CHAPITRE I.

Propositions équivalentes à l'hypothèse du continu.

Proposition P_1. *L'ensemble de tous les points du plan est une somme de deux ensembles dont l'un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses* [1].

1^0 $H \rightarrow P_1$. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant (sans faire usage de l'hypothèse H).

Lemme. *Le plan est une somme de deux ensembles, dont l'un est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ sur toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est de puissance $< 2^{\aleph_0}$ sur toute droite parallèle à l'axe d'abscisses* [2].

Démonstration. Il résulte du théorème de M. Zermelo qu'il existe une suite transfinie

$$\text{(i)} \qquad t_1, t_2, t_3, \dots, t_\omega, t_{\omega+1}, \dots, t_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \varphi)$$

formée de tous les nombres réels; nous pouvons supposer que le type φ de cette suite est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu.

---

[1]) Cette proposition a été démontrée par moi en 1919; voir *Bull. Acad. Sc. Cracovie,* Séance du 24 Février 1919. Voir aussi *Fund. Math.* V, p. 179.

[2]) Voir ma note des Comptes rendus de le Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III, XXV (1932), p. 9—10.

Soit P l'ensemble de tous les points (x, y) du plan; désignons par A l'ensemble de tous les points (t_α, t_β) où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ et posons $B = P - A$.

Soit a un nombre réel donné: c'est donc un terme de la suite (i), p. ex. $a = t_\alpha$, où α est un nombre ordinal $< \varphi$. Les points de l'ensemble A à l'abscisse $x = a$ sont des points (t_α, t_β), où $\beta \leqslant \alpha$; comme $\alpha < \varphi$, on a $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$ et il en résulte que la droite $x = a$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de A.

Or, soit b un nombre réel donné, p. ex. $b = t_\beta$.

Les points de $B = P - A$ à l'ordonnée $y = b$ sont, comme on voit sans peine, des points (t_α, t_β) où $\alpha < \beta$; d'après $\beta < \varphi$ on a $\overline{\beta} < 2^{\aleph_0}$ et on en conclut que la droite $y = b$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de B. Le lemme est ainsi démontré.

La proposition $\boldsymbol{P}_1$ résulte aussitôt de notre lemme et de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_1$ est ainsi démontrée.

2° $\boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_1$ et soit $P = A + B$ la décomposition du plan dont il s'agit dans cette proposition.

Soient E un ensemble formé de $\aleph_1$ parallèles à l'axe d'ordonnées et N l'ensemble de tous les points de A qui sont situés sur les parallèles formant l'ensemble E. Comme E contient $\aleph_1$ droites et toute droite de E contient un ensemble au plus dénombrable de points de A (d'après la propriété de A) l'ensemble N est de puissance $\leqslant \aleph_1$. Il en résulte à plus forte raison que la projection orthogonale Π de l'ensemble N sur l'axe d'ordonnées est de puissance $\leqslant \aleph_1$.

Je dis que Π contient tous les points de l'axe d'ordonnées. En effet, soit $(0, b)$ un point donné quelconque de cet axe. La droite $y = b$ contient (d'après la propriété de l'ensemble B) un ensemble au plus dénombrable de points de B; or, cette droite rencontre les parallèles formant E dans un ensemble de points de puissance $\aleph_1$: parmi ces points il y a donc (une infinité indénombrable) des points qui appartiennent à A (comme n'appartenant pas à B) et leur projection sur l'axe d'ordonnées, notamment le point $(0, b)$, appartient à Π (d'après la définition de Π).

Nous avons ainsi démontré que Π contient tous les points de l'axe d'ordonnées: la puissance de l'ensemble Π est donc égale à celle du continu; or, comme nous savons, la puissance de Π ne dépasse pas $\aleph_1$. Il en résulte tout de suite que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{H}$ se trouve donc établie.

Convenons à présent d'appeler ici *courbe* tout ensemble des points (x, y) du plan qui satisfont à l'équation de la forme

$$y = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x = f(y)$$

où f est une fonction univoque d'une variable réelle.

De la proposition $\boldsymbol{P}_1$ on déduit facilement [1]) la

Proposition $\boldsymbol{P}_2$. *Le plan est une somme d'une infinité dénombrable de courbes.*

En effet, soit $P = A + B$ la décomposition du plan qui satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_1$. En ajoutant à l'ensemble A tous les points du plan dont l'ordonnée est rationnelle, et à l'ensemble B tous les points du plan dont l'abscisse est rationnelle, on obtient évidemment une nouvelle décomposition du plan $P = A_1 + B_1$, où l'ensemble A_1 est dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B_1 est dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses. L'ensemble A_1, ainsi que B_1, se compose donc d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun admet un et un seul point sur chaque droite parallèle respectivement à l'axe d'ordonnés et à l'axe d'abscisses. Chacun de ces ensembles est donc une courbe (dans le sens adopté plus haut). Il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_2$.

---

[1]) d'après une remarque de M. N. Lusin. Cf. mon livre *Zarys Teorji Mnogości I* (en polonais), Warszawa 1928, p. 229 et *C. R. Soc. Sc. Varsovie XXV*, p. 11.

On voit sans peine que, réciproquement, $P_2 \to P_1$.

Admettons en effet, que le plan soit une somme d'une infinité dénombrable de courbes et désignons par A et B les sommes de toutes les courbes de la forme $y = f(x)$ et de la forme $x = f(y)$ respectivement. Il est évident que les ensembles A et B satisfont aux conditions de la proposition P_1, de sorte que $P_2 \to P_1$.

Les propositions P_1 et P_2 sont donc équivalentes. La proposition P_1 étant, comme nous avons démontré plus haut, équivalente à l'hypothèse H, la proposition P_2 l'est donc aussi.

Il est à remarquer que si, dans l'espace à 3 dimensions, on appelle *courbe* l'ensemble de tous les points (x, y, z) qui satisfont aux équations $y = f(x)$, $z = g(x)$ ou aux équations $x = f(y)$, $z = g(y)$ ou encore aux équations $x = f(z)$, $y = g(z)$, f et g désignant des fonctions univoques d'une variable réelle, on peut démontrer que l'hypothèse H équivaut à la proposition suivante [1]):

Proposition P_{2^a}. *L'espace à trois dimensions est une somme d'une infinité dénombrable de courbes.*

Proposition P_3. *Il existe une suite infinie de fonctions univoques d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable N de nombres réels, toutes les fonctions de la suite, sauf peut être un nombre fini, transforment N en ensemble de tous les nombres réels* [2]).

1° $H \to P_3$. Admettons l'hypothèse H. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

[1]) Cela résulte sans peine d'une proposition sur l'espace à trois dimensions, que j'ai démontrée (à l'aide de l'hypothèse H) dans *C. R. Soc. Sc. Varsovie XXV*, p. 10.

[1]) Cf. S. Braun et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 2, Propositon (*R*); W. Sierpiński, *Bull. Acad. Serbe* (Glas) CLII (1932), p. 168 et *Fund. Math.* XX, p. 163.

$$x_\omega, x_{\omega+1}, x_{\omega+2}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels différents.

L'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels, ainsi que l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels, ayant la puissance du continu, donc, d'après notre hypothèse, la puissance $\aleph_1$, il résulte tout de suite de la formule $\aleph_1^2 = \aleph_1$, qu'il existe une correspondance d'après laquelle à tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ correspond une suite infinie de nombres réels $(t_1^\alpha, t_2^\alpha, t_3^\alpha, \ldots)$ et une suite infinie de nombres naturels $(n_1^\alpha, n_2^\alpha, n_3^\alpha, \ldots)$ telles que, quelle que soient la suite infinie de nombres réels $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et la suite infinie de nombres naturels $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ remplissant les égalités $x_k = t_k^\alpha$ et $n_k = n_k^\alpha$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

α étant un nombre ordinal transfini $< \Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$ est dénombrable et il existe une suite infinie

$$\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha, \ldots$$

formée de tous ces nombres.

Soit x un nombre réel donné. Il existe donc un nombre ordinal transfini bien déterminé $\alpha < \Omega$, tel que $x = x_\alpha$. Posons pour k naturels

$$(1) \qquad f_k(x) = t^{\xi_k^\alpha}_{n_k^{\xi_k^\alpha}}.$$

Les fonctions $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont ainsi définies pour tous les x réels. Je dis qu'elles satisfont aux conditions de la proposition P_3.

En effet, soit N un ensemble non dénombrable de nombres réels et admettons qu'il existe dans la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une infinité des fonctions qui ne transforment pas l'ensemble N en ensemble de tous les nombres réels. Il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et une suite infinie de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \ldots$ tels que

(2) $$y_k \text{ non-}\epsilon\, f_{m_k}(N).$$

Comme nous savons, il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que

(3) $$m_k = n_k^{\mu} \quad et \quad y_k = t_{m_k}^{\mu} \quad pour \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit maintenant α un nombre ordinal tel que $\mu < \alpha < \Omega$. Il existe donc un indice k tel que $\mu = \xi_k^{\alpha}$, d'où d'après (3):

$$y_k = t^{\xi_k^{\alpha}}_{n_k^{\xi_k^{\alpha}}}.$$

D'après la formule (1), qui définit la fonction $f_k(x)$, on a donc $f_k(x_\alpha) = y_k$, ce qui prouve d'après (2) que x_α *non-*ϵ N.

Nous avons donc x_α *non-*ϵ N pour $\alpha > \mu$, de sorte que l'ensemble N est au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse.

Toutes les fonctions de la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, sauf peut-être un nombre fini, transforment donc l'ensemble N en ensemble de tous les nombres réels. L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_3$ est ainsi démontrée.

2° $\boldsymbol{P}_3 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_3$ et soit N un ensemble de nombres réels de la puissance $\aleph_1$. D'après $\boldsymbol{P}_3$ il existe un indice n tel que $f_n(N) = \mathcal{E}$.

Or, $f_n(x)$ étant une fonction univoque d'une variable réelle et l'ensemble N étant de puissance $\aleph_1$, l'ensemble $f_n(N)$ (qui coïncide avec l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels) est donc de puissance $\leqslant \aleph_1$. Par conséquent $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$, ce qui donne $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_3 \to \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_3$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition $\boldsymbol{P}_1$ peut être déduite directement de la proposition $\boldsymbol{P}_3$ comme il suit: J_n désignant l'image géométrique de la fonction $f_n(x)$, c. à d. l'ensemble de tous les points (x, y) du plan P, tels que $f_n(x) = y$, on pose $A = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ et $B = P - A$ et on démontre facilement [1]) que les ensembles A et B ainsi définis satisfont aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_1$.

---

[1]) Voir *Fund. Math.* XX, p. 165.

Proposition $\boldsymbol{P}_{3^a}$. *Il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$ à une infinité dénombrable de valeurs* (c. à d. faisant corespondre à tout nombre réel x un ensemble dénombrable $f(x)$) *qui transforme tout ensemble indénombrable de nombres réels en ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels.*

1° $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_{3^a}$. Il suffit évidemment de montrer que $\boldsymbol{P}_3 \to \boldsymbol{P}_{3^a}$. Admettons donc la proposition $\boldsymbol{P}_3$ et soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions (réelles) d'une variable réelle qui satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_3$. Etant donné un nombre réel x, désignons par $f(x)$ l'ensemble (évidemment dénombrable) formé d'ensemble $\mathcal{D}$ (de tous les nombres naturels) et de tous les nombres réels qui sont termes de la suite infinie $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Soit N un ensemble non dénombrable quelconque de nombres réels. D'après la condition de la proposition $\boldsymbol{P}_3$, il existe un nombre naturel n tel que $f_n(N) = \mathcal{E}$. Or, la définition de la fonction--ensemble $f(x)$ entraîne tout de suite que $f(N) \supset f_n(N)$. On a par conséquent $f(N) \supset \mathcal{E}$, ce qui donne aussisôt $f(N) = \mathcal{E}$. La fonction--ensemble $f(x)$ satisfait donc aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_{3^a}$. Il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_3 \to \boldsymbol{P}_{3^a}$.

2 $\boldsymbol{P}_{3^a} \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{3^a}$; soit $f(x)$ la fonction-ensemble qui satisfait aux conditions de cette proposition. Soit N un ensemble arbitraire de nombres réels de puissance $\aleph_1$: d'après la propriété de $f(x)$, on a $f(N) = \mathcal{E}$. Or, $f(x)$ étant une fonction à une infinité dénombrable de valeurs et N étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, l'ensemble $f(N)$ est évidemment de puissance $\aleph_1$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc de puissance $\aleph_1$, de sorte que $2^{\aleph} = \aleph_1$. Il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_{3^a} \to \boldsymbol{H}$.

Les propositions $\boldsymbol{P}_{3^a}$ et $\boldsymbol{H}$ sont donc équivalentes.

Proposition $\boldsymbol{P}_4$. *Il existe un système d'ensembles A_x^i (où i est un nombre naturel et x un nombre réel) tel que*

1) $$\mathcal{E} = \sum_{x \in \mathcal{E}} A_x^i, \qquad pour \qquad i = 1, 2, 3, \ldots;$$

2) $$A_x^i A_y^i = 0 \qquad pour \qquad x \neq y, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

et que

3) *N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que pour* $i \geqslant p$ *et pour tout nombre réel x l'ensemble* $N \cdot A_x^i$ *est non vide.*

1⁰ $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_4$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Elle entraîne, comme nous venons de montrer, la proposition $\boldsymbol{P}_3$. Soit $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle, satisfaisant aux conditions de la propositions $\boldsymbol{P}_3$.

i étant un indice naturel et x un nombre réel donnés, posons

$$A_x^i = \underset{t}{E}\, [f_i(t) = x], \tag{4}$$

c. à d. désignons par A_x^i l'ensemble de tous les nombres réels t tels que $f_i(t) = x$.

Il est évident que le système d'ensembles A_x^i satisfait aux conditions 1) et 2), puisque, d'après (4), on a d'une part $t \in A^i_{f_i(t)}$ pour tout nombre réel t et tout i naturel et d'autre part la formule $t \in A_x^i A_y^i$ entraîne $f_i(t) = x$ et $f_i(t) = y$, d'où $x = y$.

Or, soit N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. D'après la propriété de la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il existe un indice p tel que $f_i(N) = \mathcal{E}$ pour $i \geqslant p$. Pour tout nombre naturel $i \geqslant p$ et tout nombre réel x il existe donc un nombre $t_x^{(i)}$ de N tel que $f_i(t_x^{(i)}) = x$. Il en résulte d'après (4) que $t_x^{(i)} \in A_x^i$, ce qui prouve que $NA_x^i \neq 0$ pour $i \geqslant p$, c. à d. que le système d'ensembles A_x^i satisfait également à la condition 3) de la proposition $\boldsymbol{P}_4$.

2⁰ $\boldsymbol{P}_4 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons maintenant la proposition $\boldsymbol{P}_4$ et soit N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$. D'après 3) il existe un indice i tel que l'ensemble NA_x^i est non vide pour tout x réel. Il en résulte d'après 2) que l'ensemble N admet au moins un point commun avec tout ensemble d'une famille formée de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints. Il s'en suit que N est de puissance $\geqslant 2^{\aleph_0}$. Or, N étant par hypothèse de puissance $\aleph_1$, on conclut que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$ et par conséquent que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, c. à d. que l'on a la proposition $\boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_4$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi démontrée.

Il est à remarquer que la condition 3) équivaut à la condition 3') que voici:

3') *N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que pour tout* $i \geqslant p$ *et pour tout nombre réel x l'ensemble* NA_x^i *est indénombrable.*

Il suffit évidemment de montrer que 3) → 3').

Soient donc: A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3) et N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. L'ensemble N est évidemment la somme d'une famille indénombrable d'ensembles indénombrables disjoints et nous pouvons poser $N = \sum_{\alpha < \Omega} N^\alpha$, où N^α $(\alpha < \Omega)$ sont des ensembles indénombrables et $N^\alpha N^\beta = 0$ pour $\alpha < \beta < \Omega$.

Or, le système des ensembles A_x^i satisfaisant à la condition 3), il existe pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un nombre naturel p_α tel que l'on a $N^\alpha A_x^i \neq 0$ pour tout indice naturel $i \geqslant p_\alpha$ et tout x réel. L'ensemble des indices naturels étant dénombrable et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ ne l'étant pas, il y a évidemment une infinité indénombrable de termes de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ qui sont égaux au même nombre naturel p. Il existe donc une suite infinie croissante de nombres ordinaux $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ telle que $p_{\alpha_\xi} = p$ pour $\xi < \Omega$. Il en résulte en vertu de la définition des nombres p_α que $N^{\alpha_\xi} A_x^i \neq 0$ pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel. Les ensembles A_x^i ont donc, pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel, au moins un élément commun avec tout ensemble N^{α_ξ} où $\xi < \Omega$: ces derniers ensembles étant disjoints et contenus dans N, on conclut que, pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel, les ensembles NA_x^i sont indénombrables. Le système A_x^i satisfait donc à la condition 3'), c. q. f. d.

Nous allons prouver encore que la condition 3) équivaut à la condition 3'') que voici [1]):

[1]) Cf. S. Braun et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 1, proposition (Q), et W. Sierpiński, *Bull. Acad. Serbe* CLII, p. 163.

3'') *Quelle que soient la suite infinie croissante de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ et la suite infinie de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \ldots$, l'ensemble $\mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + A_{x_3}^{n_3} + \ldots)$ est au plus dénombrable.*

En effet, soit A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3). Soient en outre: $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie croissante de nombres naturels et $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite infinie de nombres réels. Supposons que l'ensemble $N = \mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + \ldots)$ soit indénombrable. D'après 3) il existe un nombre naturel p tel que $NA_x^i \neq 0$ pour tout x réel et pour $i \geqslant p$. La suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant croissante, il existe un nombre naturel k tel que $n_k \geqslant p$. On a donc $NA_{x_k}^{n_k} \neq 0$, contrairement à la définition de l'ensemble N. L'ensemble $\mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + \ldots)$ est donc au plus dénombrable. Nous avons ainsi démontré que 3) $\rightarrow$ 3'').

Réciproquement, soient A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3'') et N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. Supposons que l'ensemble N ne satisfasse pas à la condition 3). Il existerait donc pour tout p naturel un nombre naturel $n_p \geqslant p$ et un nombre réel x_p tels que $NA_{x_p}^{n_p} = 0$. Comme $n_p \geqslant p$ pour $p = 1, 2, \ldots$, on peut extraire de la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie croissante $n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}, \ldots$ On a donc $NA_{x_{k_i}}^{n_{k_i}} = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, d'où $N \subset \mathcal{E} - (A_{x_{k_1}}^{n_{k_1}} + A_{x_{k_2}}^{n_{k_2}} + \ldots)$, contrairement à la condition 3''). Nous avons ainsi démontré que 3'') $\rightarrow$ 3) et par conséquent l'équivalence des conditions 3) et 3'') se trouve établie.

Proposition P_{4^a} [1]. *Il existe un système d'ensembles A_x^i, où $i = 1, 2, 3, \ldots$ et x parcourt tous les nombres réels, qui satisfait aux conditions 1) et 2) de la proposition P_4 et à la condition 3^a) suivante:*

3^a) *Quel que soit le nombre réel x, l'ensemble $\mathcal{E} - \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i$ est au plus dénombrable.*

[1]) *Fund. Math.* XIX, p. 6.

1° $H \rightarrow P_{4^a}$. L'hypothèse H entraîne, comme nous avons vu, la proposition P_4. Or, nous venons de démontrer que la condition 3) de cette proposition équivaut à la condition 3''), et tout système d'ensembles A_x^i qui satisfait à la condition 3'') satisfait évidemment, à plus forte raison, à la condition 3^a). Il en résulte donc que $P_4 \rightarrow P_{4^a}$ et comme $H \rightarrow P_4$, nous avons $H \rightarrow P_{4^a}$.

2° $P_{4^a} \rightarrow H$. Admettons la propositon P_{4^a}. Soit N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$. D'après la condition 3^a) de la proposition P_{4^a}, il vient $N \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i \neq 0$, de sorte que pour tout nombre réel x il existe un nombre naturel i_x tel que $NA_x^{i_x} \neq 0$. Désignons par X_k l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $i_x = k$. On aura évidemment $\mathcal{E} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$ Or, on sait qu'en décomposant un ensemble de puissance du continu en une infinité dénombrable d'ensembles, l'un au moins de ces ensembles est de puissance du continu [1]). Il existe donc un nombre naturel p tel que l'ensemble X_p est de puissance $2^{\aleph_0}$. D'après la définition de l'ensemble X_p, on a $i_x = p$ pour $x \in X_p$, donc, d'après la définition des nombres i_x, on a $NA_x^p \neq 0$ pour $x \in X_p$. Cela prouve en vertu de la condition 2) que l'ensemble N contient un ensemble de puissance $\overline{\overline{X}}_p$. Or, l'ensemble N étant de puissance $\aleph_1$ et l'ensemble X_p de puissance $2^{\aleph_0}$, il vient $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$, ce qui donne $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $P_{4^a} \rightarrow H$.

L'équivalence des propositions P_{4^a} et H est donc établie.

Il est à remarquer que non seulement les conditions 3) et 3^a) ne sont pas équivalentes, mais que la condition 3) n'est même pas une conséquence des conditions 1), 2) et 3^a). En effet, en admettant qu'il existe un système d'ensembles A_x^i assujetti aux conditions 1), 2) et 3^a), nous pouvons définir un autre système d'ensembles $\overset{*}{A}{}_x^i$ qui satisfait aux conditions 1), 2) et 3^a), mais ne satisfait pas à la condition 3).

[1]) Voir p. ex. mes *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 135.

Posons à ce but pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ et pour tout x réel $\overset{*}{A}{}_x^{2i} = A_x^i$ et désignons pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ par $\overset{*}{A}{}_x^{2i-1}$ l'ensemble formé d'un seul nombre x. On voit sans peine que l'on a pour tout $i = 1, 2, 3, \ldots$ les formules

$$\mathcal{E} = \sum_{x \in \mathcal{E}} \overset{*}{A}{}_x^i \quad \textit{et} \quad \overset{*}{A}{}_x^i \overset{*}{A}{}_y^i = 0, \quad \textit{lorsque } x \neq y.$$

Le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ satisfait donc aux conditions 1) et 2). En outre, on a évidemment $\sum_{i=1}^{\infty} \overset{*}{A}{}_x^i \supset \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i$ pour tout x réel, de sorte que le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ satisfait aussi à la condition 3^a), le système $\{A_x^i\}$ satisfaisant à la condition 3^a) par hypothèse. Cependant le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ ne satisfait pas à la condition 3), puisque l'ensemble $A_x^1 + A_x^3 + A_x^5 + \ldots$ est (pour tout x réel) formé d'un seul élément x.

Quant à la proposition $\boldsymbol{P}_{4^a}$, il est encore à remarquer qu'elle résulte immédiatement de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ et du théorème suivant de M. S. Ulam [1]) (dont la démonstration n'exige pas l'hypothèse $\boldsymbol{H}$):

Z étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, il existe un système d'ensembles $A_\xi^i \subset Z$, où i parcourt les nombres naturels et ξ les nombres ordinaux $< \Omega$, tels que

(i) $Z = \sum_{\xi < \Omega} A_\xi^i$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $A_\xi^i A_\eta^i = 0$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$ *et* $\xi < \eta < \Omega$,

et

(iii) *quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$, l'ensemble $Z - \sum_{i=1}^{\infty} A_\xi^i$ est au plus dénombrable.*

Proposition $\boldsymbol{P}_5$. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ telle que, quelle que soit la suite infinie de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \ldots$, à toute valeur de x, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs (et qui dépend*

---

[1]) *Fund. Math.* XVI, p. 142; cf. aussi W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 214 (Lemme I).

de la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$), correspond une suite infinie croissante d'indices $k_1, k_2, k_3, \ldots$ (dépendant de x et de la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$) qui satisfont à l'égalité

$$(5) \qquad f_{k_i}(x) = y_{k_i} \qquad \textit{pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Démonstration. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il en résulte, comme nous savons, la proposition $\boldsymbol{P}_3$. Soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de la proposition $\boldsymbol{P}_3$. Nous allons montrer qu'elle satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_5$. Soit à ce but $y_1, y_2, y_3, \ldots$ une suite infinie quelconque de nombres réels. On voit sans peine que si, pour un x réel donné, il n'existe aucune suite infinie croissante d'indices $k_1, k_2, k_3, \ldots$ telle qu'on ait la formule (5), il existe un nombre naturel q_x tel que

$$(6) \qquad f_k(x) \neq y_k \qquad \textit{pour } k \geqslant q_x.$$

Soit N l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels ce cas se présente. Afin d'établir la proposition $\boldsymbol{P}_5$, il suffit évidemment de démontrer que l'ensemble N est au plus dénombrable.

Supposons, par contre, que l'ensemble N soit indénombrable. L'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les nombres naturels étant dénombrable, il existe évidemment un nombre naturel q tel que l'égalité $q_x = q$ se présente pour un sous-ensemble indénombrable N_1 de nombres de N. Comme la suite infinie de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_3$, il existe un nombre naturel p tel que l'on a $f_k(N_1) = \mathcal{E}$ pour tout $k \geqslant p$. On a donc $y_k \in f_k(N_1)$ pour $k \geqslant p$, de sorte que, pour tout nombre naturel $k \geqslant p$, il existe un nombre $x_k \in N_1$ tel que $y_k = f_k(x_k)$. Par conséquent

$$(7) \qquad f_k(x_k) = y_k \qquad \textit{pour } k \geqslant p.$$

Or, c'est impossible, car la définition de l'ensemble N_1 donne pour les nombres $x_k \in N_1$ en question l'égalité $q_{x_k} = q$, quel que soit $k \geqslant p$. Comme $N_1 \subset N$, on en conclut selon (6) que l'on a $f_k(x_k) \neq y_k$ pour $k \geqslant \max(p, q)$, ce qui est incompatible avec (7).

Ainsi l'ensemble N ne peut pas être dénombrable et par conséquent l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_5$ se trouve établie.

De la proposition $\boldsymbol{P}_5$ résulte tout de suite (en posant $y_i = y$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$) la

Proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ telle que, quel que soit le nombre réel y, la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ contient pour toute valeur de x, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable des valeurs (et qui dépend de y), une infinité de termes égaux à y.*

On a donc $\boldsymbol{P}_5 \rightarrow \boldsymbol{P}_{5a}$ et nous allons prouver que $\boldsymbol{P}_{5a} \rightarrow \boldsymbol{H}$: comme $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_5$ (ce que nous venons de montrer), il en résultera que chacune des propositions $\boldsymbol{P}_5$ et $\boldsymbol{P}_{5a}$ est équivalente à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$ et soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de la proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$. Soient N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$ et y un nombre réel quelconque. D'après la propriété de notre suite de fonctions, il existe des systèmes (x, p), où $x \in N$ et $p \in \mathcal{D}$, tels que $f_p(x) = y$. L'ensemble des nombres réels y ayant la puissance $2^{\aleph_0}$, il en est donc de même pour l'ensemble de tous les systèmes (x, p), où $x \in N$ et $p = 1, 2, 3, \ldots$, puisque les systèmes (p, x) et (p', x') sont nécessairement distincts, si $f_p(x) \neq f_{p'}(x')$. Or, N étant de puissance $\aleph_1$, l'ensemble de ces systèmes est de puissance $\aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$. On a donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Ainsi $\boldsymbol{P}_{5a} \rightarrow \boldsymbol{H}$ et l'équivalence des propositions $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}_5$ et $\boldsymbol{P}_{5a}$ se trouve établie.

Proposition $\boldsymbol{P}_{5b}$ [1]. *Il existe une famille F de puissance du continu de suites infinies de nombres réels telle que $y_1, y_2, y_3, \ldots$ étant une suite infinie quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les suites $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la famille F pour lesquelles on a*

[1] Voir S. Braun et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 1, proposition (P).

$$x_k \neq y_k, \qquad \textit{quel que soit } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

est au plus dénombrable.

1° $\boldsymbol{P}_5 \rightarrow \boldsymbol{P}_{5b}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_5$ et soit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle assujetties aux conditions de cette proposition. Désignons par F la famille de toutes les suites infinies différentes $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, où x sont des nombres réels; on voit sans peine que cette famille est de puissance du continu.

Or, étant donnée une suite infinie quelconque de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \ldots$, la proposition $\boldsymbol{P}_5$, qui est par hypothèse satisfaite par la suite infinie de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, implique que l'ensemble de tous les x réels tels que

$$f_k(x) \neq y_k \qquad \textit{pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite que la famille F satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_{5b}$. On a donc en effet $\boldsymbol{P}_5 \rightarrow \boldsymbol{P}_{5b}$.

2° $\boldsymbol{P}_{5b} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{5b}$. Soit F_1 un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$ de la famille F. L'ensemble X de tous les nombres réels qui sont des termes au moins d'une suite appartenant à F_1 est évidemment de puissance $\leqslant \aleph_1$.

Or, si on avait $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, il existerait un nombre réel y qui n'appartient pas à X, de sorte que, quelle que soit la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ appartenant à F_1, on aurait $x_i \neq y$ pour $i = 1, 2, \ldots$; mais cela contredit la proposition $\boldsymbol{P}_{5b}$ (en y posant $y_i = y$ pour $i = 1, 2, \ldots$). On ne peut donc avoir $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ et on a par suite $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Il est ainsi établi que $\boldsymbol{P}_{5b} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Or, nous avons démontré plus haut que $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_5$ et $\boldsymbol{P}_5 \rightarrow \boldsymbol{P}_{5b}$. Par conséquent les propositions $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_{5b}$ sont équivalentes.

Proposition $\boldsymbol{P}_6$. *L'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'ensembles croissants dénombrables* [1].

[1] W. Sierpiński, *Fund. Math.* III, p. 112 et V, p. 180.

On dit qu'une famille F est *formée d'ensembles croissants*, lorsque des deux ensembles distincts appartenant à F l'un est toujours un sous-ensemble de l'autre.

1° $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_6$. L'hypothèse $\boldsymbol{H}$ équivaut à l'existence d'une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels. Pour avoir une famille d'ensembles qui satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_6$, il suffit évidemment de considérer la famille de tous les segments infinis d'une telle suite transfinie.

2° $\boldsymbol{P}_6 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_4$ et soit N un ensemble quelconque de nombres réels de puissance $\aleph_1$. Soit F la famille d'ensembles dénombrables satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{P}_4$. A tout nombre réel x correspond donc un ensemble dénombrable $D(x)$ de la famille F tel que $x \in D(x)$. Soit S la somme de tous les ensembles $D(x)$ correspondant ainsi aux nombres x de N: l'ensemble S est évidemment de puissance $\aleph_1$. Soit maintenant x_0 un nombre réel arbitraire. L'ensemble $D(x_0)$ étant dénombrable et l'ensemble S étant indénombrable, il existe un nombre y de S qui n'appartient pas à $D(x_0)$. En vertu de la définition de S, il existe donc dans N un nombre x tel que $y \in D(x)$ et $D(x) \subset S$. Or, on a y *non-*$\in D(x_0)$: par conséquent, un des ensembles $D(x)$ et $D(x_0)$ étant contenu dans l'autre, on a nécessairement $D(x_0) \subset D(x)$, car l'inclusion $D(x) \subset D(x_0)$ est impossible, puisque $y \in D(x)$ et y *non-*$\in D(x_0)$. Comme $x_0 \in D(x_0)$ et $D(x_0) \subset D(x) \subset S$, on a $x_0 \in S$. L'ensemble S (qui est de puissance $\aleph_1$) contient donc tout nombre réel, de sorte que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$ et par conséquent $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_6 \to \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_6$ et $\boldsymbol{H}$ est donc établie.

Proposition $\boldsymbol{P}_7$ [1]. *Il existe un ensemble analytique linéaire qui n'est pas une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B).*

1° $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_7$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il existe, comme on sait, des ensembles analytiques linéaires non mesurables (B) [2].

[1]) Voir W. Sierpiński, *Publ. de l'Univ. de Belgrade* 1934.

[2]) Voir p. ex. N. Lusin, *Fund. Math.* X, p. 70.

On voit sans peine que chaque ensemble E de ce genre satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_7$, puisque s'il était une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B), il serait, vu l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables (B); mais alors l'ensemble E en question serait mesurable (B), contrairement à sa définition. On a donc bien $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_7$.

2° $\boldsymbol{P}_7 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_7$ et soit E un ensemble analytique satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{P}_7$. Comme nous avons démontré avec M. Lusin [1]), tout ensemble analytique, donc en particulier l'ensemble E, est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables (B). L'ensemble E n'étant pas (en vertu de $\boldsymbol{P}_7$) une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B), l'inégalité $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ ne peut se présenter. Or, on a, comme on sait, $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ [2]). Par conséquent $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, d'où $\boldsymbol{P}_7 \to \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_7$ est ainsi établie.

Il est à remarquer que le problème si l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est fausse ou vraie équivaut à celui si un certain ensemble linéaire E (analytique) non mesurable (B) et qu'on sait définir *effectivement* [3]), est ou non une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B).

Proposition $\boldsymbol{P}_8$. *Soit E est un ensemble (formé d'éléments quelconques) et Φ une famille de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de E telle que E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable; dans ces conditions E contient un ensemble indénombrable N qui n'admet avec tout ensemble de la famille Φ qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.*

[1]) *Journal de Mathématiques* II (1923), p. 32. Cf. aussi *Fund. Math.* VIII, p. 362.

[2]) Il est à remarquer que la démonstration de cette inégalité utilise *l'axiome du choix* (voir p. ex. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 208 et p. 210).

[3]) Voir pour cette notion ma Note de *Fund. Math.* II, p. 112 et C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 1933, p. 109 (cf. aussi ibid. p. 175).

1^0 $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Soient E un ensemble quelconque (non vide) et Φ une famille de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de E, telle que E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. Considérons une suite transfinie

$$(8) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \varphi),$$

formée de tous les éléments de l'ensemble E.

La famille Φ étant de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$, donc, d'après l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, de puissance $\leqslant \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω

$$(9) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots E_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega),$$

formée de tous les ensembles de la famille Φ (car dans le cas où cette famille est de puissance $< \aleph_1$, on peut compléter la suite (9), en répétant transfiniment un terme quelconque de cette suite).

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'éléments de E comme il suit. Posons $p_1 = x_1$ et désignons par P_α l'ensemble de tous les p_ξ où $1 \leqslant \xi < \alpha$ pour un $\alpha < \Omega$. Soit

$$(10) \qquad S_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} E_\xi.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur la famille Φ on a $E \neq P_\alpha + S_\alpha$, puisque S_α est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ et l'ensemble P_α est au plus dénombrable. Evidemment $S_\alpha + P_\alpha \subset E$; on a donc $E - (S_\alpha + P_\alpha) \neq 0$ et il existe par conséquent des termes de la suite (8) qui n'appartiennent pas à $S_\alpha + P_\alpha$. Nous définirons p_α comme celui de ces termes dont l'indice est le plus petit.

La suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ se trouve ainsi définie par l'induction transfinie.

Soit N l'ensemble de tous les termes de cette suite: c'est évidemment un ensemble non dénombrable d'éléments de E (les termes de la suite $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ étant par définition distincts deux

à deux. Soit d'autre part Q un ensemble de la famille Φ: c'est donc un terme de la suite (9) et on a par conséquent $Q = E_\mu$ pour un nombre ordinal $\mu < \Omega$. D'après la définition de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ on a $p_\alpha \in E - (S_\alpha + P_\alpha)$, donc p_α *non*-$\in S_\alpha$ pour $\alpha < \Omega$, et à plus forte raison p_α *non*-$\in E_\mu$ pour $\mu \leqslant \alpha < \Omega$, puisqu'on a selon (10) $E_\mu \subset S_\alpha$ pour $\mu \leqslant \alpha$. Les termes de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ qui appartiennent à E_μ ont donc nécessairement des indices $\alpha < \mu$: et leur ensemble est par suite au plus dénombrable (car $\mu < \Omega$). Il en résulte que l'ensemble $NE_\mu = NQ$ est au plus dénombrable.

Or, Q étant un ensemble arbitraire de la famille Φ, l'ensemble N satisfait donc à la proposition $\boldsymbol{P}_8$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$.

2^0 $\boldsymbol{P}_8 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_8$ et supposons que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. On a donc $\aleph_2 \leqslant 2^{\aleph_0}$. Soit E un ensemble de puissance $\aleph_2$. Les éléments de E peuvent donc être rangés en une suite transfinie

$$(11) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\Omega, x_{\Omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \omega_2)$$

du type ω_2, où ω_2 est le plus petit nombre ordinal de la quatrième classe de Cantor.

Soit Φ la famille de tous les segments de la suite (11): évidemment Φ est alors de puissance $\aleph_2$, donc, d'après notre hypothèse, de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$. Or, tout ensemble de la famille Φ, en tant que segment de la suite (11), est de puissance $\leqslant \aleph_1$; on voit donc sans peine que l'ensemble E (qui est de puissance $\aleph_2$) n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable (puisque $\aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1 < \aleph_2$). D'après la proposition $\boldsymbol{P}_8$ il existe par conséquent un sous-ensemble non dénombrable N de E qui admet tout au plus une infinité dénombrable d'éléments communs avec tout ensemble de la famille Φ.

Or, considérons un sous-ensemble N_1 de N de puissance $\aleph_1$ et soient x_{α_ξ} $(\xi < \Omega)$ les termes de la suite (11) qui appartiennent à N_1. Comme $\alpha_\xi < \omega_2$ pour $\xi < \Omega$, il existe, on le sait, un nombre ordinal $\alpha < \omega_2$ tel que l'on ait $\alpha > \alpha_\xi$ pour $\xi < \Omega$. Alors le segment de la suite (11) qui vient correspondre à l'élément x_α contient évidemment tous les éléments de N_1, donc une infinité non dénombrable d'éléments de N. Mais c'est incompatible avec la propriété de l'ensemble N, car le segment en question appartient à la famille Φ. Ainsi la supposition que l'on ait $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implique contradiction. On a donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et par conséquent $\boldsymbol{P}_8 \to \boldsymbol{H}$.

Les propositions $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_8$ sont donc équivalentes.

Il est à remarquer que si l'on remplace dans la proposition $\boldsymbol{P}_8$ la condition que l'ensemble N ait avec tout ensemble de la famille Φ un ensemble *au plus dénombrable* d'éléments communs par la condition qu'il ait avec tout ensemble de Φ un ensemble *de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ d'éléments communs, la proposition $\boldsymbol{P}_8^l$ ainsi obtenue peut-être établie *sans faire appel à l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$.

En effet, on a évidemment $\boldsymbol{P}_8 \to \boldsymbol{P}_8^l$ et nous avons démontré plus haut que $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$. On a donc $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8^l$, de sorte que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition $\boldsymbol{P}_8^l$ est vraie. Or, la proposition $\boldsymbol{P}_8^l$ est vraie aussi, lorsque $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, puisqu'il suffit alors de prendre comme N un sous-ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$ de l'ensemble E.

Une légère modification de notre démonstration de l'équivalence entre $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_8$ permet de montrer que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est équivalente à la proposition $\boldsymbol{P}_{8a}$ suivante [1]):

Proposition $\boldsymbol{P}_{8a}$. *Soit* **P** *une propriété des ensembles de nombres réels assujettie aux conditions:*

1) **P** *est une propriété héréditaire* [2]),

2) **P** *est une propriété absolument additive* [3]),

[1]) Pour plus de détails voir ma Note dans le *Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine*, XVI^e année, N^0 4—5.

[2]) Une propriété d'ensembles est dite *héréditaire*, si elle appartient à tout sous-ensemble d'un ensemble qui en jouit.

[3]) Une propriété d'ensembles est dite *absolument additive*, si elle appartient à la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles qui en jouissent.

3) *Tout ensemble formé d'un seul nombre réel jouit de la propriété* **P**,

4) *Il existe une famille Φ de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ d'ensembles de nombres réels jouissant de la propriété* **P** *et telle que tout ensemble de nombres réels jouissant de cette propriété est contenu dans un (au moins) des ensembles de la famille Φ;*

alors chaque ensemble E de nombres réels qui ne jouit pas de la propriété **P** *contient un sous-ensemble non dénombrable N ayant tout au plus une infinité dénombrable de points communs avec tout ensemble jouissant de la propriété* **P**.

Proposition $\boldsymbol{P}_9$ [1]). *Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:*

($\boldsymbol{K}$) *Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de première catégorie de Baire,*

($\boldsymbol{L}$) *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

1^0 $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_9$. On a évidemment $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{K})$, puisqu'en admettant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, tout ensemble de puissance inférieure à celle du continu est au plus dénombrable, donc de première catégorie de Baire.

Quant à l'implication $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L})$, elle a été démontrée pour la première fois en 1914 par M. N. Lusin [2]). Nous la déduirons ici de l'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$.

Posons à ce but $E = \mathcal{E}$ et soit Φ la famille de tous les ensembles linéaires parfaits non-denses. Les ensembles au plus dénombrables étant de première catégorie et la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie quelconques étant encore un ensemble de première catégorie, on voit sans peine que la famille Φ satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_8$. Or, d'après

[1]) Voir W. Sierpiński, *Tôhoku Math. Journ.* 38, p. 225.

[2]) *C. R. Paris* t. 158, p. 1259; cf. plus loin Chap. II, proposition C_1.

cette proposition il existe un sous-ensemble N de E indénombrable, donc, d'après $\boldsymbol{H}$, de puissance $2^{\aleph_0}$, et qui admet avec chaque ensemble de la famille Φ tout au plus une infinité dénombrable d'éléments communs. Un tel ensemble N satisfait évidemment à la proposition $(\boldsymbol{L})$. On a donc $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{L})$.

Les implications $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$ et $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{L})$ donnent $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L})$ et comme on a en même temps $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{K})$, il vient $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_9$.

2° $\boldsymbol{P}_9 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_9$. Soit N un ensemble vérifiant la proposition $(\boldsymbol{L})$. Or, l'ensemble N admet alors tout au plus une infinité dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de première catégorie, car tout ensemble de première catégorie est contenu dans une somme dénombrable d'ensembles parfaits non-denses.

Soit maintenant N_1 un sous-ensemble de N de puissance $\aleph_1$. Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, l'ensemble N_1 serait d'après $(\boldsymbol{K})$ de première catégorie et (par suite de la propriété de l'ensemble N, établie tout à l'heure) l'ensemble NN_1 serait au plus dénombrable. Or, c'est impossible, puisque $N_1 \subset N$ et N_1 est de puissance $\aleph_1$. On a par conséquent $\aleph_1 \geqslant 2^{\aleph_0}$, donc $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

L'implication $\boldsymbol{P}_9 \to \boldsymbol{H}$ et, en conséquence, l'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_9$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ suivante peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$:

$(\boldsymbol{L}_1)$ *Il existe un ensemble linéaire non dénombrable N qui admet un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs avec chaque ensemble parfait non-dense.*

En effet, on a évidemment $(\boldsymbol{L}) \to (\boldsymbol{L}_1)$ et, comme nous venons de montrer, $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L})$. Il vient donc $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L}_1)$, de sorte que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ est vraie.

Or, la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ est encore vraie, si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, puisqu'il suffit dans ce cas de prendre comme N un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

La proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ résulte d'ailleurs sans peine de la proposition $\boldsymbol{P}_8'$.

Proposition $\boldsymbol{P}_{9a}$. *Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:*

$(\boldsymbol{M})$ *Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de mesure nulle.*

$(\boldsymbol{S})$ *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble de mesure nulle.*

1° $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_{9a}$. On a évidemment $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{M})$, puisque, si l'on admet l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, tout ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est au plus dénombrable, donc de mesure nulle.

Quant à l'implication $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{S})$, nous la déduirons ici de l'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$ [1]).

Posons $E = \mathcal{E}$ et soit Φ la famille de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle. La famille de tous les ensembles (linéaires) G_δ étant, comme on sait, de puissance $2^{\aleph_0}$ et les ensembles au plus dénombrables, ainsi que les sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, étant de mesure nulle, on voit sans peine que la famille Φ satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_8$. D'après cette proposition il existe donc un sous-ensemble N de E non dénombrable, donc selon $\boldsymbol{H}$ de puissance $2^{\aleph_0}$, et qui admet avec tout ensemble de la famille Φ, donc avec tout ensemble linéaire G_δ de mesure nulle, un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

Or, tout ensemble linéaire de mesure (lebesguienne) nulle étant, comme on sait, contenu dans un ensemble linéaire G_δ de mesure nulle, l'ensemble N a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle. L'ensemble N satisfait donc à la proposition $(\boldsymbol{S})$. On a ainsi $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{S})$.

Les implications $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$ et $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{S})$ donnent $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{S})$ et comme on a en même temps $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{M})$, il vient $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_{9a}$.

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Fund. Math.* V, p. 184.

2° $P_{9a} \to H$. Admettons la proposition P_{9a}. Soient N un ensemble vérifiant la proposition (S) et N_1 un sous-ensemble de N de puissance $\aleph_1$. Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, l'ensemble N_1 serait, d'après (M), de mesure nulle et l'ensemble NN_1 serait, d'après la définition de N, au plus dénombrable. Or, c'est impossible, puisque $N_1 \subset N$ et N_1 est de puissance $\aleph_1$. On a donc $\aleph_1 \geqslant 2^{\aleph_0}$, d'où $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. L'implication $P_{9a} \to H$, et par conséquent l'équivalence des propositions P_{9a} et H, est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition (S_1) suivante peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse H:

(S_1) *Il existe un ensemble linéaire indénombrable N qui a un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs avec tout ensemble de mesure nulle.*

La démonstration de la proposition (S_1) est tout à fait analogue à celle de la proposition (L_1), donnée plus haut.

Proposition P_{10} [1]. *Il existe dans l'espace de Hilbert un ensemble indénombrable de points, dont aucun sous-ensemble indénombrable n'est homéomorphe à une partie d'un espace euclidien.*

1° $H \to P_{10}$. Admettons l'hypothèse H. Il en résulte, comme nous savons, la proposition P_8.

Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les points de l'espace de Hilbert et Φ la famille de tous les ensembles G_δ de dimension 0 (c. à d. homéomorphes à des sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les nombres irrationnels) situés dans $\mathcal{H}$. On sait que l'espace $\mathcal{H}$ et la famille Φ satisfont aux conditions de la proposition P_8 [2]. D'après cette proposition il existe donc un ensemble non dénombrable $N \subset \mathcal{H}$ qui a avec chaque ensemble de la famille Φ un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

Soit maintenant Q un sous-ensemble quelconque de N, homéomorphe à une partie de l'espace euclidien $\mathcal{E}_m$ à m dimensions.

[1]) W. Hurewicz, *Fund. Math.* XIX, p. 8. Cf. aussi *Proc. Acad. Amsterdam* 31 (1928), p. 920, renvoi [7]).

[2]) Pour plus de détails voir la Note précitée de M. Hurewicz.

Or, on sait que $\mathcal{E}_m$ est une somme de $m+1$ ensembles homéomorphes à des ensembles de nombres irrationnels et que chaque ensemble de tels nombres est contenu dans un G_δ de dimension 0, donc dans un ensemble de la famille Φ. Comme $Q \subset N$, il en résulte tout de suite en vertu de la définition de l'ensemble N que Q est une somme d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables et par conséquent qu'il est lui-même au plus dénombrable. On a donc $H \to P_{10}$.

2° $P_{10} \to H$. Admettons la proposition P_{10}. On sait que tout ensemble de puissance inférieure à celle du continu et situé dans un espace métrique est homéomorphe à un ensemble de nombres irrationnels et par suite de dimension 0. En supposant donc que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, il en résulte que tout ensemble de puissance $\aleph_1$ situé dans l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert est de dimension 0. Or, tout ensemble indénombrable contient un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$. Par conséquent tout ensemble indénombrable situé dans l'espace $\mathcal{H}$ contiendrait un sous-ensemble indénombrable homéomorphe à un ensemble linéaire, contrairement à la proposition P_{10}.

On a donc $P_{10} \to H$; l'équivalence des propositions P_{10} et H est ainsi établie.

Proposition P_{11}. *Aucun ensemble de puissance $\aleph_1$ n'est une somme de plus que $\aleph_1$ ensembles infinis ayant deux à deux un nombre fini d'éléments communs* [1]).

1° $H \to P_{11}$. Admettons l'hypothèse H. Soient E un ensemble de puissance $\aleph_1$ et F une famille de puissance $> \aleph_1$ de sous-ensembles infinis de E.

Faisons correspondre à chaque ensemble N de la famille F un ensemble dénombrable $D(N)$ contenu dans lui. Or, E ne contenant (en vertu de l'hypothèse H) que $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ sous-ensembles dénombrables et la puissance de la famille F (des ensembles N) dépassant $\aleph_1$, l'inégalité $D(N') \neq D(N'')$ ne peut se présenter pour

[1]) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 201.

tout couple $N' \neq N''$ d'ensembles de la famille F. Il existe donc deux ensembles distincts N' et N'' de F tels que $D(N') = D(N'')$ et qui ont par conséquent une infinité d'éléments communs (à savoir l'ensemble $D(N')$). Il est ainsi démontré qu'il n'existe aucune famille F de sous-ensembles infinis de E ayant deux à deux tout au plus un nombre fini d'éléments communs. L'ensemble E ne peut donc être une somme des ensembles d'une telle famille. Par celà-même il est établi que $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{11}$.

2° $\boldsymbol{P}_{11} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{11}$ et soit E l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$. C'est donc un ensemble de puissance $\aleph_1$. Faisons correspondre à toute suite infinie de nombres naturels croissants $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ l'ensemble $D(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de tous les nombres naturels

$$2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k} \qquad \text{où } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, si $m_1, m_2, m_3 \ldots$ et $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sont deux suites infinies croissantes de nombres naturels, différentes l'une de l'autre, les ensembles $D(m_1, m_2, \ldots)$ et $D(n_1, n_2, \ldots)$ ont tout au plus un nombre fini d'éléments communs: en effet, si $m_p \neq n_p$, on a évidemment pour $k \geqslant p$ et $l \geqslant p$:

$$2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_p} + \ldots + 2^{m_k} \neq 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_p} + \ldots + 2^{n_l},$$

puisque chaque nombre naturel admet une seule représentation dans le système de numération à base 2, et par conséquent les ensembles $D(m_1, m_2, \ldots)$ et $D(n_1, n_2, \ldots)$ ont moins que p éléments communs.

Soit Φ la famille de tous les ensembles $D(n_1, n_2, \ldots)$ correspondant aux suites infinies croissantes $n_1, n_2, n_3 \ldots$ de nombres naturels: c'est donc une famille de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit S la somme de tous les ensembles de la famille Φ: c'est évidemment un sous-ensemble de E. Comme $E = S + (E - S)$, on en conclut tout de suite que E est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles infinis ayant deux à deux tout au plus un nombre fini d'éléments communs. L'ensemble E étant de puissance $\aleph_1$, E n'est pas, d'après la proposition $\boldsymbol{P}_{11}$, une somme de plus que $\aleph_1$ ensembles de ce genre. Il en résulte que le nombre $2^{\aleph_0}$ ne peut dépasser $\aleph_1$, c. à d. que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Nous avons ainsi prouvé que $\boldsymbol{P}_{11} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Il est donc établi que les propositions $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_{11}$ sont équivalentes.