$

— ce sont encore des ensembles F_σ de première catégorie — et supprimons dans la suite transfinie

$$(4)\qquad S_1, S_2, S_3, \dots, S_\omega, S_{\omega+1}, \dots, S_\xi, \dots \qquad (\xi<\Omega)$$

tous les S_α pour lesquels l'ensemble $S_\alpha-\sum_{\xi<\alpha}S_\xi$ est au plus dénombrable. Chaque ensemble de première catégorie admettant dans son complémentaire un F_σ indénombrable de première catégorie,

[1]) Pour $\alpha=1$ on entendra par $\sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi$ l'ensemble vide.

il est aisé de voir que les termes non supprimés de la suite (4) formeront encore une suite transfinie du type Ω

$$(5) \qquad S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, S_{\alpha_3}, \dots, S_{\alpha_\omega}, S_{\alpha_{\omega+1}}, \dots, S_{\alpha_\xi}, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

et que tous les ensembles

$$(6) \qquad Q_\mu = S_{\alpha_\mu} - \sum_{\xi<\mu} S_{\alpha_\xi} \qquad (\mu < \Omega)$$

seront indénombrables.

En outre, tout ensemble linéaire de première catégorie (en tant que situé dans un F_σ de première catégorie) est contenu dans un terme de la suite (5).

Or, posons pout tout $\alpha < \Omega$

$$(7) \qquad T_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi$$

— ce sont des ensembles $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle — et supprimons dans la suite transfinie

$$(8) \qquad T_1, T_2, T_3, \dots, T_\omega, T_{\omega+1}, \dots, T_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

tous les ensembles T_α pour lesquels l'ensemble $T_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} T_\xi$ est au plus dénombrable. Chaque ensemble de mesure nulle admettant dans son complémentaire un G_δ indénombrable de mesure nulle, on constate aisément que les termes non supprimés de la suite (8) forment encore une suite transfinie du type Ω

$$(9) \qquad T_{\beta_1}, T_{\beta_2}, \dots, T_{\beta_\omega}, T_{\beta_{\omega+1}}, \dots, T_{\beta_\xi}, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

et que tous les ensembles

$$(10) \qquad R_\mu = T_{\beta_\mu} - \sum_{\xi<\mu} T_{\beta_\xi}$$

sont indénombrables.

En outre, tout ensemble linéaire de mesure nulle (en tant que situé dans un G_δ de mesure nulle) est contenu dans un terme de la suite (9).

Tous les ensembles (6) et (10) étant indénombrables, donc d'après l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ de puissance du continu, il existe pour tout

nombre ordinal $\mu < \Omega$ une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles Q_μ et R_μ.

Or, les ensembles Q_μ $(\mu < \Omega)$ sont deux à deux disjoints et leur somme forme l'ensemble $\mathcal{E}$. Pareillement, les ensembles R_μ $(\mu < \Omega)$ sont deux à deux disjoints et leur somme forme l'ensemble $\mathcal{E}$. Les correspondances biunivoques entre les ensembles Q_μ et R_μ, où $1 \leqslant \mu < \Omega$, déterminent donc une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ en lui-même, telle que $f(Q_\mu) = R_\mu$ pour $\mu < \Omega$.

Ceci établi, soit E un ensemble linéaire quelconque de première catégorie. En vertu de la définition de la suite (5), l'ensemble E est contenu dans un terme de cette suite. Soit $E \subset S_{\alpha_\gamma}$. D'après (6) et (3) on a évidemment $S_{\alpha_\gamma} = \sum_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu$, d'où $E \subset \sum_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu$ et par conséquent

$$f(E) \subset f(\sum_{\mu\leqslant\gamma} Q_\mu) = \sum_{\mu\leqslant\gamma} f(Q_\mu) = \sum_{\mu\leqslant\gamma} R_\mu = T_{\beta_\gamma},$$

puisque $T_{\beta_\gamma} = \sum_{\mu\leqslant\gamma} R_\mu$ d'après (10) et (7). On a donc $f(E) \subset T_{\beta_\gamma}$ et comme $\beta_\gamma < \Omega$, l'ensemble T_{β_γ} est en vertu de (7) la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Il en résulte aussitôt que l'ensemble $f(E)$ est de mesure nulle.

Soit, réciproquement, E un ensemble linéaire de mesure nulle. En vertu de la définition de la suite (9) l'ensemble E est contenu dans un terme de cette suite. Soit $E = T_{\beta_\lambda}$. Comme $T_{\beta_\lambda} = \sum_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu$, il vient $E \subset \sum_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu$, ce qui donne

$$f^{-1}(E) \subset f^{-1}(\sum_{\mu\leqslant\lambda} R_\mu) = \sum_{\mu\leqslant\lambda} f^{-1}(R_\mu) = \sum_{\mu\leqslant\lambda} Q_\mu = S_{\alpha_\lambda},$$

d'où $f^{-1}(E) \subset S_{\alpha_\lambda}$. Comme $\alpha_\lambda < \Omega$, l'ensemble S_{α_λ} est en vertu de (3) la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie. L'ensemble $f^{-1}(E)$ est donc à plus forte raison de première catégorie.

L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{C}_{25}$ est ainsi établie.

Appelons avec M. E. Szpilrajn *semblables* deux familles d'ensembles Φ_1 et Φ_2, s'il existe une correspondance biunivoque φ entre Φ_1 et Φ_2 et une correspondance biunivoque f entre la somme S_1 de tous les ensembles de la famille Φ_1 et la somme S_2 de tous ceux de Φ_2, telles que l'on ait

$$\varphi(E) = f(E) \qquad \textit{pour tout} \quad E \in \Phi_1 \text{ [1]}.$$

On connait peu d'exemples de familles d'ensembles de points qui soient semblables. Telles sont p. ex. la famille de tous les ensembles mesurables *linéaires* et celle de tous les ensembles mesurables (superficiellement) *plans*.

Or, la proposition C_{25} peut s'exprimer comme il suit:

Proposition C_{25a}. *La famille de tous les ensembles linéaires de première catégorie et celle de tous les ensembles linéaires de mesure nulle sont semblables.*

Soient maintenant $f(x)$ une transformation qui satisfait à la proposition C_{25} et N_1 un ensemble satisfaisant à la proposition C_1. Considérons un ensemble linéaire quelconque E de mesure nulle. L'ensemble $f^{-1}(E)$ est donc de première catégorie et par suite l'ensemble $N_1 \cdot f^{-1}(E)$ est au plus dénombrable, de même que son image $f(N_1 \cdot f^{-1}(E)) = f(N_1) \cdot f(f^{-1}(E)) = f(N_1) \cdot E$. Or, la transformation $f(x)$ étant biunivoque et l'ensemble N_1 étant de puissance du continu, l'ensemble $N = f(N_1)$ est aussi de puissance du continu.

Nous avons ainsi déduit de la proposition C_1 (moyennant la proposition C_{25}) la conséquence suivante, qui correspond par dualité à C_1:

Proposition C_{26} [2]. *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle.*

La proposition C_{26} constitue d'ailleurs une partie de la proposition P_{9a}, p. 31.

---

[1]) Cf. A. N. Whitehead et B. Russel, *Principia Mathematica* II,* 111.

[2]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* V, p. 184.

Il est à remarquer qu'on établit sans faire appel à l'hypothèse H l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable N ayant avec tout ensemble de mesure nulle un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs.

En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cela résulte immédiatement de la proposition C_{26} et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre pour N un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$.

Notons que la proposition suivante sur les ensembles plans, analogue à C_{26}, peut être déduite de l'hypothèse H par l'intermédiaire des propositions tout à fait analogues à C_1 et C_{26}, mais concernant les ensembles *plans* au lieu des ensembles *linéaires* (la marche des démonstrations restant la même):

Proposition C_{26a}. *Il existe un ensemble plan N de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable superficiellement* (au sens de Lebesgue).

§ 2. Propriété S. Dualité entre L et S. Conséquences $C_{27} - C_{40}$.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire jouit de la propriété **S**, s'il n'admet avec tout ensemble linéaire de mesure nulle qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs. La propriété **S** correspond donc par dualité à la propriété **L** (Chap. II, § 2, p. 37) et la proposition C_{26} revient à affirmer l'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu jouissant de la propriété **S**.

Commençons par donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence (dans un ensemble linéaire) de sous-ensembles jouissant de la propriété **L** et de la propriété **S** respectivement. Nous allons les déduire de la proposition P_8. Les deux propositions suivantes, où ces conditions sont formulées, se correspondent donc mutuellement par dualité.

Proposition C_{27}. *Pour qu'un ensemble linéaire E contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété* **L**, *il faut et il suffit qu'il soit de deuxième catégorie de Baire.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si E est un ensemble de première catégorie et N un ensem-

ble jouissant de la propriété **L**, l'ensemble EN est au plus dénombrable, car tout ensemble de première catégorie est contenu dans la somme d'une série infinie d'ensembles parfaits non-denses. Par conséquent, si N est indénombrable, E ne peut pas contenir N.

La condition est suffisante. Soient E un ensemble linéaire de deuxième catégorie et Φ la famille de tous les ensembles qui sont des produits (parties communes) de E avec des ensembles parfaits non-denses. Evidemment $\overline{\overline{\Phi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Comme ensemble de deuxième catégorie, E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. D'après la proposition P_8, p. 25, il existe donc un sous-ensemble non dénombrable N de E ayant avec tout ensemble de la famille Φ un ensemble au plus dénombrable de points communs. Donc, P étant un ensemble parfait non-dense quelconque, l'ensemble $N \cdot EP = N \cdot P$ est au plus dénombrable, de sorte que l'ensemble N jouit de la propriété **L**.

Proposition C_{28}. *Pour qu'un ensemble linéaire contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété* **S**, *il faut et il suffit qu'il soit de mesure extérieure positive.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, d'après la définition de la propriété **S**, un ensemble indénombrable jouissant de cette propriété ne peut être de mesure nulle, donc à plus forte raison contenu dans un ensemble de mesure nulle.

La condition est suffisante. Soient E un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et Φ la famille de tous ses produits avec des ensembles G_δ linéaires de mesure nulle. Il est évident que l'on a $\overline{\overline{\Phi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Comme ensemble de mesure extérieure positive, E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. D'après la proposition P_8, il existe donc un sous-ensemble indénombrable N de E qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble de la famille Φ.

Or, tout ensemble de mesure nulle est contenu dans un G_δ de mesure nulle.

Par conséquent, Q étant un ensemble linéaire quelconque de mesure nulle, l'ensemble $N \cdot EQ = NQ$ est au plus dénombrable. L'ensemble N jouit donc de la propriété **S**.

Les implications $P_8 \to C_{27}$ et $P_8 \to C_{28}$ sont ainsi établies.

Nous démontrerons à présent, sans avoir recours à l'hypothèse H, quelques théorèmes sur les ensembles jouissant de la propriété **S** et nous en tirerons ensuite plusieurs conséquences moyennant la proposition C_{26}.

Lemme 1. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe pour tout nombre x_0 réel donné et tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que*

$$\text{mes} \underset{x}{E} [0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta] < \varepsilon. \tag{11}$$

Démonstration. Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_n = \underset{x}{E} \left[0 < |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}\right]; \tag{12}$$

la fonction $f(x)$ étant mesurable, les ensembles (12) sont évidemment mesurables.

Or, on a d'après (12)

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots \quad \text{et} \quad M_1 M_2 M_3 \ldots = 0.$$

Les ensembles M_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant mesurables, il en résulte, comme on sait, que $\lim\limits_{n=\infty} \text{mes}\, M_n = 0$ et par suite, pour n suffisamment grands, $\text{mes}\, M_n < \varepsilon$. En posant donc $\delta = 1/n$, nous aurons d'après (12) l'inégalité (11), c. q. f. d.

Lemme 2. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), E un ensemble linéaire donné et P un ensemble parfait, il existe un ensemble N de mesure nulle contenu dans E et tel que l'ensemble $f(E) - f(N)$ est de première catégorie dans P.*

Démonstration. Il suffit évidemment de l'établir, en supposant que l'ensemble $f(E)$ est dense dans l'ensemble parfait P

Soit

(13) $$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

un ensemble dénombrable de points de $f(E)$, dense dans P. Etant donnés deux nombres naturels n et k, il existe d'après le lemme 1 un nombre positif $\delta_{n,k}$ tel que l'ensemble

(14) $$T_{n,k} = \underset{x}{E}\,[0 < |f(x) - y_k| < \delta_{n,k}]$$

(qui est évidemment mesurable) satisfait à l'inégalité

(15) $$m(T_{n,k}) < \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Posons

(16) $$N = E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{n,k}.$$

Il vient d'après (15)

$$m\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(T_{n,k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n},$$

donc d'après (6)

$$m_e(N) \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) < \frac{1}{2^n} \qquad pour \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne

$$m(N) = 0.$$

D'après (16) nous avons

(17) $$f(E) - f(N) = f(E) - f\left(E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right).$$

Or, on a

(18) $$f\left(E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) \subset \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}],$$

ce qu'on vérifie sans peine, en montrant à l'aide de (14) que tout élément du membre gauche de la relation (18) appartient à son membre droit.

Les formules (17) et (18) donnent

(19) $$f(E) - f(N) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}]\right).$$

Or, les ensembles

$$\mathrm{C}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}]\right) \quad où \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sont évidemment non-denses dans P, puisque les ensembles

$$\underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}] \quad où \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sont ouverts et denses dans P (l'ensemble (13) étant dense dans P).

L'ensemble (19) est donc de première catégorie dans P, c. q. f. d.

Théorème 1. *Toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme les ensembles jouissant de la propriété* **S** *en ensembles toujours de première catégorie* [1]).

Démonstration. Soient E un ensemble jouissant de la propriété **S**, $f(x)$ une fonction mesurable d'une variable réelle et P un ensemble linéaire parfait. D'après le lemme 2, il existe un sous-ensemble N de E de mesure nulle et tel que l'ensemble $f(E) - f(N)$ est de première catégorie dans P. Or, l'ensemble E jouissant de la propriété **S**, l'ensemble N (en tant que de mesure nulle et contenu dans E) est au plus dénombrable. Par conséquent l'ensemble $f(E) = f(N) + [f(E) - f(N)]$, en tant que somme de deux ensembles de première catégorie dans P, est de première catégorie dans P, c. q. f. d.

A l'aide de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ on démontre la proposition suivante, réciproque du théorème 1:

Proposition C_{29}. *Si toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme un ensemble linéaire donné E en ensemble de première catégorie, l'ensemble E jouit de la propriété* **S**.

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire qui ne jouit pas de la propriété **S**: il existe alors un ensemble linéaire N de mesure nulle et tel que l'ensemble EN est non dénombrable, donc en vertu de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe par consé-

---

[1]) Voir ma Note du 21 Février 1929 dans *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, XXII, p. 58.

quent une fonction $f(x)$ définie sur EN, dont l'ensemble des valeurs pour $x \in EN$ est l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels. Posons encore $f(x) = 0$ pour x *non*-$\in EN$. La fonction $f(x)$ ainsi complétée pour tous les $x \in \mathcal{E}$ est évidemment mesurable, l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) \neq 0] = EN \subset N$ étant de mesure nulle, et elle transforme l'ensemble E en ensemble $\mathcal{E}$, puisque $f(E) \supset f(EN) = \mathcal{E}$, donc en ensemble de deuxième catégorie.

L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{29}$ est ainsi établie.

La proposition $\boldsymbol{C}_{26}$ entraîne en vertu du théorème 1 la proposition suivante (qui peut être regardée comme correspondant par dualité à la proposition $\boldsymbol{C}_2$, Chap. II, p. 49):

Proposition $\boldsymbol{C}_{30}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu que toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme en ensemble toujours de première catégorie.*

La proposition $\boldsymbol{C}_{30}$ implique en particulier cette

Proposition $\boldsymbol{C}_{31}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ dont toute image continue est un ensemble toujours de première catégorie* [1]).

Il est à remarquer, en rapprochant la proposition $\boldsymbol{C}_{31}$ à la proposition $\boldsymbol{C}_3$, que nous ne savons pas s'il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image *continue* soit à la fois de mesure nulle et toujours de première catégorie.

Or, on peut démontrer, même sans addmettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image *homéomorphe* est de mesure nulle et toujours de première catégorie [2]) et même tel que toute *homéomorphie généralisée* au sens de M. Kuratowski [3]) (homéomorphie de classe α, β où $\alpha < \Omega$

[1]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Polonaise* 1928, p. 455.

[2]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Rend. Accad. Lincei*, vol. VIII, ser. 6, p. 214—215 et W. Sierpiński, *Fund. Math.* VII, p. 188. Un autre exemple: W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 33 et *Publ. Univ. Belgrade*, 1934.

[3]) C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 221; voir aussi ma Note dans *Fund. Math.* XXII (à paraître).

et $\beta < \Omega$) le transforme en un ensemble qui est à la fois de mesure nulle et toujours de première catégorie.

Théorème 2. *Chaque ensemble linéaire indénombrable qui jouit de la propriété* **S** *est non mesurable.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire non dénombrable et jouissant de la propriété **S**. Par conséquent il n'est pas de mesure nulle. Or, E n'est non plus un ensemble mesurable de mesure positive, puisqu'un tel ensemble contient, comme on sait, un sous-ensemble parfait (donc indénombrable) de mesure nulle. L'ensemble E est donc non mesurable (au sens de M. Lebesgue), c. q. f. d.

La propriété **S** étant héréditaire, le théorème 2 donne le suivant

Corollaire. *Tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble jouissant de la propriété* **S** *est non mesurable.*

On voit sans peine que *la condition de ce corollaire est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété* **S**.

En effet, si tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble linéaire E est non mesurable, aucun ensemble de mesure nulle ne peut contenir une infinité indénombrable de points de E, car ces derniers formeraient alors un sous-ensemble indénombrable et cependant mesurable de E.

La proposition $\boldsymbol{C}_{26}$ entraîne en vertu de ce corollaire la conséquence suivante (correspondant par dualité à la proposition $\boldsymbol{C}_6$, p. 51):

Proposition $\boldsymbol{C}_{32}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable.*

Il est à remarquer qu'on établit sans admettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ l'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable (B). Tel est p. ex. chaque ensemble de puissance du continu qui est *totalement imparfait*, c. à d. qui ne contient aucun ensemble parfait.

Soit E un ensemble satisfaisant à la proposition C_{32}. L'ensemble E étant de puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre les nombres $x \in \mathcal{E}$ et les éléments $y \in E$. Autrement dit, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, à valeurs distinctes, et dont l'ensemble de valeurs $f(\mathcal{E})$ coïncide avec E.

Vu la propriété de l'ensemble E, on prouve sans peine que la fonction $f(x)$ transforme tout ensemble indénombrable de nombres réels en ensemble non mesurable, puisque, en tant qu'une fonction à valeurs distinctes, elle transforme tout ensemble linéaire indénombrable en sous-ensemble indénombrable de E. On est ainsi conduit à la conséquence suivante:

Proposition C_{33}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles non mesurables.*

D'une façon analogue, la proposition C_6 conduit à la proposition suivante, qui correspond par dualité à C_{33}:

Proposition C_{34}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles de deuxième catégorie.*

Notons encore au sujet des propositions C_6 et C_{32} que le théorème suivant peut être démontré sans l'hypothèse $\boldsymbol{H}$:

Il n'existe aucun ensemble linéaire indénombrable dont tout sous-ensemble indénombrable soit simultanément non mesurable et de deuxième catégorie.

Soit, en effet, E un ensemble linéaire dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable. C'est caractéristique, comme nous avons vu plus haut, pour les ensembles jouissant de la propriété **S**. L'ensemble E jouit donc de la propriété **S**. En vertu du théorème 1 (appliqué à la fonction $f(x) = x$), il constitue donc un ensemble toujours de première catégorie. Par conséquent tous les sous-ensembles de E sont de première catégorie.

En s'appuyant sur les propositions C_1 et C_{26}, on en déduit la conséquence qui suit:

Proposition C_{35}. *Il existe deux ensembles linéaires de puissance du continu dont aucun ne peut être transformé dans l'autre par une fonction de Baire d'une variable réelle.*

Soient à ce but N un ensemble satisfaisant à la proposition C_1 et E un ensemble vérifiant la proposition C_{26}. L'ensemble N jouit donc de la propriété **L** et l'ensemble E de le propriété **S**. Etant donnée une fonction de Baire $f(x)$ définie dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des tous les nombres réels, l'ensemble $f(N)$ jouit en vertu du théorème 1, Chap. II, p. 39 de la propriété **C** et par suite il est de mesure nulle. Cependant l'ensemble E, en tant qu'un ensemble à propriété **S**, est en vertu du théorème 2, p. 87, non mesurable. Par conséquent $f(N) \neq E$.

Réciproquement, la propriété **S** de E implique selon le théorème 1, p. 85, que l'ensemble E est toujours de première catégorie, tandis que l'ensemble N, comme ayant la propriété **L**, est de deuxième catégorie en vertu du corollaire 2, p. 42. Par conséquent $f(E) \neq N$.

Nous ne connaissons aucune démonstration de la proposition C_{35} qui ne fasse appel ni à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ ni aux conséquences de cette hypothèse.

La proposition C_{26} entraîne en vertu des théorèmes 1 et 2 de ce chapitre (en tenant compte de la définition de la propriété **S**) la

Proposition C_{36}. *Il existe un ensemble qui est à la fois non mesurable et toujours de première catégorie.*

Comme chaque ensemble qui est toujours de première catégorie jouit évidemment de la propriété de Baire, on tire de C_{36} cette

Proposition C_{37}. *Il existe un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire.*

Cette proposition a été déduite de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ (par une autre voie) par M. N. Lusin [1]). Notre démonstration est basée sur une idée de M. S. Saks [2]).

Lemme 3. *Etant donnés un ensemble linéaire E jouissant de la propriété* **S** *et un ensemble mesurable M, l'ensemble ME est à la fois un F_σ relativement à E et un G_δ relativement à E.*

Démonstration. M étant un ensemble mesurable, nous pouvons poser $M = Q + N$, où Q est un F_σ et N un ensemble de mesure nulle. On a donc $ME = QE + NE$. L'ensemble E jouissant de la propriété **S**, l'ensemble $D = NE$ est au plus dénombrable. On a donc $ME = (Q + D)E$, où $Q + D$ est un F_σ. Comme produit de E avec un F_σ, l'ensemble ME est un F_σ relativement à E.

D'une façon analogue, le complémentaire CM de M étant mesurable, on trouve $E \cdot CM = E \cdot T$, où T est un F_σ et par conséquent CT est un G_δ. Or, il vient aussitôt $EM = E \cdot CT$, de sorte que l'ensemble EM est un produit de E avec un G_δ, c. à d. un G_δ relativement à E, ce qui achève la démonstration.

Il est à remarquer que si E est un ensemble de puissance du continu, il existe des sous-ensembles de E qui ne sont pas des F_σ relativement à E, car la puissance de la famille de tous les F_σ n'est, comme on sait, que $2^{\aleph_0}$, tandis que celle de la famille de tous les sous-ensembles de E est $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, la question s'impose: *existe-t-il un ensemble linéaire non dénombrable, dont tous les sous-ensembles soient des F_σ relativement à lui?*

La réponse est évidemment *négative*, si l'on admet l'hypothèse $\boldsymbol{H}$.

Parmi d'autres problèmes appartenant à cet ordre d'idées, signalons le suivant: soit Φ une famille *dénombrable* quelconque de sous-ensembles d'un ensemble donné E de puissance $\aleph_1$. On établit facilement sans recourir à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ l'existence d'un

[1]) *Fund. Math.* IX, p. 116—118.

[2]) *Fund. Math.* XI, p. 277.

sous-ensemble de E qui n'est ni somme, ni produit d'aucune suite (finie ou infinie) d'ensembles appartenant à la famille Φ.

Or, *existe-t-il un sous-ensemble de E qui ne soit pas un ensemble limite complet* (au sens de M. E. Borel) *d'une suite d'ensembles appartenant à Φ* [1])?

Ce problème a été posé par M. F. Hausdorff. Nous ne savons le résoudre qu'en admettant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$; la réponse est alors positive.

Le lemme 3 entraîne en vertu des théorèmes bien connus sur les relations entre la classe de Baire d'une fonction $f(x)$ et celle des ensembles

$$\underset{x}{E}\,[f(x) > a] \quad et \quad \underset{x}{E}\,[f(x) < a]\ ^{2)}$$

le théorème suivant:

Théorème 3. *Si E est un ensemble linéaire jouissant de la propriété* **S**, *toute fonction de Baire définie sur E est de classe $\leqslant 1$ (sur E)* [3]).

La proposition C_{26} entraîne aussitôt en vertu de ce théorème la proposition suivante (comp. la proposition C_7, Chap. II, p. 52 et renvoi [1])):

Proposition C_{38}. *Il y a des ensembles indénombrables (de nombres réels) sur lesquels il n'existe aucune fonction de classe 2.*

Or, il existe sur tout ensemble indénombrable (et, plus généralement, sur tout ensemble non isolé) des fonctions de classes 0 et 1. Cependant, sans admettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ ou du moins l'hypothèse que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, on ne sait pas répondre à la question suivante: *existe-t-il sur chaque ensemble indénombrable de nombres*

[1]) c. à d. qui ne soit de la forme $\overline{\lim\limits_{n}}\, E_n$ où $E_n \in \Phi$. Voir *Fund. Math.* XX, p. 286, problème 58.

[2]) Voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 349 (Satz I) et p. 351 (Satz IV).

[3]) E. Szpilrajn, *Fund. Math.* XV, p. 212.

réels une fonction qui ne soit pas une fonction de Baire (sur cet ensemble)?

Les ensembles jouissant de la propriété **S** ont été l'objet d'une étude spéciale de la part de M. Szpilrajn [1]). Nous y empruntons deux propositions suivantes, qu'il a déduites de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Nous allons les déduire des conséquences $\boldsymbol{C}_{26}$ et $\boldsymbol{C}_{26^a}$ de $\boldsymbol{C}_1$.

Proposition $\boldsymbol{C}_{39}$. *Il existe un ensemble plan de mesure linéaire infinie, dont chaque sous-ensemble est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans* [2]).

Démonstration. Soit N un ensemble de puissance du continu satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{C}_{26^a}$, c. à d. dont tous les sous-ensembles indénombrables sont non mesurables superficiellement (au sens de Lebesgue). Chaque sous-ensemble dénombrable de N est évidemment de mesure linéaire nulle et chaque sous-ensemble indénombrable de N, en particulier N lui-même, est de mesure linéaire extérieure infinie, car tout ensemble de mesure linéaire extérieure finie est, comme on sait, de mesure superficielle nulle [3]). Ainsi N est un ensemble plan de mesure linéaire extérieure infinie et dont chaque sous-ensemble est de mesure linéaire extérieure infinie ou nulle.

Reste à montrer que tout sous-ensemble Q de N est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans.

Soit, en effet, Z un ensemble plan arbitraire. L'égalité

$$\mu(Z) = \mu(Z\,Q) + \mu(Z - Q)$$

(où μ désigne la mesure linéaire extérieure) est évidemment satisfaite, car on a soit $\mu(Z\,Q) = 0$, soit $\mu(Z\,Q) = +\infty$. Vu la définition de la mesurabilité linéaire des ensembles plans, il en résulte

[1]) E. Szpilrajn, *Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, XXIV (1931), p. 78—85.

[2]) Pour la mesure linéaire d'ensembles plans voir C. Carathéodory, *Gött. Nachr.* 1914, p. 420.

[3]) Voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 461, théorème XI.

que l'ensemble Q est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans.

On en déduit en particulier (pour $Q = N$) que l'ensemble N est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans. La mesure linéaire extérieure de N étant, comme nous avons vu, infinie, N est donc de la mesure linéaire infinie. La proposition $\boldsymbol{C}_{39}$ se trouve ainsi établie.

Il est à remarquer que tout ensemble plan de mesure linéaire positive *finie* contient un sous-ensemble non mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans [1]).

Lemme 4. *La somme d'un ensemble totalement imparfait et d'un ensemble toujours de première catégorie est un ensemble totalement imparfait.*

Démonstration. Soient Q un ensemble linéaire totalement imparfait et R un ensemble toujours de première catégorie. Considérons un ensemble linéaire parfait P et admettons que $P \subset Q + R$. Or, R étant un ensemble toujours de première catégorie, R est de première catégorie sur P et il existe un ensemble parfait $P_0 \subset P - R$. On a donc $P_0 \subset P$ et $P_0 R = 0$, de sorte que la formule $P \subset Q + R$ donne $P_0 \subset Q$, ce qui est impossible, l'ensemble Q étant totalement imparfait. $Q + R$ ne peut donc contenir aucun sous-ensemble parfait, c. q. f. d.

Proposition $\boldsymbol{C}_{40}$ [2]). *Il existe un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, dont toute image continue linéaire est un ensemble totalement imparfait.*

Démonstration. Soient N un ensemble satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{C}_1$ et E un ensemble satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{C}_{26}$. On voit sans peine que toute image continue de N est totalement imparfaite. En effet, si une image continue $\varphi(N)$ de N contenait un ensemble parfait, on en pourrait déduire l'existence d'une trans-

[1]) Voir E. Szpilrajn, l. c., p. 80.

[2]) E. Szpilrajn, l. c., p. 83—85.

formation continue ψ de l'ensemble $\varphi(N)$ telle que l'ensemble $\psi(\varphi(N))$ soit un intervalle. La transformation $f(x) \doteq \psi(\varphi(x))$ étant continue sur N, on serait en contradiction avec la propriété de l'ensemble N, dont toute image continue est de mesure nulle en vertu du théorème 1, p. 39.

Or, d'après le théorème 1, p. 85, toute image continue de l'ensemble E est un ensemble toujours de première catégorie. En vertu du lemme 4, toute image continue de l'ensemble $N+E$ (en tant que somme des images continues de N et de E) est donc un ensemble totalement imparfait. D'autre part, N est selon le corollaire 2, p. 42, de deuxième catégorie et l'ensemble E est selon le théorème 2, p. 87, non mesurable. Leur somme $N+E$ est donc un ensemble de deuxième catégorie et de mesure extérieure positive. Ainsi l'ensemble $N+E$ satisfait à la condition de la proposition $\boldsymbol{C}_{40}$, c. q. f. d.

§ 3. Propriété λ. Conséquences $C_{41}-C_{46}$.

Nous dirons qu'un ensemble E jouit de la *propriété* λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ relativement à E, c. à d. de la forme $E\cdot\Gamma$ où Γ est un G_δ.

Le lemme 3, p. 90 implique immédiatement que tout ensemble jouissant de la propriété **S** jouit également de la propriété λ. En vertu de la conséquence $\boldsymbol{C}_{26}$ de $\boldsymbol{C}_1$ (cf. p. 80), la proposition suivante en résulte aussitôt:

Proposition $\boldsymbol{C}_{41}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui jouit de la propriété* λ.

Sans admettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ on sait démontrer l'*existence des ensembles de puissance* $\aleph_1$ *pourvus de la propriété* λ [1]). On sait montrer aussi sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ que tout ensemble linéaire qui jouit de la propriété λ est un ensemble toujours de première catégorie [2]).

[1]) W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 104.
[2]) Ibidem.

Or, soit $\{p_\xi\}$, où $\xi<\Omega$, une suite transfinie du type Ω formée de tous les points d'un ensemble E à propriété λ. Désignons pour tout $\alpha<\Omega$ par E_α l'ensemble de tous les points p_ξ où $\xi<\alpha$. Les ensembles E_α forment donc une suite transfinie croissante et ils sont des sous-ensembles au plus dénombrables de E et par conséquent à la fois des F_σ et G_δ relativement à E, puisque E jouit par hypothèse de la propriété λ. On voit ainsi que la proposition $\boldsymbol{C}_{41}$ entraîne cette

Proposition $\boldsymbol{C}_{42}$. *Il existe un ensemble linéaire qui contient une suite transfinie de puissance du continu de sous-ensembles croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ relativement à lui.*

Sans nous servir de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, nous savons démontrer qu'il existe un ensemble linéaire E qui contient une suite transfinie du type Ω de sous-ensembles croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ relativement à E. Cela prouve que le théorème de M. Z. Zalcwasser, d'après lequel toute suite bien ordonnée d'ensembles linéaires croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ est au plus dénombrable [1]) ne se prête pas à une relativisation par rapport à un ensemble arbitraire E.

Lemme 5 [2]). *Si un espace métrique $\mathcal{Y}$ jouissant de la propriété λ est une image biunivoque et continue d'un espace métrique $\mathcal{X}$, ce dernier jouit également de la propriété λ.*

Démonstration. Soit D un sous-ensemble dénombrable de l'espace $\mathcal{X}$. En désignant par f la transformation en question de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f(D)$ (comme un ensemble dénombrable) est un G_δ dans $\mathcal{Y}$ (puisque $\mathcal{Y}$ jouit de la propriété λ) et par conséquent, la fonction f étant continue, l'ensemble $f^{-1}(f(D))=D$ est un G_δ dans $\mathcal{X}$.

M. C. Kuratowski a posé le problème si tout ensemble linéaire qui est toujours de première catégorie jouit nécessaire-

[1]) *Fund. Math.* III, p. 44.
[2]) Cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 128.

ment de la propriété λ. M. Lusin a démontré récemment que ce n'est pas le cas, si l'on admet la proposition C_1 [1]).

Soient en effet, K et E des ensembles satisfaisant à la conséquence C_{15} de C_1 (voir Chap. II, p. 68). Si l'ensemble K jouissait de la propriété λ, il en serait de même, d'après le lemme 5, de l'ensemble E. Pourtant c'est impossible, car tout ensemble qui jouit de la propriété **L** est de deuxième catégorie, tandis que tout ensemble qui jouit de la propriété λ est, comme nous avons déjà observé, de première catégorie [2]). Nous avons donc déduit de C_{15} cette

Proposition C_{43}. *Il existe un ensemble linéaire toujours de première catégorie qui ne jouit pas de la propriété λ.*

Lemme 6. *Etant donnée une fonction arbitraire $y=f(x)$ d'une variable réelle, définie dans un ensemble linéaire X jouissant de la propriété λ, l'image géométrique* [3]) *de cette fonction jouit de la propriété λ.*

Démonstration. Soit J l'image géométrique de la fonction $f(x)$. L'ensemble X est la projection (donc une image continue) biunivoque de J sur l'axe d'abscisses. Il en résulte en vertu du lemme 5 que J jouit de la propriété λ, l'ensemble X étant par définition un espace métrique pourvu de cette propriété.

Théorème 4. *Tout ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ est une projection biunivoque d'un ensemble plan jouissant de la propriété λ.*

Démonstration. Il existe, comme on sait, un ensemble linéaire X de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété λ [4]). Plaçons-le sur l'axe d'abscisses et considérons un ensemble linéaire quelconque Y de puissance $\aleph_1$, situé sur l'axe d'ordonnées. On a donc $\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{X}}$ et il existe une correspondance biunivoque $y=f(x)$ entre les éléments x de X et les éléments y de Y. L'ensemble X jouissant de la propriété λ, l'image géométrique J de la fonction $f(x)$ jouit également de la propriété λ en vertu du lemme 6. Or, l'ensemble $E=f(X)$ est évidemment une projection biunivoque (sur l'axe d'ordonnées) de l'ensemble J.

[1]) *Fund. Math.* XXI, p. 122.

[2]) cf. plus haut, p. 94, renvoi [1]).

[3]) pour la définition de cette notion voir plus haut, p. 70.

[4]) voir plus haut, p. 94.

En admettant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, nous pouvons déduire du théorème 4, qui vient d'être établi, la conséquence suivante, réciproque de la proposition C_{21}, Chap. II, p. 72:

Proposition C_{44}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et dont l'image géométrique jouit de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire quelconque qui ne jouit pas de la propriété de Baire. Il résulte de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ en vertu du théorème 4 que l'ensemble E est une projection biunivoque sur l'axe OX d'un ensemble plan J ayant la propriété λ et nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble J est situé au-dessus de l'axe OX. Pareillement l'ensemble CE est une projection biunivoque sur l'axe OX d'un ensemble plan J' ayant la propriété λ et situé au-dessous de l'axe OX. L'ensemble plan $J+J'$, qui jouit de la propriété λ, donc à plus forte raison de la propriété de Baire, est évidemment l'image géométrique d'une fonction $f(x)$ de variable réelle. Or, la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la propriété de Baire, puisque l'ensemble $E=\underset{x}{E}[f(x)\geqslant 0]$ n'en jouit pas [1]). La proposition C_{44} est ainsi établie.

Les propositions C_{21} et C_{44} montrent que la propriété d'une fonction de satisfaire à la condition de Baire et la propriété de Baire de son image géométrique sont indépendantes l'une de l'autre.

Théorème 5. *Tout ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété λ.*

[1]) Cf. plus haut, Chap. II, p. 38.

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$. D'après le théorème 4, E est une image biunivoque et continue d'un ensemble plan J jouissant de la propriété λ. Posons $E = f(J)$.

Or, comme on sait, le plan Π est une image biunivoque et continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels: soit $\Pi = \varphi(\mathcal{N})$ [1]).

Posons $Q = \varphi^{-1}(J)$. L'ensemble $J = \varphi(Q)$ étant une image biunivoque et continue de Q et jouissant de la propriété λ, il résulte du lemme 5 que Q jouit de la propriété λ. Or, on a évidemment $E = f[\varphi(Q)]$ et la fonction $\psi(x) = f[\varphi(x)]$ est, comme on voit sans peine, biunivoque et continue dans Q. L'ensemble E est donc une image biunivoque et continue de l'ensemble linéaire Q, c. q. f. d.

Tout ensemble fini ou dénombrable étant évidemment pourvu de la propriété λ, l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ entraîne en vertu du théorème 5, qui précède, la

Proposition C_{45}. *Tout ensemble linéaire est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire qui jouit de la propriété λ* [2]).

De la proposition C_{45} résulte tout de suite cette

Proposition C_{46}. *La propriété de Baire des ensembles linéaires n'est pas invariante relativement aux transformations continues et biunivoques* [3]).

Pour démontrer que $C_{45} \to C_{46}$, il suffit de remarquer que, d'une part, il existe des ensembles linéaires dépourvus de la propriété de Baire et, d'autre part, tout ensemble jouissant de la propriété λ est toujours de première catégorie et par suite jouit de la propriété de Baire.

Il est à noter qu'on peut même démontrer (en utilisant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) que *la propriété de Baire d'ensembles linéaires n'est pas invariante relativement aux transformations par des fonctions continues d'une variable réelle* [4]).

---

[1]) Voir p. ex. *Fund. Math.* XI, p. 117.

[2]) Cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 128.

[3]) Cf. *Fund. Math.* IV, p. 323.

[4]) Voir W. Sierpiński, *Mathematica*, VIII, Cluj 1934, p. 195.

§ 4. Conséquence C_{47} sur les types de dimensions de M. Fréchet.

Pour terminer, nous allons déduire à l'aide des propositions C_1 et C_{26} la conséquence suivante, qui constitue la solution d'un problème relatif à la notion de „type de dimensions de M. Fréchet“ [1]).

Proposition C_{47}. *Il existe deux ensembles indénombrables linéaires N_1 et N_2 tels qu'aucun ensemble linéaire non dénombrable E n'est d'un type de dimensions (au sens de M. Fréchet) qui soit à la fois plus petit que ceux de N_1 et de N_2.*

Démonstration. Soit N_1 un ensemble qui satisfait à la proposition C_1 et N_2 un ensemble qui satisfait à la proposition C_{26}.

Supposons qu'il existe un ensemble indénombrable E dont le type de dimensions de Fréchet est simultanément plus petit que ceux de N_1 et de N_2. L'ensemble E est donc homéomorphe à certains sous-ensembles indénombrables H_1 de N_1 et H_2 de N_2 respectivement. Or, les hypothèses admises sur N_1 et N_2 entraînent aussitôt que l'ensemble H_1 est de deuxième catégorie et que l'ensemble H_2 est de première catégorie sur tout ensemble parfait. Cependant c'est impossible, puisque les ensembles H_1 et H_2 sont homéomorphes, tous les deux étant homéomorphes à E.

Il est à remarquer que sans admettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ on peut démontrer qu'*il existe deux ensembles linéaires N_1 et N_2 de puissance $2^{\aleph_0}$ tels qu'aucun ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ n'ait le type de dimensions à la fois plus petit que ceux de E_1 et de E_2* [2]). Cependant nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ que celui des deux ensembles linéaires dont la puissance est supérieure a toujours le type de dimensions plus grand [3]).

---

[1]) Voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 30, 31 et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 69.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 65.

[3]) Cf. *Fund. Math.* XIV, p. 126.