CHAPITRE II.

L'ensemble de M. Lusin.

§ 1. Proposition C_1.

Parmi les diverses conséquences de l'hypothèse H il y a une — nous la désignerons par C_1 — qui est d'une importance capitale, puisque plusieurs autres conséquences de l'hypothèse H peuvent être démontrées, en admettant au lieu de cette hypothèse la proposition C_1 seule. Elle est due à M. N. Lusin.

Nous consacrons donc ce chapitre à la proposition C_1 et à ses conséquences. Nous y établirons aussi, sans admettre l'hypothèse H, plusieurs théorèmes, dont nous déduirons ensuite moyennant la proposition C_1 d'autres conséquences intéressantes. Nous envisagerons enfin certaines conséquences de l'hypothèse H qui sont dans un rapport particulièrement étroit avec la proposition C_1.

Proposition C_1. *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

C'est précisément une partie de la proposition P_0: cette dernière étant équivalente à l'hypothèse H, on a donc $H \rightarrow C_1$.

M. Lusin a démontré la proposition C_1 à l'aide de l'hypothèse H pour en déduire l'existence des fonctions qui satisfont à la condition de Baire, sans être représentables analytiquement [1])

[1]) *C. R. Paris* 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

(ce n'est que plus tard qu'il a établi l'existence de telles fonctions sans l'hypothèse H, à savoir par les moyens de la théorie des ensembles analytiques [1]); nous y reviendrons plus loin, p. 69 et 70).

Il est à remarquer que l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable N ayant avec tout ensemble parfait non-dense un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs peut être établie sans utiliser l'hypothèse H. En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'existence d'un tel ensemble N résulte immédiatement de la proposition C_1 et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre pour N un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

§ 2. Propriétés L et C.

Nous appellerons *ensemble de Lusin* tout ensemble N qui satisfait à la proposition C_1. L'ensemble de M. Lusin joue un rôle considérable dans la Théorie des ensembles de points, où ses propriétés remarquables permettent de démontrer plusieurs propositions importantes.

Nous dirons pour abréger qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* **L**, si tout ensemble parfait non-dense contient un ensemble au plus dénombrable de points de l'ensemble E. La proposition C_1 affirme donc qu'il existe parmi les ensembles linéaires de puissance du continu un ensemble N jouissant de la propriété **L**.

On dit qu'un ensemble linéaire jouit de la *propriété* **C**, si pour chaque suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de nombres réels positifs donnés d'avance, il peut être couvert par une suite infinie d'intervalles $I_1, I_2, I_3, \ldots$ tels que, δ_n désignant la longueur de I_n, on ait $\delta_n = a_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ [2]).

[1]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 157, ainsi que N. Lusin et W. Sierpiński, *Journ. de Math.* II (1923), p. 72.

[2]) Les ensembles jouissant de la propriété **C** coïncident avec ceux que M. E. Borel appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance" (Bull. Soc. Math. de France XLVII, 1919, p. 1).

On voit aussitôt que la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété **C** est aussi un ensemble jouissant de cette propriété. M. E. Szpilrajn a démontré [1]) qu'un ensemble jouissant de la propriété **C** ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait, de sorte que s'il est mesurable (*B*) ou, plus généralement, s'il est un ensemble analytique, il est nécessairement au plus dénombrable.

En outre [2]) *la propriété* **C** *est un invariant des transformations effectuées moyennant les fonctions continues d'une variable réelle.*

§ 3. Fonctions définies sur les ensembles à propriété L.

Dans la suite nous appellerons:

fonction de Baire — toute fonction représentable analytiquement (c. à d. qui s'obtient des fonctions continues par un nombre fini ou par une infinité dénombrable de passages à la limite),

fonction satisfaisant à la condition de Baire — toute fonction qui est continue sur chaque ensemble parfait, quand on néglige les ensembles de première catégorie de Baire par rapport à cet ensemble parfait [3]),

ensemble jouissant de la propriété de Baire — tout ensemble E (situé dans un espace métrique) tel que pour tout ensemble parfait P il existe une sphère S contenant à son intérieur des points de P et telle qu'au moins un des ensembles SPE et $SP-E$ est de première catégorie de Baire par rapport à P [4]).

On montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ satisfasse à la condition de Baire est que pour tout F fermé l'ensemble $\underset{x}{E}\,[f(x) \in F]$ jouisse de la propriété

[1]) *Fund. Math.* XV, p. 126.

[2]) Ibidem, p. 127.

[3]) M. Kuratowski (*Topologie I*, Monografje Matematyczne, 1933, p. 194) l'appelle *fonction à propriété de Baire au sens restreint* (cf. ibid., p. 191).

[4]) M. Kuratowski (*Topologie I*, p. 55) l'appelle *ensemble jouissant de la propriété de Baire au sens restreint* (cf. ibid., p. 49).

de Baire [1]). La propriété de Baire d'un ensemble quelconque et la propriété de sa *fonction caractéristique* (c. à d. égale à 1 dans lui et à 0 partout ailleurs) de satisfaire à la condition de Baire sont équivalentes.

Théorème 1. *Chaque fonction de Baire d'une variable réelle transforme tout ensemble jouissant de la propriété* **L** *en ensemble jouissant de la propriété* **C** [2]).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de Baire d'une variable réelle. Il existe alors, comme on sait, un ensemble K de première catégorie, tel que la fonction $f(x)$ est continue sur l'ensemble $\mathcal{C}-K$ [3]).

Pour tout E, on a identiquement $f(E)=f(KE)+f(E-K)$.

Or, soit E un ensemble linéaire (infini) jouissant de la propriété **L**. L'ensemble K étant de première catégorie (donc contenu dans une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non-denses), l'ensemble KE, et à plus forte raison l'ensemble $f(KE)$, est au plus dénombrable et jouit par suite de la propriété **C**. Une somme de deux ensembles jouissant de la propriété **C** étant aussi un ensemble qui jouit de la propriété **C**, il s'agit de montrer encore que l'ensemble $f(E-K)$ jouit de cette propriété.

Nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble $E-K$ est infini. Soit $Q=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ un sous-ensemble de $E-K$, dénombrable et dense dans $E-K$. Considérons une suite infinie quelconque de nombres réels positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et soit k un nombre naturel donné.

La fonction $f(x)$ étant continue dans l'ensemble $\mathcal{C}-K$, donc à plus forte raison dans l'ensemble $E-K$, il existe un nombre positifs δ_k tel que les formules

[1]) Ibid., p. 194—195.

[2]) C'est une généralisation d'un théorème que j'ai démontré dans *Fund. Math.* XI, p. 302—304; cf. *Mathematica* vol. I, p. 115.

[3]) Voir p. ex. *Fund. Math.* I, p. 163.

(1) $|x - x_k| < \delta_k$ *et* $x \in E - K$

entraînent l'inégalité

(2) $$|f(x) - f(x_k)| < \frac{a_{2k}}{2}.$$

Désignons par R l'ensemble de tous les nombres x de $E-K$ qui satisfont aux inégalités

(3) $|x - x_k| \geqslant \delta_k$ *pour* $k = 1, 2, 3, \ldots$

L'ensemble Q étant dense dans $E-K$, on voit sans peine que l'ensemble R est non-dense; comme contenu dans l'ensemble E, qui jouit de la propriété **C**, l'ensemble R est donc au plus dénombrable. Posons $R = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ et désignons pour $k = 1, 2, 3, \ldots$: par I_{2k-1} l'intervalle $\left[f(y_k) - \frac{a_{2k-1}}{2}, f(y_k) + \frac{a_{2k-1}}{2}\right]$ et par I_{2k} l'intervalle $\left[f(x_k) - \frac{a_{2k}}{2}, f(x_k) + \frac{a_{2k}}{2}\right]$. La longueur δ_n de l'intervalle I_k est donc égale à a_n pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et on voit sans peine que l'ensemble $f(R)$ est recouvert par les intervalles $I_1, I_3, I_5, \ldots$ Or, l'ensemble $f(E-K) - f(R)$ est en même temps couvert par les intervalles $I_2, I_4, I_6, \ldots$

En effet, soit q un élément de $f(E-K) - f(R)$. On a donc

(4) $q \in f(E-K)$ et (5) q *non-*$\in f(R)$.

En vertu de (4), il existe un nombre x de $E-K$ tel que $q = f(x)$ et, en vertu de (5), il vient x *non-*$\in R$. D'après la définition de l'ensemble R, les inégalités (3) ne peuvent donc être satisfaites toutes à la fois. Il existe par conséquent un nombre naturel k pour lequel $|x - x_k| < \delta_k$ et, l'inégalité (1) entraînant l'inégalité (2), la définition de l'intervalle I_{2k} montre que le point $q = f(x)$ appartient à cet intervalle.

Tout point q de l'ensemble $f(E-K) - f(R)$ est donc contenu dans un (au moins) des intervalles $I_2, I_4, I_6, \ldots$ et par conséquent l'ensemble $f(E-K) = f(R) + [f(E-K) - f(R)]$ se trouve

entièrement couvert par les intervalles $I_1, I_2, I_3, \ldots$ Il jouit donc de la propriété **C**, c. q. f. d.

Théorème 2. *Aucun ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété* **L** *ne jouit de la propriété de Baire relativement à la droite* [1]).

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété **L**: un tel ensemble est nécessairement de deuxième catégorie de Baire, puisque chaque ensemble jouissant de la propriété **L** admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble parfait non-dense, donc aussi avec tout ensemble de première catégorie. Or, chaque ensemble linéaire de deuxième catégorie est *partout* de deuxième catégorie, c. à d. de deuxième catégorie *dans tout intervalle partiel* (en cas de l'espace métrique général *dans toute sphère partielle*) d'un certain intervalle: soit I un tel intervalle pour l'ensemble E. Si l'ensemble $I-E$ était de première catégorie, il existerait, comme on voit sans peine, un ensemble parfait P contenu dans l'ensemble $I - (I-E) = E$, car le complément à un intervalle d'un ensemble de première catégorie contient toujours un sous-ensemble parfait. Cependant l'existence de l'ensemble P est impossible, l'ensemble E jouissant de la propriété **L**. L'ensemble $I-E$ est donc de deuxième catégorie et par suite il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $I-E$ est partout de deuxième catégorie dans J. Les ensembles E et $J - E = J(I-E)$ sont donc partout de deuxième catégorie dans intervalle J, c. à d. que l'ensemble E ne jouit pas de la propriété de Baire relativement à la droite, c. q. f. d.

La propriété **L** étant évidemment *héréditaire* [2]), le th. 2 entraîne les deux corollaires suivants:

---

[1]) On dit qu'un ensemble linéaire E ne jouit pas de la propriété de Baire *relativement à la droite*, s'il existe un *intervalle* de cette droite dans lequel l'ensemble E, en même temps que son complémentaire, sont partout de deuxième catégorie.

[2]) cf. plus haut, p. 28, renvoi [2]).

Corollaire 1. *Si un ensemble linéaire E jouit de la propriété* **L**, *aucun sous-ensemble indénombrable de E ne jouit de la propriété de Baire relativement à la droite.*

Corollaire 2. *Tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble (linéaire) jouissant de la propriété* **L** *est de deuxième catégorie de Baire.*

Il est aisé de voir que *la condition du corollaire 2 est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété* **L**.

En effet, si tout sous-ensemble non dénombrable d'un ensemble linéaire E est de deuxième catégorie, aucun ensemble parfait non-dense ne peut contenir un sous-ensemble indénombrable de E, car ce serait alors un sous-ensemble indénombrable de E de première catégorie.

Théorème 3. *Si E est un ensemble linéaire jouissant de la propriété* **L**, *toute fonction de Baire définie sur E est de classe $\leqslant 2$ (sur E)* [1].

Démonstration. Soient E un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** et $f(x)$ une fonction de Baire définie sur E. Une fonction de Baire définie sur un ensemble linéaire quelconque peut, comme on sait, être toujours prolongée à une fonction de Baire d'une variable réelle [2]: il existe donc une fonction de Baire $\varphi(x)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels et qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Comme toute fonction de Baire d'une variable réelle satisfait à la condition de Baire, il existe un ensemble K de première catégorie tel que la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble $\mathcal{C} - K$. La fonction $f(x)$, comme égale à $\varphi(x)$ dans E, est donc continue sur l'ensemble $E(\mathcal{C} - K) = E - EK$. Or, l'ensemble E jouissant de la propriété **L** et l'ensemble K étant de première catégorie,

[1]) Cf. *Fund. Math.* XV, p. 212 et p. 285.

[2]) Voir p. ex. *Fund. Math.* XVI, p. 81.

l'ensemble EK est au plus dénombrable. La fonction $f(x)$ est donc continue sur E, lorsqu'on néglige un ensemble au plus dénombrable. Une telle fonction est, comme on sait, de classe $\leqslant 2$ sur E.

Théorème 4. *Si un ensemble linéaire non dénombrable E jouit de la propriété* **L**, *il existe une fonction réelle définie sur E et qui est de classe 2 sur E* [1]).

Démonstration. Soit D un sous-ensemble de E dénombrable et dense dans E. Posons

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in D$$

et

$$f(x) = 1 \qquad \text{pour } x \in E - D.$$

Il suffit de montrer que E jouissant de la propriété **L**, la fonction $f(x)$, ainsi définie sur E, est de classe 2 sur E. La fonction $f(x)$ étant sûrement de classe $\leqslant 2$ sur E (en tant que continue, lorsqu'on néglige l'ensemble dénombrable D), cela revient à prouver que $f(x)$ n'est pas de classe $\leqslant 1$ sur E.

D'après le théorème 2, l'ensemble E est de deuxième catégorie et il existe un intervalle I dans lequel E est partout de deuxième catégorie. L'ensemble D étant dense dans E, la définition de la fonction $f(x)$ montre aussitôt que $f(x)$ est une fonction discontinue sur E en tout point de EI. Or, M. C. Kuratowski a démontré [2]) que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de classe $\leqslant 1$, définie sur un ensemble linéaire, est toujours de première catégorie sur cet ensemble. En conséquence, si la fonction $f(x)$ était de classe $\leqslant 1$ sur E, donc aussi sur EI, l'ensemble EI serait de première catégorie sur lui-même et par suite sur la droite $\mathcal{C}$ (EI étant dense dans I). Cependant on se trouverait alors en contradiction avec le th. 2, p. 41, car EI est un sous-ensemble indénombrable de l'ensemble E, qui jouit par hypothèse de la propriété **L**.

[1]) Cf. G. Poprougénko, *Fund. Math.* XV, p. 285.

[2]) *Fund. Math.* V, p. 80, théorème 1.

Théorème 5. *Soit $m(E)$ une fonction définie pour tous les sous-ensembles E d'un ensemble linéaire Q de façon que les conditions suivantes soient remplies:*

(i) *$m(E)$ est un nombre (fini) réel non négatif, quel que soit $E \subset Q$,*

(ii) *$m\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n m(E_n)$, quelle que soit la suite (finie ou infinie) $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de sous-ensembles disjoints de Q,*

(iii) *$m(E) = 0$, lorsque E est un ensemble formé d'un seul élément de Q.*

Dans ces conditions, si l'ensemble Q jouit de la propriété **L**, *la fonction $m(E)$ s'annule identiquement pour tout $E \subset Q$* [1]).

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon > 0$ réel quelconque et un élément x_0 de Q, désignons par E_n l'ensemble de tous les points $x \in Q$ tels que $\frac{1}{n+1} \leqslant |x - x_0| < \frac{1}{n}$ et posons $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ Les ensembles E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont évidemment des sous-ensembles disjoints de Q: d'après (i) on a donc l'égalité $m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$ Le nombre $m(E)$ étant fini, la série $m(E_1) + m(E_2) + \ldots$ est convergente et il existe un indice n tel que $m(E_n) + m(E_{n+1}) + \ldots < \varepsilon$. Posons $M = (x_0) + E_n + E_{n+1} + \ldots$ Il vient d'après (ii) et (iii) $m(M) = m(E_n) + m(E_{n+1}) + \ldots < \varepsilon$. Or, M est évidemment la partie de l'ensemble Q contenue dans l'intervalle $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$.

Nous avons ainsi démontré que pour tout $x_0 \in Q$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un intervalle I entourant x_0, tel que $m(QI) < \varepsilon$.

---

[1]) Ce th. est un cas particulier du théorème plus général, démontré pour les ensembles Q jouissant de la propriété **C** (voir E. Szpilrajn, *Fund. Math.*, XXII (1934), à paraître). L'énoncé du texte exprime le fait que l'ainsi dit problème de la mesure *généralisé* (cf. p. ex. S. Banach et C. Kuratowski, *Fund, Math.* XIV, p. 127) comporte sur les ensembles Q à propriété **L** une solution toujours négative. Nous y reviendrons plus loin (voir § 7, p. 60).

Soit maintenant $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite infinie de points de Q dense dans Q. Pour tout indice n il existe donc un intervalle I_n entourant x_n et tel que $m(QI_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Posons $R = Q - (I_1 + I_2 + \ldots)$. C'est évidemment un sous-ensemble non-dense de Q.

Or, admettons que Q jouisse de la propriété **L**. Comme ensemble non-dense situé dans Q, l'ensemble R est alors au plus dénombrable. En vertu de (ii) et (iii) il vient donc $m(R) = 0$, d'où selon (i) et (ii):

$$m(Q) = m\left(R + Q\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(Q\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\left(QI_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots = \varepsilon,$$

de sorte que $m(Q) < \varepsilon$. Le nombre positif ε étant arbitraire, il en résulte d'après (i) que l'on a $m(Q) = 0$, donc d'après (i) et (iii) que $m(E) = 0$ pour tout sous-ensemble E de Q, c. q. f. d.

Théorème 6 [1]). *Si un ensemble linéaire indénombrable Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une fonction $f(x)$ continue sur Q qui n'est par uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de Q.*

Démonstration. Soit Q un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{I} = [0,1]$ jouissant de la propriété **L**. Considérons une fonction $f(x)$ continue sur l'ensemble $\mathcal{RI}$ de tous les nombres irrationnels de l'intervalle [0,1], mais qui n'est uniformément continue sur aucune *portion* de $\mathcal{R}$, c. à d. sur aucun ensemble $\mathcal{R}I$ où I est un intervalle partiel arbitraire de $\mathcal{I}$.

Il est facile de trouver des exemples pour les fonctions $f(x)$ de ce genre. Telle est p. ex. toute fonction croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les nombres rationnels. On peut poser en particulier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}nx}{n^3}$, où E$t$ désigne le plus grand entier ne dépassant pas t.

La fonction $f(x)$ est évidemment continue sur l'ensemble Q.

---

[1]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Roumaine* XVII (1934), N° 1.

Reste à montrer qu'elle n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable E de Q.

Supposons par contre que la fonction $f(x)$ soit uniformément continue sur un tel ensemble E. L'ensemble Q jouissant de la propriété **L**, l'ensemble E ne peut être non-dense dans Q. Il existe donc un intervalle $I \subset \mathcal{I}$ tel que E est dense dans I. La fonction $f(x)$ étant par hypothèse uniformément continue sur l'ensemble $\mathcal{U}$, contenu dans la fermeture de E, elle serait, selon un théorème connu, uniformément continue sur $\mathcal{U}$, contrairement à l'hypothèse, selon laquelle la fonction $f(x)$ n'est uniformément continue sur aucune portion de $\mathcal{U}$.

D'après une remarque que je dois à M. S. Saks, un raisonnement analogue permet d'établir le théorème suivant:

Théorème 7. *Si un ensemble linéaire indénombrable Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ de fonctions continues d'une variable réelle qui converge non uniformément vers 0 sur tout sous-ensemble indénombrable de Q.*

Démonstration. Soient Q un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** et $D = (x_1, x_2, x_3, ...)$ un ensemble dénombrable partout dense contenu dans CQ (le complémentaire de Q).

Posons $f(x_n) = \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, ...$ et $f(x) = 0$ pour $x \in CD$.

On voit sans peine que la fonction $f(x)$ est continue en tout point de CD et discontinue en tout point de D et qu'il existe une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ qui convergent vers $f(x)$ pour tout x réel. Reste à montrer que cette suite converge non uniformément sur tout sous-ensemble indénombrable de Q.

En effet, soit N un sous-ensemble indénombrable arbitraire de Q. L'ensemble Q jouissant de la propriété **L**, il existe, comme nous savons, un intervalle I tel que N est dense dans I. Supposons que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ converge uniformément sur N. Elle converge donc uniformément sur un ensemble dense dans l'intervalle I: les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ étant continues, il en

résulte sans peine que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ converge uniformément sur l'intervalle I tout entier, donc que sa limite est une fonction continue sur I. Or, ce n'est pas le cas, car la fonction $f(x)$ est par hypothèse discontinue en tout point de l'ensemble dense D.

Théorème 8 [1]. *Si un ensemble linéaire Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$ continues, uniformément bornées et telles que pour chaque suite infinie croissante d'indices $m_1, m_2, m_3, ...$, la suite $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x) ...$ est convergente tout au plus en une infinité dénombrable de points x de Q.*

Démonstration. Comme on voit sans peine, on peut définir (par induction) une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), ...$ telle que l'on ait $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout n naturel et pour tout x réel, et qui remplisse en outre la condition suivante:

(6) *quel que soit $n = 1, 2, ...$, il existe pour tout intervalle I de longueur $< \frac{1}{n}$ et pour tout indice $k < n$ un nombre réel $x \in I$ tel que* $|f_n(x) - f_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}$.

Or, nous allons montrer que chaque suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ de ce genre (qui est uniformément bornée par définition) satisfait à la thèse du théorème.

Soit, en effet, $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ une suite infinie croissante d'indices et supposons que N soit un sous-ensemble indénombrable de Q en tout point x duquel la suite infinie $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), ...$ est convergente. Admettons enfin que l'ensemble Q jouisse de la propriété **L**. L'ensemble N, en tant qu'indénombrable et jouissant de la propriété **L** (comme sous-ensemble de Q), est dense dans un certain intervalle I. Soit D un sous-ensemble dénombrable de N dense dans I. La suite $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), ...$ converge donc dans D et, d'après un théorème général connu, on peut en extraire une

[1] Ce théorème et sa démonstration sont dus à M. S. Saks.

suite $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x), \ldots$ qui converge uniformément dans D, donc aussi dans I (puisque D est dense dans I). Or, c'est, comme voit sans peine, incompatible avec la condition (6).

§ 4. Propriété M.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* **M** de M. K. Menger [1]), si toute famille F d'ensembles ouverts tels que chaque point de E se trouve situé dans un ensemble appartenant à la famille F de diamètre aussi petit qu'on le veut contient une suite infinie d'ensembles ouverts dont la somme contient E et dont les diamètres tendent vers zéro („Nullfolge").

Théorème 9. *Tout ensemble linéaire jouissant de la propriété* **L** *jouit aussi de la propriété* **M.**

Démonstration. Soit F une famille d'ensembles ouverts tels que pour tout point p de E et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble appartenant à F, contenant p et dont le diamètre est inférieur à ε. Soit $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ un sous-ensemble de E, dénombrable et dense dans E. D'après la propriété de la famille F, il existe pour tout n naturel un ensemble P_n de F de diamètre $\delta(P_n) < \frac{1}{n}$ et tel que $p_n \in P_n$. On aperçoit aisément que l'ensemble $Q = E - (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)$ est alors non-dense.

Or, admettons que l'ensemble E jouisse de la propriété **L**. Comme sous-ensemble non dense-de E l'ensemble Q est donc au plus dénombrable. Soit q_1, q_2, q_3 une suite formée de tous les éléments de Q (on peut la supposer toujours infinie, en répétant, s'il y a lieu, le même point *ad inf.*). D'après la propriété de la famille F, il existe pour tout indice n un ensemble Q_n de F tel que $q_n \in Q_n$ et $\delta(Q_n) < 1/n$.

Considérons la suite $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, \ldots$ Les diamètres des ensembles de cette suite convergent vers 0 et l'ensemble-somme

[1]) Voir K. Menger, *Sitzungsber. Akad. Wien* 133 (1924), p. 421.

$S = P_1 + Q_1 + P_2 + Q_2 + \ldots$ contient évidemment l'ensemble E. Donc, l'ensemble E jouit de la propriété de M. Menger, c. q. f. d.

§ 5. Conséquences $C_2 - C_9$ de la proposition C_1.

La proposition C_1 et le théorème 2 entraînent la

Proposition C_2. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui est transformé par toute fonction de Baire d'une variable réelle en un ensemble jouissant de la propriété* **C**.

Tout ensemble jouissant de la propriété **C** est évidemment de mesure nulle. La proposition C_2 implique par conséquent la

Proposition C_3. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont toute image continue est de mesure nulle.*

En effet, pour montrer que $C_2 \to C_3$, il suffit de rappeler que pour toute fonction continue $f(x)$, définie sur un ensemble quelconque E de nombres réels, il existe, comme on sait, une fonction de Baire de première classe définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels et qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Or, il est à remarquer que nous ne savons pas établir sans faire l'usage de l'hypothèse H non seulement la proposition C_3, mais non plus la proposition affirmant l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable qui se transforme en ensemble de mesure nulle par toute fonction continue d'une variable réelle.

D'une façon analogue, nous ne savons démontrer qu'à l'aide de l'hypothèse H cette

Proposition C_{3a}. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toutes les images homéomorphes sont de mesure nulle.*

Or, nous savons démontrer sans l'hypothèse H qu'*il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image homéomorphe est de mesure nulle* [1]).

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* VII, p. 188 et *Publications de l'Univ. de Belgrade* 1934.

Notons toutefois que sans employer l'hypothèse ***H*** on sait démontrer le théorème que voici:

Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions de Baire d'une variable réelle (ou, plus généralement, de fonctions qui sont continues, en négligeant un ensemble de première catégorie), il existe un ensemble linéaire indénombrable qui se transforme par toute fonction de la famille Φ en ensemble de mesure nulle [1]).

P. Urysohn appelait *parfaitement mesurable* un ensemble (linéaire) E, si tout ensemble homéomorphe à E est mesurable, et il a posé le problème: quelle est la puissance de la famille de tous les ensembles linéaires parfaitement mesurables? [2]).

Proposition C_4. *La famille de tous les ensembles linéaires parfaitement mesurables est de la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$* [3]).

Démonstration. Nous prouverons que $C_1 > C_4$. D'après C_1 il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui jouit de la propriété **L**. Cette propriété étant *héréditaire* [4]), la famille de tous les ensembles jouissant de la propriété **L** est évidemment de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

En vertu du théorème 1, la puissance de la famille de tous les ensembles dont toutes les images continues jouissent de la propriété **C** est aussi de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$. La proposition C_4 en résulte tout de suite.

Il est à remarquer que l'existence de $2^{\aleph_0}$ ensembles indénombrables parfaitement mesurables linéaires peut être établie sans faire appel à l'hypothèse ***H***: tels sont p. ex. tous les ensembles indénombrables mesurables (B) et, plus généralement, analytiques.

Voici encore une conséquence immédiate de la proposition C_1 et du théorème 1:

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXII, p. 42.

[2]) *Fund. Math.* IV, p. 368 (Problème 22).

[3]) M. Lavrentieff, *Fund. Math.* VI, p. 156.

[4]) cf. la définition p. 28, renvoi [2]).

Proposition C_5. *Il existe un ensemble linéaire E de puissance du continu et tel que l'intervalle linéaire n'en est pas une image continue* [1]).

D'après le théorème 1, il suffit évidemment de prendre pour E un ensemble quelconque de puissance du continu qui jouisse de la propriété **L**.

Or, si simple que peut paraître la proposition C_5, nous ne savons pas la démontrer sans admettre l'hypothèse ***H***. Cependant nous savons démontrer sans admettre l'hypothèse ***H*** qu'*il existe un ensemble linéaire non dénombrable dont toutes les images continues sont distinctes de l'intervalle.*

En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cela résulte tout de suite de la proposition C_5, et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

Il est à remarquer que sans faire appel à l'hypothèse ***H***, on sait établir l'existence de deux ensembles linéaires de puissance du continu dont aucun n'est une image continue de l'autre; M. A. Lindenbaum a même démontré (sans admettre l'hypothèse ***H***) qu'il existe une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires de puissance du continu, telle qu'aucun d'eux n'est une image continue d'aucun autre [2]).

La proposition C_1 entraîne en vertu du corollaire 1 la

Proposition C_6. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont aucun sous-ensemble indénombrable ne jouit de la propriété de Baire relativement à l'intervalle (donc, dont tout sous-ensemble indénombrable est de deuxième catégorie).*

---

[1]) *Fund. Math.* XIX, p. 208.

[2]) L'énoncé de cette proposition est publiée dans les *Ann. de le Soc. Polonaise de Math.* X (Séance de la Section de Varsovie du 16.I.1931). En admettant que $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, je l'ai démontré dans *Fund. Math.* XIX, p. 209. Notons à ce propos qu'on peut donner sur le plan une construction effective de $2^{\aleph_0}$ continus dont aucun n'est une image continue d'aucun autre (cf. Z. Waraszkiewicz, *Fund. Math.* XVIII, p. 118, et N. Aronszajn, *Fund. Math.* XIX, p. 134—136).

On déduit de C_1 en vertu des théorèmes 3 et 4 la suivante

Proposition C_7 [1]. *Il y a des ensembles de nombres réels sur lesquels il existe des fonctions de Baire des classes 0, 1 et 2, mais sur lequel il n'existe aucune fonction de Baire de classe 3.*

Or, on ne sait pas s'il y a un ensemble de nombres réels sur lequel il existe une fonction de classe 3, mais sur lequel il n'existe aucune fonction de classe 4 [2].

La proposition C_1 entraîne en vertu du théorème 5 la solution négative du problème généralisé de la mesure (non négative) pour les ensembles de puissance du continu; plus loin nous déduirons de C_1 cette solution par une autre voie [3].

Le théorème 6 et la proposition C_1 donnent tout de suite cette

Proposition C_8. *Il existe une fonction $f(x)$ continue sur un ensemble linéaire Q de puissance du continu, mais qui n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de Q* [4].

La proposition C_1 et le théorème 7 impliquent immédiatement la

Proposition C_9. *Il existe une suite infinie convergente de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ qui convergent non uniformément sur tout ensemble indénombrable* [5].

§ 6. Equivalences entre les conséquences C_9, C_{10}, C_{11} et C_{12}.

Nous prouverons maintenant (sans utiliser l'hypothèse H) que la proposition C_9 est équivalente à chacune des propositions C_{10}, C_{11} et C_{12} suivantes:

---

[1]) Voir G. Poprougénko, *Fund. Math.* XV, p. 284—286.

[2]) C'est un cas particulier (pour $\alpha = 4$) d'un problème posé par M. Mazurkiewicz sur les fonctions de classe α. Une solution pour $\alpha = 2$ sera donnée plus loin (voir Chap. III, § 2, proposition C_{38}, p. 91).

[3]) cf. p. 60, renvoi [2]). On peut sans peine se débarasser de la condition que la mesure soit non-négative.

[4]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Roumaine* XVII (1934), Nr. 1.

[5]) Voir W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. et Lettres Varsovie* 1928, p. 84—87.

Proposition C_{10}. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ et une suite double de fonctions d'une variable réelle $f_n^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots ; n = 1, 2, 3, \ldots)$, telles que*

(i) $$\lim_{n=\infty} f_n^m(x) = f^m(x) \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

(ii) $$\lim_{m=\infty} f^m(x) = 0,$$

et que, quelles que soient la suite infinie croissante de nombres naturels $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ et la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$,

(iii) *l'égalité $\lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x) = 0$ ne se présente que tout au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de x.*

Proposition C_{11} [1]. *Il existe une double suite d'ensembles B_k^i telle que*

(I)
$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= B_1^1 + B_2^1 + \ldots + B_k^1 + \ldots \\ \mathcal{C} &= B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_k^2 + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{C} &= B_1^i + B_2^i + \ldots + B_k^i + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

(II) *les ensembles d'une même ligne sont disjoints*

(III) *quelle que soit la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, le produit $\prod_{i=1}^{\infty} (B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable.*

Proposition C_{12}. *Etant données deux suites infinies différentes de nombres naturels*

$$S = \{k_i\} \qquad \text{et} \qquad T = \{n_i\},$$

convenons d'écrire $T \prec S$, lorsque $n_i \leqslant k_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$

---

[1]) La proposition C_{11} a été déduite de l'hypothèse H par M. M. Banach et Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 128.

Ceci posé, il existe une famille F de la puissance $2^{\aleph_0}$ ayant pour éléments certaines suites infinies de nombres naturels et satisfaisant à la condition: pour chaque suite infinie S de nombres naturels (qu'elle appartienne à F ou non), l'ensemble de toutes les suites T de F différentes deux à deux et telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.

Pour établir l'équivalence entre les propositions C_9, C_{10}, C_{11} et C_{12}, il suffit évidemment de prouver les quatre implications

$$C_9 \to C_{10} \to C_{11} \to C_{12} \to C_9.$$

1° $C_9 \to C_{10}$. Admettons la proposition C_9: il existe donc une suite infinie convergente $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ de fonctions d'une variable réelle qui convergent non uniformément sur chaque ensemble indénombrable. Nous définirons la suite double de fonctions $f_n^m(x)$ comme il suit: posons pour tout $m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ et x réel:

$$(1)\quad f_n^m(x) = 0, \quad si \quad |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m} \quad pour \quad p > n \ et \ q > n$$

et $f_n^m(x) = 1$ dans le cas contraire.

Fixons un m et un x. La suite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, étant par hypothèse convergente, il existe un indice $r = r(m, x)$ tel que

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad p > r \quad et \quad q > r.$$

Nous en concluons tout de suite selon (1) que l'on a $f_n^m(x) = 0$ pour $n \geqslant r$, ce qui donne

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} f_n^m(x) = 0.$$

La formule (2) étant ainsi vraie pour tout m naturel et pour tout x réel, nous n'avons qu'à poser $f^m(x) = 0$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ pour en tirer les formules (i) et (ii).

Soit maintenant $m_1, m_2, m_3, \ldots$ une suite infinie croissante de nombres naturels et admettons que l'égalité (iii) ait lieu pour un ensemble indénombrable N de valeurs de x. Les fonctions $f_n^{m_k}(x)$

ne prenant que deux valeurs 0 et 1, on en conclut qu'il existe pour tout nombre $x \in N$ un indice $\mu(x)$ tel que l'on ait

$$f_{n_k}^{m_k}(x) = 0 \qquad pour \quad k > \mu(x).$$

Il en résulte en vertu de (1) que

$$(3)\quad |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m_k} \qquad pour \quad p > n_k, q > n_k, k > \mu(x) \ et \ x \in N.$$

L'ensemble N étant indenombrable et celui de tous les indices naturels étant dénombrable, il existe un nombre naturel s tel que l'égalité $\mu(x) = s$ se présente pour une infinité indénombrable de nombres $x \in N$. Soit N_1 leur ensemble. D'après (3) on a donc

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m_k} \qquad pour \quad p > n_k, q > n_k, k > s \quad et \quad x \in N_1.$$

Comme $m_k \geqslant k$ (la suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ étant croissante), il en résulte aussitôt que la suite infinie de fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ converge uniformément sur l'ensemble indénombrable N_1, contrairement à la propriété admise de cette suite.

Ainsi l'égalité (iii) ne peut être vérifiée que pour les nombres réels x formant un ensemble au plus dénombrable. La condition (iii) de la proposition C_{10} est donc également réalisée.

2° $C_{10} \to C_{11}$. Admettons la proposition C_{10} et soient $f^m(x)$ et $f_n^m(x)$ les suites de fonctions qui satisfont aux conditions (i) — (iii) de la proposition C_{10}.

Posons pour i et k naturels, où $k > 1$:

$$(4)\qquad B_1^i = \sum_{n=1}^{\infty} E_x \left[|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right]$$

et

$$(5)\quad B_k^i = \prod_{n=k}^{\infty} E_x \left[|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right] - E_x \left[|f_{k-1}^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right].$$

Nous allons montrer que la suite double d'ensembles B_k^i satisfait aux conditions (I) — (II) de la proposition C_{11}.

Soit à ce but i un indice et x un nombre réel donnés. D'après (i) il existe un indice p tel que

$$|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \qquad pour \quad n \geq p;$$

soit k le plus petit de tels indices p. On déduit sans peine de (4) et (5) que l'on a alors $x \in B_k^i$. La suite double B_k^i satisfait donc à la condition (I) et les formules (4) et (5) montrent d'elles-mêmes qu'elle remplit aussi la condition (II).

Soit maintenant $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie de nombres naturels. On a encore selon (4) et (5)

$$B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m = \prod_{p=n_m}^{\infty} E_x \left[|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \right]$$

et

$$(6) \quad \prod_{m=1}^{\infty} (B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{p=n_m}^{\infty} E_x \left[|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \right].$$

Soit x un nombre réel, tel que

$$(7) \qquad x \in \prod_{m=1}^{\infty} (B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m).$$

Il vient en vertu de (6)

$$|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad p \geq n_m \quad et \quad m = 1, 2, \ldots,$$

d'où en particulier

$$|f_{n_m}^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne d'après (ii)

$$\lim_{m=\infty} f_{n_m}^m(x) = 0.$$

Or, en vertu de la proposition C_{10}, cette égalité ne peut être remplie que pour les nombres réels x formant un ensemble au plus dénombrable. La formule (7) ne peut donc se présenter que tout au plus pour une infinité dénombrable des x, de sorte que la suite double $\{B_k^i\}$ satisfait également à la condition (III) de la proposition C_{11}.

3° $C_{11} \to C_{12}$ [1]). Admettons la proposition C_{11} et soit $\{B_k^i\}$ la suite double d'ensembles satisfaisant aux conditions (I) — (III) de la proposition C_{11}. Désignons par F la famille de toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ n'est pas vide. Nous allons montrer que la famille F satisfait à la condition de la proposition C_{12}.

On voit tout d'abord que la famille F est de puissance du continu. Car d'une part, selon la condition (III) de la proposition C_{11}, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et d'autre part, selon la condition (I) de C_{11}, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre coïncide avec l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels.

Or, considérons une suite infinie quelconque de nombres naturels $S = (k_1, k_2, k_3, \ldots)$. L'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ étant au plus dénombrable selon la condition (III) de C_{11}, il n'y a parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ qui viennent correspondre aux suites différentes $n_1, n_2, n_3, \ldots$ avec $n_i \leqslant k_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ que tout au plus une infinité dénombrable qui ne soient pas vides, puisque deux produits de ce genre sont toujours disjoints d'après la condition (II) de C_{11}. Cela veut dire précisément que l'ensemble des suites T appartenant à la famille F et telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.

4° $C_{12} \to C_9$. Admettons la proposition C_{12} et soit F une famille de suites infinies de nombres naturels qui satisfait à cette proposition. La famille F étant de puissance $2^{\aleph_0}$, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par T_x où x parcourt l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les nombres réels et on peut le faire d'une manière à avoir $T_x \neq T_y$ pour $x \neq y$.

---

[1]) L'équivalence des propositions C_{11} et C_{12} a été démontrée par M. M. Banach et Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 131.

Soit $T_x = (n_1^x, n_2^x, n_3^x, \ldots)$. Nous définirons la suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ comme il suit. Etant donnés un x réel et un n naturel, si n est un terme de la suite infinie

$$n_1^x, n_2^x, n_3^x, \ldots, \tag{8}$$

soit p le plus petit indice tel que $n = n_p^x$; nous poserons dans ce cas $f_n(x) = \frac{1}{p}$ et, si n n'est pas un terme de la suite (8), nous poserons $f_n(x) = 0$.

La suite infinie des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ est ainsi définie pour tout x réel. Nous allons montrer qu'elle satisfait à la proposition C_9.

Soit x un nombre réel et q un nombre naturel quelconques. La définition de $f_n(x)$ implique que pour $n > n_1^x + n_2^x + \ldots + n_q^x = \mu_q(x)$ on a soit $f_n(x) = \frac{1}{v}$ où $p > q$, soit $f_n(x) = 0$. On a donc toujours

$$0 \leqslant f_n(x) < \frac{1}{q} \qquad \textit{pour} \quad n > \mu_q(x),$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ réel.}$$

D'autre part, soit N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels et supposons que la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ converge uniformément pour tout $x \in N$. Il existerait par conséquent pour tout i naturel un indice q_i tel que

$$|f_n(x)| < \frac{1}{i} \qquad \textit{pour} \quad x \in N \quad \textit{et} \quad n \geqslant q_i. \tag{9}$$

Or, d'après la définition de la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nous avons

$$f_{n_i^x}(x) \geqslant \frac{1}{i} \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad \textit{et} \quad x \textit{ réel,}$$

ce qui donne selon (9)

$$n_i^x < q_i \qquad \textit{pour} \quad x \in N \quad \textit{et} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

En désignant donc par S la suite infinie $q_1, q_2, q_3, \ldots$, il vient

$$T_x \prec S \qquad \textit{pour} \quad x \in N.$$

Comme $x \neq y$ entraîne $T_x \neq T_y$, il existerait ainsi une infinité non dénombrable de suites différentes T_x telles que $T_x \prec S$ et on se trouverait de la sorte en contradiction avec la proposition C_{12}. La suite infinie $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ satisfait donc à la proposition C_9, c. q. f. d.

Ainsi, *les propositions* C_9, C_{10}, C_{11} *et* C_{12} *sont équivalentes.*

Le problème si elles sont équivalentes aussi à l'hypothèse H ou à la proposition C_1, dont elles sont des conséquences, reste ouvert.

§ 7. Origines et applications des propositions $C_9 - C_{12}$.

La proposition C_9 a été établie par moi (à l'aide de l'hypothèse H) pour démontrer que le théorème connu de T. Egoroff, à savoir que les suites convergentes de fonctions mesurables convergent uniformément, lorsqu'on néglige un ensemble de mesure (extérieure) aussi petite qu'on le veut, n'admet pas d'extension aux fonctions quelconques d'une variable réelle [1]).

La proposition C_{10} a été démontrée par moi (aussi à l'aide de l'hypothèse H) pour montrer que le théorème de M. Fréchet sur les suites doubles de fonctions mesurables n'admet pas d'extension aux fonctions arbitraires [2]).

Le théorème de T. Egoroff implique que parmi les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant à la proposition C_9 il y a qui sont non mesurables, et le théorème de M. Fréchet montre qu'il en est de même pour les fonctions $f_n^m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$ qui satisfont aux conditions (i) — (iii) de la proposition C_{10}.

---

[1]) *C. R. Soc. Sc. Varsovie* 1928, p. 84 — 87. Pour l'équivalence des propositions C_9 et C_{11} voir ma note dans *Fund. Math.* XIV, p. 277—280.

[2]) *Monatshefte f. Math. u. Phys.* XXXIX, p. 233. Pour l'équivalence des propositions C_{10} et C_{11} voir ma note dans *Studia Mathem.* IV, p. 15 et suiv.

La proposition C_{11} a été établie (à l'aide de l'hypothèse H) par M. M. S. Banach et C. Kuratowski [1]) pour en déduire la solution négative du *problème de la mesure généralisé* [2]). Dans une Note récente [3]) j'ai déduit la proposition C_{11} directement de la proposition C_1. Mais le théorème de MM. Banach et Kuratowski peut être déduit aussi *directement* de la proposition C_1 (sans passer par C_{11}), à savoir par l'emploi immédiat du théorème 5, établi p. 44. Une autre démonstration sera donnée au Chap. IV, § 3 (voir proposition C_{53}).

Il est à remarquer que l'on peut établir facilement l'implication suivante:

$P_4 \to C_{11}$. Admettons à ce but la proposition P_4 et soit $\{A^i_x\}$ un système d'ensembles assujetti aux conditions 1) — 3) de cette proposition. Posons

$$B^i_k = A^i_k \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad \textit{et} \quad k = 2, 3, 4, \ldots \tag{10}$$

et

$$B^i_1 = \mathcal{C} - \sum_{k=2}^{\infty} B^i_k. \tag{11}$$

Nous allons montrer que le système d'ensembles B^i_k satisfait aux conditions (I) — (III) de la proposition C_{11}.

Qu'il satisfait aux conditions (I) et (II) de C_{11}, cela résulte facilement de (10) et (11) en vertu des conditions 1) et 2) de P_4, admises pour A^i_x. Pour établir la condition (III) de C_{11}, considérons une suite infinie quelconque $k_1, k_2, \ldots$ de nombres naturels. Le système d'ensembles A^i_x satisfaisant à la condition 3) de la proposition P_4 et cette dernière étant, comme nous savons [4]), équivalente à la condition 3''), l'ensemble $\mathcal{C} - \sum_{i=1}^{\infty} A^i_{k_i+1}$ est au plus dénombrable. Or, la condition (II) de C_{11}, qui vient d'être établie, entraine selon (10):

[1]) *Fund. Math.* XIV, p. 128.

[2]) Cf. p. 44, th. 5 et plus loin Chap. IV, § 3, proposition C_{53}.

[3]) *Fund. Math.* XXII (à paraître).

[4]) Voir Chap. I, p. 18.

$$B^i_1 + B^i_2 + \ldots + B^i_{k_i} \subset \mathcal{C} - B^i_{k_i+1} = \mathcal{C} - A^i_{k_i+1},$$

ce qui donne tout de suite

$$\prod_{i=1}^{\infty} (B^i_1 + B^i_2 + \ldots + B^i_{k_i}) \subset \prod_{i=1}^{\infty} (\mathcal{C} - A^i_{k_i+1}) = \mathcal{C} - \sum_{i=1}^{\infty} A^i_{k_i+1},$$

de sorte que la condition (III) de C_{11} est également réalisée.

Notons que l'on peut définir *effectivement* une suite double d'ensembles B^i_k satisfaisant aux conditions (I) et (II) de la proposition C_{11} et telle que pour chaque suite infinie de nombres naturels $k_1, k_2, k_3, \ldots$, l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (B^i_1 + B^i_2 + \ldots + B^i_{k_i})$ soit *non-dense*. Il suffit à ce but, pour tout nombre naturel i, de ranger en une suite infinie tous les intervalles $\frac{l}{i} \leqslant x < \frac{l+1}{i}$ (où $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et de désigner par B^i_k le k-ième terme de cette suite.

Par contre, sans admettre l'hypothèse H, nous ne savons pas démontrer l'existence d'une suite double d'ensembles B^i_k satisfaisant aux conditions (I) et (II) de C_{11} et telle que pour chaque suite infinie $k_1, k_2, k_3, \ldots$ de nombres entiers positifs, l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (B^i_1 + B^i_2 + \ldots + B^i_{k_i})$ soit *de mesure nulle*. On voit sans peine que parmi les ensembles B^i_k formant une telle suite double il y a nécessairement des ensembles non mesurables.

§ 8. Proposition C^*_1 et son équivalence avec C_1.

Nous dirons qu'une famille Ξ de suites finies de nombres naturels est *complète*, si quelle que soit la suite finie de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (appartenant à Ξ ou non), il existe une suite $n_1, n_2, \ldots, n_l$ de Ξ telle que $l \geqslant k$ et $n_i = m_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

D'après M. C. Kuratowski on peut démontrer sans utiliser l'hypothèse H que la proposition C_1 équivaut à la proposition suivante:

Proposition C^*_1. *Il existe une suite double d'ensembles B^i_k qui satisfait aux conditions* (I) *et* (II) *de la proposition C_{11} et à la condition suivante*

(III*) *quelle que soit la famille complète de suites* $\mathfrak{S}$, *l'ensemble*

$$C - \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_i} B^1_{n_1} \cdot B^2_{n_2} \cdot \ldots \cdot B^i_{n_i},$$

où la sommation s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, \ldots, n_i)$ de la famille $\mathfrak{S}$, *est au plus dénombrable.*

Voici une esquisse de démonstration de l'équivalence entre C_1 et C_1^* [1]).

1° $C_1 \to C_1^*$. Soit N un ensemble de M. Lusin contenu dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des nombres irrationnels. Désignons par B^i_k l'ensemble de tous les éléments de N dont le développement en fraction continue admet le nombre k comme son i-ème dénominateur. Le système $\{B^i_k\}$ satisfait aux conditions de la proposition C_1^*.

2° $C_1^* \to C_1$. Etant donnée une suite double $\{B^i_k\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions de la proposition C_1^*, l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots$ pour lesquels le produit $\prod_{i=1}^{\infty} B^i_{n_i}$ est non vide constitue un ensemble de M. Lusin.

La déduction de ces implications s'appuie sur le lemme suivant, dont la démonstration n'offre pas de difficulté:

$N_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$ *désignant l'ensemble de tous les nombres irrationnels dont le développement en fraction continue admet le nombre* $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_i}$ *pour i-ème reduit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ouvert G soit dense dans l'ensemble* $\mathcal{H}$, *est que la famille de toutes les suites finies de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_i$ pour lesquelles on a $N_{n_1, n_2, \ldots, n_i} \subset G$ soit complète.*

§ 9. Conséquences C_{13} et C_{14} de C_1.

La proposition C_1 entraîne en vertu du théorème 8, p. 47, la

Proposition C_{13}. *Il existe une suite infinie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ de fonctions d'une variable réelle telles qu'étant donnée une suite infinie croissante quelconque d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels la limite (finie ou infinie) $\lim_{k=\infty} \varphi_{m_k}(x)$ existe est au plus dénombrable* [1]).

[1]) Une démonstration détaillée sera publiée par M. C. Kuratowski dans *Fund. Math.* XXII.

Admettons, en effet, la proposition C_1. Il existe donc un ensemble N de puissance du continu jouissant de la propriété **L**. Soit $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant aux conditions du théorème 8. L'ensemble N étant de puissance du continu, il existe une fonction $\vartheta(x)$ qui établit une correspondance biunivoque entre les nombres x de $\mathcal{E}$ et les nombres de N. Posons $\varphi_m(x) = f_m(\vartheta(x))$ pour x réels et pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ Les fonctions $f_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant aux conditions du théorème 8, on voit sans peine que les fonctions $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfont à la proposition C_{13}.

La proposition C_1 implique en vertu du théorème 9, p. 48, la

Proposition C_{14}. *Il existe un ensemble linéaire qui jouit de la propriété* **M** *et qui n'est pas un* F_σ [2]).

Admettons, en effet, la proposition C_1 et soit N un ensemble satisfaisant à cette proposition: Evidemment l'ensemble N n'est pas un F_σ; or, d'après le théorème 9, il jouit de la propriété **M**.

§ 10. Ensembles toujours de I-re catégorie.

Un ensemble (linéaire) est dit d'après M. N. Lusin [3]) *toujours de première catégorie,* s'il est de première catégorie de Baire sur tout ensemble (linéaire) parfait.

Un ensemble indénombrable qui est toujours de première catégorie ne peut pas être mesurable (*B*), ni même *analytique,* tout

[1]) Cette proposition (qui constitue la solution négative d'un problème posé par M. Saks) a été démontrée par moi à l'aide de l'hypothèse ***H*** dans *Fund. Math.* XVIII, p. 110 et suivantes. Cf. aussi Chap. IV, § 2, proposition C_{50}.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* VIII, p. 223. La proposition C_{14} résout un problème posé par M. K. Menger (*Sitzungsber. Akad. Wien* 133 (1924), p. 421); cf. aussi W. Hurewicz, *Fund. Math.* X, p. 196.

[3]) *Fund. Math.* XXI, p. 115.

ensemble analytique indénombrable contenant un sous-ensemble parfait. Or, le problème s'il existe un *complémentaire analytique* (linéaire) indénombrable qui soit toujours de première catégorie équivaut à un des plus difficiles problèmes de la théorie des ensembles analytiques, notamment à celui d'existence d'un complémentaire analytique indénombrable ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

En effet, d'une part il est évident qu'un ensemble toujours de première catégorie ne contient aucun sous-ensemble parfait. D'autre part, admettons qu'il existe un complémentaire analytique (linéaire) Q, indénombrable et dépourvu de sous-ensembles parfaits. Les *constituantes* [1]) du complémentaire analytique Q, en tant que mesurables (B) [2]), sont donc toutes au plus dénombrables, et dans ce cas, comme nous avons démontré avec M. Lusin [3]), l'ensemble Q est toujours de première catégorie.

Il est à remarquer que *l'hypothèse qu'il existe un complémentaire analytique (linéaire) de puissance du continu et qui est un ensemble toujours de première catégorie implique l'hypothèse* ***H***. En effet, Q désignant un tel complémentaire analytique, il n'existe parmi les sous-ensembles de Q aucun ensemble parfait et les constituantes de Q sont toutes au plus dénombrables. Tout complémentaire analytiques étant une somme de ses $\aleph_1$ constituantes, Q est de puissance $\leqslant \aleph_1$; comme il est par hypothèse de puissance du continu, on aurait $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ [4]).

---

[1]) Voir N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 188.

[2]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 264.

[3]) N. Lusin et W. Sierpiński *Rend. Accad. Lincei*, vol. VII ser. 6 (1928), p. 214—215.

[4]) Un autre problème concernant les complémentaires analytiques et dont la solution positive impliquerait l'hypothèse ***H*** est le suivant:

Existe-t-il une fonction d'une variable réelle $f(x)$, dont l'image géométrique (la „courbe“ $y = f(x)$) *soit un complémentaire analytique dépourvu de sous-ensembles parfaits?* (voir N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 287).

Théorème 10. *Il existe une fonction $f(x)$ continue dans l'ensemble $\mathcal{CD}$, à valeurs distinctes dans cet ensemble et qui transforme tout sous-ensemble de $\mathcal{CD}$ qui jouit de la propriété* **L** *en un ensemble toujours de première catégorie* [1]).

Démonstration. Q étant un ensemble linéaire parfait et δ un nombre positif, il existe, comme on sait, une suite infinie $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ d'ensembles parfaits de diamètre $< \delta$, disjoints, situés dans Q et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ est *dense* dans Q, tandis que chacun des ensembles Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est *non-dense* dans Q.

Il en résulte sans peine l'existence d'un système d'ensembles parfaits $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ situés dans l'intervalle $\mathcal{I}$ et assujettis à la condition: quels que soient les nombres naturels $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$, les ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ $n = 1, 2, \ldots$ sont de diamètre $< \frac{1}{k}$, disjoints deux à deux, situés dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ est *dense* dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, tandis que chacun des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, 1}$, $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, 2}, \ldots$, $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}, \ldots$ y est *non-dense*.

Posons pour $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$S_k = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

(où la sommation s'étend à tous les systèmes de k nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$) et

$$T = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \ldots$$

Soit x un nombre de l'ensemble $\mathcal{CD}$ et

$$x = \frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \frac{1}{|n_3|} + \ldots$$

son développement en fraction continue infinie. On déduit de la définition des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ que

$$f(x) = P_{n_1} \cdot P_{n_1, n_2} \cdot P_{n_1, n_2, n_3} \ldots$$

---

[1]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.* XXI, p. 119—122.

est un point bien déterminé de l'ensemble T. La fonction $f(x)$ établit, comme on voit sans peine, une correspondance biunivoque entre les nombres x appartenant à l'ensemble $\mathfrak{W}$ et les points de l'ensemble T. Le diamètre de l'ensemble $P_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}$ étant $< 1/k$, on montre aussi que la fonction $f(x)$ est continue dans $\mathfrak{W}$.

Soit enfin P un ensemble parfait quelconque. Posons

$$R = \underset{x}{E}\,[x \in \mathfrak{W},\ f(x) \in P]. \tag{12}$$

L'ensemble P étant fermé et la fonction $f(x)$ continue dans $\mathfrak{W}$, l'ensemble R est fermé dans $\mathfrak{W}$. Comme tel, il admet donc une décomposition en deux ensembles disjoints

$$R = R_1 + R_2, \tag{13}$$

où R_1 est *non-dense* et R_2 *ouvert* dans $\mathfrak{W}$.

Nous allons montrer d'abord que l'ensemble $f(R_2)$ est *de première catégorie* dans P.

Etant donnée, en effet, une suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$, désignons par $Q_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ l'ensemble de tous les nombres x de $\mathfrak{W}$ dont le développement en fraction continue admet comme son k-ième réduit le nombre $\dfrac{1}{|n_1|} + \dfrac{1}{|n_2|} + \dots + \dfrac{1}{|n_k|}$.

L'ensemble $Q_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ est donc une *portion* de $\mathfrak{W}$, notamment le produit de $\mathfrak{N}$ par l'intervalle

$$\left[\frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots + \frac{1}{|n_k|},\quad \frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots + \frac{1}{|n_{k-1}|} + \frac{1}{|n_k + 1|}\right]$$

ou

$$\left[\frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots + \frac{1}{|n_{k-1}|} + \frac{1}{|n_k + 1|},\quad \frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots + \frac{1}{|n_k|}\right],$$

suivant que k est pair ou impair.

On voit sans peine que tout ensemble ouvert dans $\mathfrak{W}$, donc en particulier l'ensemble R_2, est la somme d'un nombre fini on d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. La définition de la fonction $f(x)$ montre que

$$f(Q_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = T \cdot P_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \tag{14}$$

quelle que soit la suite finie d'indices $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Pour tout $Q_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset R_2$ on a donc en vertu de (12), (13) et (14)

$$T \cdot P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset P \tag{15}$$

et on conclut des définitions de T et des ensembles parfaits $P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ que T est dense dans $P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$; ce dernier étant fermé (de même que l'ensemble P), on tire donc de (15)

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset P. \tag{16}$$

D'autre part, il vient selon la définition de T

$$T \cdot P_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset \sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}$$

où le membre droit est de première catégorie dans l'ensemble $P_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, en tant qu'une somme dénombrable des ensembles non-denses dans lui. Il en est donc de même du membre gauche; en vertu de (16) et (14) on en conclut aussitôt que l'ensemble $f(Q_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ est de première catégorie dans P. L'ensemble R_2 étant composé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, l'ensemble $f(R_2)$ est donc encore de première catégorie dans P.

Ceci établi, soit N un ensemble contenu dans $\mathfrak{W}$ et jouissant de la propriété **L**. Il s'agit de montrer que l'ensemble $f(N)$ est de première catégorie dans P.

Or, d'après (12) on a $P \cdot f(N) = f(NR)$, d'où en vertu de (13) $P \cdot f(N) = f(NR_1) + f(NR_2)$. L'ensemble R_1 étant non-dense et l'ensemble N jouissant de la propriété **L**, l'ensemble NR_1, donc aussi l'ensemble $f(NR_1)$, est au plus dénombrable. Evidemment on a $f(NR_2) \subset f(R_2)$ et l'ensemble $f(R_2)$ est, comme nous savons, de première catégorie dans P. L'ensemble $P \cdot f(N) = f(NR) = f(NR_1) + f(NR_2)$ est donc aussi de première catégorie dans P, c. q. f. d.

§ 11. Proposition C_{15} et ses conséquences $C_{16} - C_{19}$.

En vertu du théorème 10, la proposition C_1 implique immédiatement cette

Proposition C_{15}. *Il existe un ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui est une image continue et biunivoque d'un ensemble jouissant de la propriété* **L**.

Le cas particulier du théorème 1 est que toute image continue d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** jouit de la propriété **C**. La proposition C_{15} entraîne donc tout de suite la

Proposition C_{16}. *Il existe un ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui jouit de la propriété* **C**.

Un tel ensemble doit être regardé comme extrêmement pauvre en éléments aussi bien au point de vue de la catégorie, qu'au point de vue de la mesure.

D'après la conséquence C_{15} de C_1, il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui est toujours de première catégorie. Nous ne savons pas démontrer l'existence d'un tel ensemble sans admettre l'hypothèse H. Or, on démontre sans admettre cette hypothèse qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable (de puissance $\aleph_1$) qui est toujours de première catégorie [1]). Cependant on sait démontrer le théorème suivant sans admettre l'hypothèse H:

Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions mesurables d'une variable réelle et Π une famille de puissance $\aleph_1$ d'ensembles linéaires parfaits, il existe un ensemble linéaire indénombrable que chaque fonction de la famille Φ transforme en ensemble qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait appartenant à la famille Π [2]).

[1]) N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 155; W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 102.

[2]) Voir W. Sierpiński, dans *Fund. Math.* XXII, p. 47.

La propriété d'être un ensemble *toujours de première catégorie* étant évidemment héréditaire [1]) et chaque ensemble de puissance du continu ayant $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles, la proposition C_{15} entraîne aussitôt cette

Proposition C_{17}. *La famille de tous les ensembles linéaires qui sont toujours de première catégorie est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.*

Comme tout ensemble qui est toujours de première catégorie jouit évidemment de la propriété de Baire, la proposition C_{17} entraîne à son tour la

Proposition C_{18}. *La famille de tous les ensembles linéaires qui jouissent de la propriété de Baire est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.*

Etant donné un ensemble toujours de première catégorie, sa *fonction caractéristique* (c. à d. qui prend la valeur 1 aux points de cet ensemble et la valeur 0 partout ailleurs) satisfaitit évidemment à la condition de Baire. La proposition C_{17} entraîne donc encore la suivante

Proposition C_{19}. *La famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.*

D'après R. Baire toute fonction représentable analytiquement satisfait à la condition de Baire [2]). La famille de toutes les fonctions représentables analytiquement d'une variable réelle ayant, comme on soit, la puissance du continu, donc une puissance $< 2^{2^{\aleph_0}}$, on conclut de C_{19} qu'*il existe des fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire, mais non représentables analytiquement.*

Cette proposition a été déduite de l'hypothèse H par M. N. Lusin en 1914 [3]) et ensuite démontrée par lui sans utiliser cette

[1]) au sens de la définition, p. 28.

[2]) La démonstration de ce théorème a été donnée pour la première fois dans le Mémoire de M. H. Lebesgue, *Journ. de Math.* (1905), p. 188.

[3]) *C. R. Paris* 158, p. 1259.

hypothèse [1]). On a trouvé même des exemples *effectifs* de fonctions satisfaisant à la condition de Baire, mais non représentables analytiquement [2]), ce qui a donné la solution complète d'une question posée par M. Lebesgue, l. c. [3]).

Au sujet des conséquences $C_{17} - C_{19}$ de C_{15} il est à remarquer, en outre, ce qui suit. Comme il a été déjà dit, on sait établir sans l'hypothèse H l'existence d'un ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ et qui est toujours de première catégorie. Cet ensemble ayant $2^{\aleph_1}$ sous-ensembles, il en résulte sans peine qu'on peut démontrer sans admettre l'hypothèse H que *la famille de tous les ensembles linéaires qui sont toujours de première catégorie* et, par suite, *la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire, ont une puissance* $> 2^{\aleph_1}$, *donc dépassant* $\aleph_1$.

§ 12. Images géométriques des fonctions. Fonctions superposées. Proposition C_{20} et ses conséquences $C_{21} - C_{24}$.

A présent nous allons déduire de C_1 une conséquence (d'origine récente) dont nous ferons ensuite quelques applications aux images géométriques des fonctions réelles sur le plan.

Soit N un ensemble linéaire ayant la propriété **L** et situé dans l'ensemble $\mathcal{ID}$. Considérons une fonction $f(x)$ continue dans ce dernier et satisfaisant au théorème 10. L'ensemble $K = f(N)$ est donc *toujours de première catégorie* au sens de la définition p. 63.

Soit J l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in N$ et $y = f(x)$. La fonction $f(x)$ étant continue dans N, on voit sans peine que l'ensemble J est homéomorphe à N. Plaçons l'ensemble K sur l'axe OY: c'est évidemment la *projection* de l'ensemble J sur l'axe OY.

[1]) *Fund. Math.* II, p. 157.

[2]) Voir p. ex. N. Lusin et W. Sierpiński, *Journ. de Math.* II (1923), p. 72.

[3]) Cf. aussi N. Lusin, *Fund. Math.* XX, p. 114—116.

Soient S l'ensemble-somme de toutes les parallèles à l'axe OX passant par les points de l'ensemble K et T l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in \mathcal{ID}$ et $y = f(x)$. La fonction $f(x)$ étant continue dans l'ensemble $\mathcal{ID}$, qui est un G_δ, on voit sans peine que l'ensemble T est aussi un G_δ. De plus, la fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes dans $\mathcal{ID}$, on a $J = ST$.

Or, si l'ensemble S jouissait de la propriété de Baire, il en serait de même de l'ensemble $J = ST$ (car le produit de deux ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit également de cette propriété). J étant homéomorphe à N et la propriété de Baire étant, comme j'ai démontré [1]), invariante envers les transformations homéomorphes, l'ensemble N jouirait de la propriété de Baire, ce qui est incompatible en vertu du th. 2, p. 41, avec la propriété **L** de N. Par conséquent l'ensemble S est dépourvu de la propriété de Baire.

La conséquence suivante de C_1 se trouve ainsi démontrée:

Proposition C_{20}. *Il existe un ensemble linéaire K situé sur l'axe d'ordonnées et jouissant de la propriété de Baire (même un ensemble toujours de première catégorie) tel que l'ensemble plan S formé de toutes les parallèles à l'axe d'abscisses qui passent par les points de K ne jouit pas de la propriété de Baire* [2]).

Ceci établi, définissons comme il suit une nouvelle fonction $g(y)$ de variable réelle, en conservant les notations précédentes.

Si y *non*-$\in K$, posons $g(y) = -1$.

Si $y \in K$, il existe dans N un x bien déterminé tel que $y = f(x)$, car $K = f(N)$ et la fonction $f(x)$ est à valeurs distinctes dans N; nous poserons alors $g(y) = x$.

La fonction $g(y)$ satisfait évidemment à la condition de Baire, puisque $\underset{y}{E}[g(y) \neq -1] = K$ est un ensemble toujours de première catégorie. Or, l'*image géométrique* $\mathfrak{G}$ de la fonction $g(y)$,

[1]) *Fund. Math.* IV, p. 319.

[2]) Voir ma Note dans *C. R. Paris*, 197, p. 1716 (Note du 26 décembre 1933); cf. aussi *Fund. Math.* XXII, p. 54.

c. à d. l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $x = g(y)$, ne jouit pas de la propriété de Baire, puisque si $(\mathfrak{G})$ jouissait de cette propriété, il en serait de même de l'ensemble $(\mathfrak{G}) - \underset{(x,y)}{I_2'}[x = -1]$, qui coïncide évidemment avec l'ensemble J. Cependant, comme nous avons vu plus haut, J ne jouit pas de la propriété de Baire. Nous avons donc cette

Proposition C_{21}. *Il existe une fonction (d'une variable réelle) qui satisfait à la condition de Baire, mais dont l'image géométrique ne jouit pas de la propriété de Baire.*

Plus loin nous déduirons d'une autre conséquence de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ une proposition en quelque sorte réciproque, notamment qu'il existe une fonction ne remplissant pas la condition de Baire et dont l'image géométrique jouit de la propriété de Baire (voir Chap. III, proposition C_{44}).

La remarque suivante et la conséquence C_{22} sont dues à M. C. Kuratowski.

Soient K et S les ensembles satisfaisant à la proposition C_{20} et posons $f(x, y) = 1$ ou $f(x, y) = 0$, suivant que $(x, y) \in S$ ou (x, y) *non-*$\in S$. La fonction $f(x, y)$ *de deux* variables réelles, ainsi définie, ne satisfait pas à la condition de Baire, puisque l'ensemble S n'a pas la propriété de Baire. Or, la fonction $f(x, y)$ ne dépend évidemment que de la variable y et si l'on pose pour x et y réels $f(x, y) = \varphi(y)$, la fonction $\varphi(y)$ comme fonction *d'une seule* variable réelle y, jouit de la propriété de Baire, puisque $\underset{y}{E}[\varphi(y) \neq 0] = K$ et K est un ensemble toujours de première catégorie.

D'autre part, posons pour x et y réels $F(x, y) = y$. C'est évidemment une fonction continue de deux variables réelles. Or, $\varphi(y)$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble (linéaire) K, donc une fonction d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire, la fonction $F(x, \varphi(y))$ est la fonction caractéristique de l'ensemble (plan) S, donc une fonction qui ne satisfait pas à la

condition de Baire. On aboutit ainsi à la conséquence suivante de C_{20}:

Proposition C_{22}. *Une fonction continue de deux fonctions* (d'une variable réelle) *satisfaisant à la condition de Baire peut* (comme fonction de deux variable réelles) *ne pas satisfaire à la condition de Baire.*

Pour les fonctions continues d'une fonction (d'une variable réele) satisfaisant à la condition de Baire un tel cas est, comme on sait, impossible. Or, nous allons déduire de C_1 (voir plus loin C_{24}, p. 75) que, par contre, il existe des fonctions satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue (d'une variable réelle) qui ne satisfont pas à la condition de Baire.

Considérons d'abord une courbe continue de Peano

$$(17) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

remplissant le carré $\mathcal{Q}^2 = [0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$. On peut la définir, comme on sait, d'une manière que les points du carré $\mathcal{Q}^2$ aux deux coordonnées irrationnelles soient des points *simples* de la courbe (17), c. à d. qu'il existe pour tout couple (x_0, y_0) de deux nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{Q}$ un nombre réel *unique* t_0 de cet intervalle tel que $x_0 = \varphi(t_0)$ et $y_0 = \psi(t_0)$. Telles sont p. ex. les „courbes remplissant le carré" définies en effet par G. Peano et par M. D. Hilbert.

Posons encore $\psi(x) = \psi(0)$ pour $x < 0$ et $\psi(x) = \psi(1)$ pour $x > 1$. La fonction $\psi(x)$ ainsi prolongée est continue pour tout x réel.

Soit M la courbe gauche

$$(18) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = t \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

enfin, soient U l'ensemble de tous les points (a, b) du carré $\mathcal{Q}^2$ tels que la droite $x = a$, $y = b$ rencontre l'ensemble M en un seul point et V l'ensemble de tous les nombres t de l'intervalle $\mathcal{Q}$ tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \in U$.

La courbe (18) étant continue et bornée, on voit sans peine que les formules

(19) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

établissent une homéomorphie entre les points t de l'ensemble V et les points (x, y) de l'ensemble U.

Considérons un ensemble $N \subset \mathcal{W}$ satisfaisant à la proposition C_1, c. à d. jouissant de la propriété **L**. On a donc pour tout $x \in N$ les relations $x \in \mathcal{W}$ et $f(x) \in \mathcal{W}$ où $f(x)$ désigne une fonction satisfaisant au théorème 10, p. 65.

L'ensemble $A = \underset{(x,y)}{E}[x \in N;\ y = f(x)]$ est donc contenu dans U et en posant $B = \underset{t}{E}[t \in V;\ (\varphi(t), \psi(t)) \in A]$, on voit que les formules (19) établissent aussi une homéomorphie entre les points (x, y) de A et les points t de B. Or, l'ensemble A est comme nous savons, homéomorphe à N et l'ensemble $f(N)$ est une projection biunivoque de A sur l'axe OY. Il en résulte tout de suite que $\psi(B) = f(N)$ et que ψ est une fonction à valeurs distinctes dans B. Comme ensemble homéomorphe à N, l'ensemble B ne jouit pas de la propriété de Baire. Ainsi, on parvient à la

Proposition C_{23}. *Il existe une fonction continue de variable réelle transformant d'une façon biunivoque un certain ensemble dépourvu de la propriété de Baire en un ensemble qui est toujours de première catégorie.*

L'ensemble B, en tant que ne jouissant pas de la propriété de Baire, est indénombrable et il existe pour un intervalle I une décomposition $IB = E_1 + E_2$ en deux ensembles disjoints, indénombrables dans chaque sous-intervalle de I. Or, l'ensemble B étant homéomorphe à N, chaque sous-ensemble non dénombrable de B est homéomorphe à un sous-ensemble non dénombrable de N, donc, d'après le théorème 2, p. 41, à un ensemble qui ne jouit pas de la propriété de Baire. Par conséquent aucun sous-ensemble indénombrable de B ne jouit de la propriété de Baire. Il en résulte que les ensembles E_1 et E_2 sont partout de deuxième catégorie dans I.

Définissons maintenant la fonction $\vartheta(x)$ d'une variable réelle comme il suit. Posons

(19) $$\vartheta(x) = 1 \qquad \textit{pour} \quad x \in \psi(E_1)$$

et

(20) $$\vartheta(x) = 0 \qquad \textit{pour} \quad x \textit{ non-}\in \psi(E_1).$$

C'est évidemment une fonction satisfaisant à la condition de Baire, car l'ensemble

$$\underset{x}{E}[\vartheta(x) \neq 0] = \psi(E_1) \subset \psi(B) = f(N),$$

en tant que contenu dans $f(N)$, est toujours de première catégorie.

Or, posons

(21) $$f(x) = \vartheta(\psi(x)) \qquad \textit{pour tout } x \textit{ réel;}$$

c'est donc une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue (d'une variable réelle).

Si $x \in E_1$, on a d'après (19) et (21) $f(x) = 1$. Si $x \in E_2$, on a d'après (20) et (21) $f(x) = 0$, la fonction $\psi(x)$ étant à valeurs distinctes dans $IB = E_1 + E_2$. Par conséquent:

$$\underset{x}{E}[f(x) = 1] \supset E_1 \qquad \textit{et} \qquad \underset{x}{E}[f(x) = 0] \supset E_2$$

et, les ensembles E_1 et E_2 étant partout de deuxième catégorie dans l'intervalle I, il en résulte que la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la condition de Baire. On a ainsi cette

Proposition C_{24}. *Il existe une fonction de variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et qui est une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue* [1]).

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Annals of Mathematics* 1934 (à paraître).