INTRODUCTION.

L'hypothèse du continu et le problème du continu.

On dit que deux ensembles M et N (formés d'éléments quelconques) ont la *même puissance*, s'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque (c'est-à-dire, si leurs éléments peuvent être rangés en couples d'une manière que chaque couple contienne un élément de l'ensemble M et un élément de l'ensemble N, tout élément de M ou de N ayant son couple).

Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres naturels (1, 2, 3, ...) sont dits *dénombrables*. Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels sont dits *de puissance du continu*. Les ensembles connus formés de nombres réels ou bien de points d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions sont soit finis, soit dénombrables, soit de puissance du continu. On ne connait notamment aucun ensemble individuel de nombres réels dont on sache qu'il n'est ni fini, ni dénombrable, ni de puissance du continu. Cependant, malgré tous les efforts, on ne sait pas démontrer que ces cas doivent se présenter toujours.

L'hypothèse du continu (Cantorsche Kontinuumhypothese) peut être exprimée d'une façon élémentaire comme l'hypothèse que tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu.

Si l'hypothèse du continu est vraie, la théorie des ensembles subira d'importantes simplifications. Tout d'abord, on saura quelles peuvent être les puissances des sous-ensembles d'un des ensembles les plus importants pour l'Analyse Mathématique: à savoir de celui de tous les nombres réels. Ensuite, pour démontrer qu'un ensemble infini de nombres réels a la puissance du continu (ce qu'il est souvent important de savoir), il suffira de prouver qu'il n'est pas dénombrable. Plusieurs démonstrations connues pourraient donc être remplacées par les démonstrations beaucoup plus simples.

Or, on a tiré de l'hypothèse du continu maintes conséquences, dont aucune n'a conduit à une contradiction et dont plusieurs ont été ensuite démontrées sans cette hypothèse. D'autre part, plusieurs propositions importantes de diverses branches des Mathématiques ne peuvent être démontrées à l'état actuel de la science qu'en faisant intervenir l'hypothèse du continu. On connait même un certain nombre de propositions intéressantes qui sont équivalentes à cette hypothèse.

Tout cela justifie le vif intérêt que présente l'hypothèse du continu. Même pour les personnes qui ne reconnaissent par les raisonnements basés sur cette hypothèse, il est important de savoir quelles sont les démonstrations qui l'utilisent et quelles sont les propositions qu'actuellement on ne sait pas démontrer sans faire appel à cette hypothèse (ou à une de ses conséquences).

Une autre manière d'énoncer l'hypothèse du continu est liée à la notion d'*ordre*.

Un ensemble donné U est dit *ordonné*, si a et b étant deux éléments distincts de U, il est convenu qu'un de ces éléments, et notamment lequel, soit regardé comme précédent l'autre; on écrit $a \prec b$ pour désigner que a précède b. La convention en question peut être d'ailleurs quelconque, mais elle doit vérifier (pour tous les éléments a, b, c de U) les deux conditions suivantes: 1° la relation $a \prec b$ exclut la relation $b \prec a$ et 2° les relations $a \prec b$ et $b \prec c$ entraînent la relation $a \prec c$.

Si, dans un ensemble ordonné U, il y a un élément qui n'est précédé par aucun autre élément de cet ensemble, on l'appelle *premier* élément de l'ensemble U.

Un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non vide admet le premier élément est dit *bien ordonné*.

Etant donné un élément a de l'ensemble bien ordonné B, l'ensemble de tous les éléments de B qui précèdent a s'appelle *segment* de B.

On démontre que tous les ensembles bien ordonnés indénombrables dont tous les segments sont finis ou dénombrables ont la même puissance, qui est désignée par $\aleph_1$ *(aleph-un)*.

Par *hypothèse du continu* on entend d'habitude l'hypothèse que la puissance du continu est aleph-un, ce qu'on peut écrire (en faisant l'emploi des puissances des nombres cardinaux [1]) sous la forme de l'égalité:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{1}$$

(où $\aleph_0$ désigne la puissance d'ensemble dénombrable et, par suite, $2^{\aleph_0}$ celle du continu). Dans la suite nous appellerons cette égalité *hypothèse* ***H***.

On ne sait pas jusqu'à présent si l'égalité (1) est vraie ou non [2]). Il existe même des personnes qui ne croient pas à la possibilité de résoudre ce problème sans admettre un nouvel axiome.

---

[1]) Voir mes *Leçons sur les nombres transfinis*, Collection Borel, Paris 1928, où le lecteur pourra compléter ses connaissances des éléments de la Théorie générale des ensembles, *avant* de continuer la lecture de la présente monographie. Il pourra se servir aussi des chapitres initiaux de trois premiers tomes de ces „Monografje Matematyczne", où diverses parties de la théorie en question sont rappelées en abrégé.

[2]) En 1925 M. D. Hilbert a publié un Mémoire *(Über das Unendliche,* Math. Annalen 95, p. 161—190), dans lequel il s'occupe de la démonstration de la formule (1). D'après M. A. Fraenkel *(Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre,* Leipzig u. Berlin 1927, p. 37 et p. 92) ce n'est plutôt qu'une esquisse de démonstration, liée encore avec des grandes difficultés, car plusieurs lemmes essentiels restent à établir (cf. aussi A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3-me éd., Berlin 1928, p. 67, p. 301 et p. 375). Voici encore l'opinion de M. N. Lusin (Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa Ser. II, vol. II (1933), p. 269):

Au premier regard on pourrait penser que la formule (1) équivaut à la proposition que tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu. La démonstration d'une telle équivalence peut être en effet donnée sans peine, mais on

---

„Pour montrer que la proposition «la puissance du continu est $\aleph_1$» est non contradictoire dans le domaine de l'Analyse Mathématique, M. David Hilbert établit une correspondance univoque et réciproque entre les *définitions* mêmes des nombres irrationnels d'une part et des nombres transfinis de deuxième classe d'autre part. Ainsi sa méthode diffère sensiblement de l'ordre d'idées indiqué, où l'on cherchait à établir l'existence (ou l'absence) d'une correspondance entre les *nombres mêmes* irrationnels et transfinis, sans se préoccuper de la manière dont *nous* concevons les nombres irrationnels ou transfinis. Bref, dans le terrain des idées de G. Cantor et des analystes qui étaient d'accord avec lui, on n'abordait nullement les développements métamathématiques.

En attendant des nouvelles publications dans la voie ouverte par les idées de M. David Hilbert, nous allons faire ici deux remarques.

D'abord, en analysant les définitions mêmes des divers nombres irrationnels, la méthode de M. David Hilbert emploie les expressions métamathématiques dites *fonctionnelles:* on définit un nombre irrationnel au moyen d'une fonctionnelle et la méthode de M. David Hilbert fait la classification de ces fonctionnelles. Mais avant d'obtenir des explications définitives, il reste encore un point à éclaircir: comment sommes-nous certains que *toutes* les espèces possibles des fonctionnelles soient réellement épuisées et qu'il ne puisse arriver qu'un nombre irrationnel dont on ne conçoit pas la définition *à présent* échappe à nos raisonnements ultérieurs?

Ensuite une certaine proximité de la méthode de M. David Hilbert aux raisonnements de J. Richard peut inspirer quelques craintes. Sans doute ce raisonnement: «Prenons toutes les définitions métamathématiques des nombres irrationnels et énumérons-les au moyen des entiers positifs; puis faisons de même avec les définitions des nombres transfinis, etc.» serait trop simpliste, parce que cette énumération même n'appartient probablement pas au domaine de la métamathématique. Cependant le raisonnement de J. Richard est une épreuve pour ceux qui veulent pénétrer dans les mystères de l'infini ainsi qu'indique avec toute raison M. Emile Borel".

Cf. aussi N. Lusin, *Sur les voies de la théorie des ensembles*, Atti del Congr. Intern. dei Matematici, Bologna 1928, t. I, p. 295 et suivantes.

doit faire appel à l'axiome de M. Zermelo *(Auswahlpostulat)* [1]). Nous ne savons pas, en effet, démontrer sans l'axiome du choix que tout ensemble ayant la même puissance que chacun de ses sous-ensembles indénombrables a la puissance $\aleph_1$, ni, non plus, que tout ensemble non dénombrable — même que tout ensemble de puissance du continu — a une puissance supérieure ou égale à $\aleph_1$ [2]). Or, nous savons démontrer sans l'axiome de M. Zermelo que la formule (1) entraîne la proposition suivante: tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu (puisque tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ a la puissance $\aleph_1$).

On entrevoit déjà quelles simplifications importantes subirait la théorie des ensembles de points, si l'hypothèse du continu était démontrée. L'hypothèse du continu implique, en outre, l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu; donc, dans le cas où la formule (1) était vraie, on pourrait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix tous les théorèmes dont la démonstration s'appuie sur l'existence d'un ensemble bien ordonné formé de tous les nombres réels, c. à d. sur un cas particulier du théorème de M. Zermelo *(Wohlordnungssatz)*.

Il faut distinguer entre *l'hypothèse du continu* et le *problème du continu* (Kontinuumproblem), qui consiste à déterminer la place occupée par le continu parmi les *alephs*, c. à d. à déterminer le nombre ordinal α pour lequel

$$2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha.$$

Une telle position du problème présume, naturellement, que la puissance du continu est un *aleph*, c. à d. suppose l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu. Dans le

---

[1]) Voir p. ex. mon livre *Leçons sur les mombres transfinis*, Collection Borel, Paris 1928, p. 208.

[2]) Cf. mon mémoire *L'axiome de M. Zermelo...*, Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1918.

cas où l'hypothèse du continu était vraie, on aurait ici évidemment $\alpha = 1$; or, il n'est pas encore démontré qu'on n'a pas $\alpha = 2$. On a cependant démontré qu'on ne peut pas avoir $\alpha = \omega$: c'est un théorème de J. König; sa démonstration peut être donnée sans utiliser l'axiome de M. Zermelo)[1].

Tout d'abord nous démontrerons ce

Théorème. *Etant donnée une suite infinie*

$$(1) \qquad E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

d'ensembles de nombres réels dont chacun a une puissance inférieure à celle du continu, il existe un nombre réel qui n'appartient à aucun ensemble de la suite (1).

Démonstration. Comme on sait, chaque ensemble parfait P contient une famille F_P *de puissance du continu* de sous-ensembles parfaits de P *disjoints*, c. à d. sans éléments communs deux à deux.

Soit P_0 un ensemble linéaire parfait et borné. L'ensemble E_1 étant de puissance inférieure à celle du continu et la famille F_{P_0}, formée d'ensembles (parfaits) disjoints, étant de puissance du continu, il existe un ensemble P_1 de la famille F_{P_0} qui n'a aucun élément commun avec E_1. Pareillement, il existe un ensemble P_2 de la famille F_{P_1} tel que $P_2E_2 = 0$, et ainsi de suite. On obtient de cette manière une suite infinie d'ensembles $P_1, P_2, P_3, \dots$ tels que l'on a pour $n = 1, 2, \dots$

$$(2) \qquad P_n \in F_{P_{n-1}} \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad P_n E_n = 0.$$

Il résulte de (2) d'après la définition de la famille F_P que $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots$ Les ensembles P_n $(n = 1, 2, \dots)$ étant fermés, non vides et bornés (en tant que contenus dans l'ensemble borné P_0), il existe, comme on sait, un point p tel que $p \in P_n$ pour $n = 1, 2, \dots$ et on conclut de (3) que p n'appartient à aucun des ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$, c. q. f. d.

[1]) Cf. N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une propriété du continu*, C. R. Paris, t. 175.

Corollaire. $\mathfrak{m}_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *étant une suite infinie de nombres cardinaux tels que* $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ *pour* $n = 1, 2, 3, \dots$, *on a aussi* $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \dots < 2^{\aleph_0}$.

En effet, supposons par contre que $\mathfrak{m}_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ soit une suite infinie de nombres cardinaux telle que $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ et que $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \dots = 2^{\aleph_0}$.

Il existerait donc (selon la définition de la somme de nombres cardinaux) dans l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels une suite infinie d'ensembles disjoints E_n $(n = 1, 2, \dots)$ telle que l'on ait $\overline{\overline{E}}_n = \mathfrak{m}_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et que $E_1 + E_2 + E_3 + \dots = \mathcal{E}$. Or, comme $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, cela contredit le théorème.

Le théorème de J. König est une conséquence immédiate de ce corollaire et de la formule $\aleph_\omega = \aleph_1 + \aleph_2 + \aleph_3 + \dots$

Plus généralement, on peut démontrer l'impossibilité de la formule $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ où α est un nombre transfini de deuxième classe et de seconde espèce: à ce but il faut seulement s'appuyer sur la remarque que pour des tels nombres α on a $\aleph_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi$. On peut démontrer aussi que α ne peut être un nombre ordinal de seconde espèce, confinal avec ω.

C'est tout ce qu'on sait sur le rang du nombre $2^{\aleph_0}$ dans l'échelle des alephs.

Notre démonstration du théorème de J. König fait intervenir l'axiome du choix, mais, comme on voit sans peine, le théorème de J. König peut être démontré sans faire appel à cet axiome. Cela résulte du fait que l'hypothèse d'après laquelle la puissance du continu est $\aleph_\omega$ contient l'hypothèse que voici: „le continu peut être regardé comme un ensemble bien ordonné"; or, cette hypothèse, sans appel à un nouvel axiome, rend superflu dans le raisonnement ultérieur le recours à l'axiome du choix.