MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

TOM III

TOPOLOGIE I

ESPACES MÉTRISABLES, ESPACES COMPLETS

PAR

CASIMIR KURATOWSKI

PROFESSEUR À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

WARSZAWA – LWÓW 1933

DRUK M. GARASIŃSKI, WARSZAWA, BRACKA 20.

DÉDIÉ À MONSIEUR WACŁAW SIERPIŃSKI.

PRÉFACE AU VOLUME I.

La Topologie traite des propriétés des ensembles de points, *invariantes* par rapports aux transformations bicontinues.

Une transformation (univoque) $y = f(x)$ est dite *continue*, lorsque la condition $x = \lim_{n=\infty} x_n$ entraîne $f(x) = \lim_{n=\infty} f(x_n)$. Elle est dite *bicontinue* ou une *homéomorphie*, lorsqu'elle admet, en outre, une transformation inverse $x = f^{-1}(y)$ continue.

Le terme „ensemble de *points*" exige quelques explications: on peut notamment se demander quel est *l'espace* dont on considère les points.

Comme on sait, la notion de point de l'espace euclidien à 3 dimensions a été étendue dans la Géométrie analytique sur l'espace à un nombre arbitraire des dimensions: un point p de l'espace euclidien $\mathcal{E}^k$ (à k dimensions) est par définition un système de k nombres réels $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}$; la convergence $\lim_{n=\infty} p_n = p$ signifie que l'on a $\lim_{n=\infty} p_n^{(i)} = p^{(i)}$, quel que soit $i \leqslant k$.

Le développement récent de la Topologie et des autres branches des mathématiques modernes (surtout celui de la Théorie générale des fonctions et du Calcul fonctionnel) a montré que cette conception de l'espace était encore trop étroite: dans un grand nombre des problèmes on est conduit à considérer, outre l'espace $\mathcal{E}^k$, l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ à une *infinité de dimensions* (nommé aussi „espace $\mathcal{E}_\omega$ de Fréchet") et dont les points p sont des suites infinies $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(i)}, \dots$ de nombres réels; la convergence $\lim_{n=\infty} p_n = p$ y signifie que l'on a $\lim_{n=\infty} p_n^{(i)} = p^{(i)}$, quel que soit i.

Or, c'est précisément l'étude des invariants des homéomorphies entre sous-ensembles de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ qui constitue le vrai domaine de la Topologie à l'état actuel de cette science. Ajoutons que le terme ensemble est entendu ici dans le sens le plus général: les ensembles de points que nous allons envisager ne se réduisent pas à des courbes ou surfaces de la Géométrie élémentaire ou analytique, ni même à des figures considérées en Analyse et définies par des expressions analytiques, mais ils sont complètement arbitraires (dans le sens de la Théorie des ensembles).

Dans la suite, nous n'allons pas admettre d'une manière explicite que l'espace considéré est un sous-ensemble de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, pas plus que dans la Géométrie du plan euclidien on n'étudie explicitement l'ensemble des nombres complexes, mais on déduit les conséquences d'un système d'axiomes qui caractérise cet ensemble au point de vue *géométrique*. Pareillement, nous allons baser ici la Topologie sur un système d'axiomes (I — V) tel que 1° chaque espace satisfaisant à ce système est homéomorphe (donc équivalent au point de vue topologique) à un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ et 2° chaque sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ satisfait à ce système d'axiomes (cf. p. 105). Le seul *terme primitif* du système est le terme $\bar{A}$, désignant la *fermeture* de l'ensemble A (c. à d. l'ensemble A augmenté de tous ses points d'accumulation). La propriété d'appartenir à la fermeture d'un ensemble étant invariante par rapport aux homéomorphies de l'espace, *tout ce qui se laisse exprimer par l'opération* $\bar{A}$ (au moyen, s'il y a lieu, des opérations de la Logique et de la Théorie des ensembles) est également invariant par rapport à ces transformations et *appartient par conséquent à la Topologie* [1]).

L'avantage de la méthode axiomatique tient d'abord à des raisons méthodologiques. En particulier, elle permet de mieux se rendre compte des prémisses qui sont essentielles dans les démonstrations des théorèmes topologiques. Bien que G. Cantor, le fondateur de la Théorie des ensembles, et les autres mathématiciens qui s'occupaient de la „Théorie des ensembles de points", ne procédaient pas par la voie axiomatique, on s'est aperçu plus

[1]) Au lieu de la fermeture on pourrait employer comme termes primitifs de la Topologie: la limite d'une suite de points (Fréchet), l'entourage (Hausdorff), l'ensemble ouvert (Sierpiński) etc.

Par contre, la notion de distance entre deux points ne pourrait p. ex. servir au même but, puisqu'elle n'est pas invariante par rapport à l'homéomorphie.

tard (Fréchet) que, dans la majorité des problèmes topologiques, bien peu de propriétés de l'espace intervenaient dans les raisonnements. En admettant ces propriétés comme axiomes, on est parvenu aux „espaces abstraits". Tel est en particulier l'espace considéré dans ce livre; il équivaut topologiquement — comme nous l'avons dit — à un sous-ensemble arbitraire de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ ou, en d'autres termes, à un espace métrique séparable (dans le sens établi pp. 80 et 82).

Cependant la valeur de la méthode axiomatique n'est pas uniquement de nature méthodologique. Il y a, en effet, des problèmes où l'on est conduit à considérer une famille d'ensembles ou de fonctions comme formant elle-même un espace (nommé parfois „hyper-espace"), de démontrer que cet hyper-espace satisfait à certains axiomes et d'appliquer les théorèmes qui en résultent. Ainsi p. ex. le problème de l'existence des fonctions continues sans dérivée se ramène à un théorème (théorème de Baire) sur l'„espace des fonctions continues" (voir p. 209), qui est — comme on le montre — complet et séparable.

C'est là un des procédés caractéristiques des mathématiques modernes: pour démontrer un théorème concernant un espace donné, on définit un nouvel espace (en conférant ainsi le caractère géométrique au problème considéré) et on opère ensuite sur ce dernier. On procède de la sorte dans maintes applications du Calcul fonctionnel aux équations intégrales, au Calcul des variations etc. Dans ce mode de procéder les différentes branches des mathématiques deviennent utiles les unes aux autres: dans des nombreux problèmes d'Analyse l'hyper-espace est un espace géométrique ou topologique, dans certains problèmes de Topologie il est d'une nature algébrique (il constitue un groupe).

* * *

L'étude de l'espace assujetti aux axiomes I — V est divisée en deux chapitres, dont le premier ne concerne que les trois premiers axiomes (p. 15). Ces trois axiomes se distinguent par leur caractère „algébro-logique" [1]). En conséquence, le même caractère appartient aux méthodes de raisonnement du Chapitre I.

[1]) Sur l'importance de l'algorythme algébro-logique en Topologie a attiré l'attention S. Janiszewski.

Le Chapitre III et les suivants (du vol. II) sont d'un caractère plus spécial. L'espace du Chap. III est supposé complet, celui du Chap. IV compact, celui du Chap. V connexe etc.

Au lieu de considérer les espaces spéciaux (tels que les espaces complets, compacts etc.), on pourrait, bien entendu, envisager des ensembles complets, compacts etc., situés dans un espace assujetti aux axiomes I — V, de sorte que la Topologie toute entière rentrerait dans le Chap. II (ou même dans le Chap. I !). Or, il est avantageux de formuler partout où c'est possible les propriétés d'un ensemble situé dans un espace comme des propriétés *intrinsèques* de cet ensemble, considéré comme formant un espace pour lui-même. Telle est, par exemple, la propriété d'être compact, d'être dense en soi, d'être de dimension n (par contre, la propriété d'être fermé ou d'être ouvert est une propriété extrinsèque: propriété de l'ensemble par rapport à l'espace).

Parmi les problèmes considérés dans ce volume, il y a qui se distinguent par leur caractère purement géométrique, il y en a d'autres qui se rapprochent par leur origine de la Théorie des fonctions de variables réelles. La majorité des §§ (4 — 10, 13 — 19, 23 — 25, 29, 30) embrasse les deux tendances. Comme exemples d'une section par excellence géométrique, citons les §§ 20 — 22 (théorie de la dimension): ils concernent un domaine où le succès des méthodes topologiques en Géométrie est particulièrement frappant. Un grand nombre de problèmes traités dans les §§ 26—28, 33—36 représente la deuxième tendance [1]. La théorie des fonctions mesurables B, qui n'était à son origine qu'une théorie des fonctions réelles de variable réelle, est devenue (dans sa partie la plus importante) une théorie des transformations des espaces topologiques (satisfaisant aux ax. I—V) en espaces topologiques, de sorte qu'il est juste de traiter cette théorie comme une section de la Topologie. Les §§ 25 et 33 concernent la notion d'ensemble borelien, notion purement topologique, dont l'origine est liée à la Théorie de la mesure. Les §§ 10, 34 et 35 concernent les généra-

[1] Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux problèmes géométriques peut omettre la lecture des §§ précités. Il importe toutefois de remarquer qu'il n'y a pas de ligne de démarcation précise entre notions et problèmes des deux genres. Par exemple, la notion d'ensemble de I-re catégorie, introduite par Baire pour les besoins de l'étude des fonctions discontinues, est d'une grande importance dans maintes questions purement géométriques.

lisations plus récentes de cette notion; ces généralisations sont traitées dans le chapitre consacré aux espaces complets et donnent lieu à des applications importantes dans le Calcul fonctionnel. En outre, la notion d'ensemble projectif (§ 34) semble présenter un grand intérêt philosophique, grâce surtout aux liaisons avec la Logique mathématique. L'emploi des notations logiques s'impose d'une façon très naturelle dans l'étude de ces ensembles, ainsi que dans celle des ensembles boreliens et analytiques, où elle rend des services incontestables.

Les *méthodes de raisonnement* que j'emploie dans ce volume appartiennent à la Théorie des ensembles [1]), les méthodes de la Topologie combinatoire (homologies, groupes de Betti etc.) n'intervenant pas, en général, dans les questions traitées ici.

Sans prétendre de donner une bibliographie complète, j'ai tâché d'indiquer dans les *renvois bibliographiques* les ouvrages les plus importants parmi ceux qui se rattachent au sujet de ce volume.

Le lecteur qui s'intéresse à la bibliographie consultera les excellents exposés de MM. Rosenthal-Zoretti, Encyklopädie d. Math. Wiss. II C 9a, Leipzig 1924 et de MM. Tietze-Vietoris, ibid. III AB 13, Leipzig 1931.

Parmi les livres sur la Topologie dont je me suis servi en rédigeant ce volume et dont la valeur ne se réduit pas seulement à leur intérêt historique, sont à citer: F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit 1914 et *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, Gruyter 1927, W. Sierpiński, *Zarys teorji mnogości* II, Warszawa 1928, M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Monographies Borel, Paris 1928. Le manuscrit de ce volume était déjà terminé, quand ont paru les livres: H. Hahn, *Reelle Funktionen* I, Leipzig 1932 et R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Coll. Publ., New York 1932.

En terminant, je tiens à exprimer ici mon affectueuse gratitude à MM. Čech, Hurewicz, Knaster, Otto, Posament, Szpilrajn et Zygmund, qui ont bien voulu contribuer à ma tâche soit par leurs précieux conseils, soit par la lecture des épreuves.

Casimir Kuratowski.

Lwów, Décembre 1933.

[1]) „point set theoretic method" selon la dénomination des mathématiciens américains.

ERRATA.

page	ligne	remplacer	par
25	10	$(1-X)\cdot(1-X)$	$(1-X)\cdot(1-Y)$
43	15	I_2	I_1
58	14	Z	$Z\supset X$
69	4	p	$f(p)$ (deux fois)
81	7	(r_2, s_2)	(r_1, s_2), (r_2, s_1), (r_2, s_2)
89	7*	$y \varepsilon B$	$x \varepsilon A$
„	„	$x \varepsilon A$	$y \varepsilon B$
106	15*	$[x, y]$	$[x=y]$
236	4	$2n-2$	$n-2$

* L'astérisque indique qu'il faut compter en remontant.

INTRODUCTION.

Nous rappellerons ici quelques notations et théorèmes élémentaires de la Théorie générale des ensembles et de l'Algèbre de la Logique. Les notions de la Théorie des ensembles seront d'emploi constant (excepté l'opération $(\mathcal{A})$, qui est d'un caractère plus spécial). L'Algèbre de la Logique, dans la majorité des §§ (surtout dans ceux de nature „géométrique") ne sera pas employée, tandis que nous en ferons usage dans certains problèmes (surtout liés à la Théorie des fonctions) où l'emploi des notations logiques s'impose d'une façon très naturelle et permet de simplifier les raisonnements (p. ex. aux §§ 27, 33—35).

A la première lecture, on peut omettre tout ce qui concerne l'Algèbre de la Logique.

§ 1. Opérations de la Logique et de la Théorie des ensembles.

I. **Algèbre de la Logique.** α et β étant deux propositions, α' désigne la *négation* de α (c'est à dire „non α"), $\alpha+\beta$ la *somme* logique („α ou β"), $\alpha\cdot\beta$ le *produit* logique („α et β"); $\alpha\rightarrow\beta$ veut dire que α entraîne β *(implication)*, $\alpha\equiv\beta$ veut dire que α équivaut à β.

Citons, à titre d'exemple, les théorèmes suivants: $\alpha''\equiv\alpha$ (loi de double négation), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\beta'\rightarrow\alpha')$ (loi de contraposition), $(\alpha\cdot\beta)'\equiv\alpha'+\beta'$, $(\alpha+\beta)'\equiv(\alpha'\cdot\beta')$ (lois de de Morgan), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\alpha'+\beta)$, $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\equiv\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Chaque proposition admet l'une des deux valeurs 0 (le „faux") ou 1 (le „vrai"). On a $\alpha\cdot\alpha'\equiv 0$ (principe de contradiction), $\alpha+\alpha'\equiv 1$ (principe du tiers exclu).

Comme espace complet, $\mathcal{N}$ n'est pas de I-re catégorie. Il en résulte (comme dans la démonstration précédente) qu'il existe une infinité indénombrable de différences $F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi$ non vides. *Tout ensemble E contenant un seul point de chacune d'elles est un espace ν indénombrable.* Plus encore: tout sous-ensemble N de E qui est non-dense dans $\mathcal{N}$ est dénombrable. Car $\overline{N}$ étant non-dense dans $\mathcal{N}$, il existe un indice α tel que $F_\alpha = \overline{N}$, d'où $N \subset EF_\alpha$. L'ensemble EF_α étant dénombrable (par définition de E), l'ensemble N l'est également.

Propriétés des espaces ν. 1. *Tout espace ν est totalement imparfait.*

Car l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor contient un sous-ensemble parfait non-dense dans $\mathcal{C}$.

2. *Chaque sous-ensemble à propriété de Baire d'un espace ν est la somme d'un ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ et d'un ensemble dénombrable.*

Car il est la somme d'un ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ et d'un ensemble de I-re catégorie (p. 51, IV, 2) et ce dernier est dénombrable. Il en résulte que

3. *Chaque fonction jouissant de la propriété de Baire et définie sur un espace ν est de deuxième classe*[1]).

4. *$f(x)$ étant une fonction à valeurs réelles, jouissant de la propriété de Baire et définie sur un espace E à propriété ν, l'ensemble $f(E)$ est de mesure lebesguienne nulle: $mf(E) = 0$*[2]).

En effet, d'après le théorème p. 195, V, il existe dans E un ensemble Z tel que $mf(Z) = 0$ et que $E - Z$ est de I-re catégorie. $E - Z$ étant dénombrable par hypothèse, il vient $mf(E - Z) = 0$, d'où $mf(E) = 0$.

5. *E étant un espace ν, à chaque suite $\{c_n\}$ de nombres positifs correspond une décomposition $E = E_1 + E_2 + \ldots$ telle que $\delta(E_n) < c_n$*[3]).

En effet, $\{p_n\}$ étant une suite dense dans E et E_{2n} étant une sphère ouverte de centre p_n et telle que $\delta(E_{2n}) < c_{2n}$, l'ensemble ouvert $G = E_2 + E_4 + E_6 + \ldots$ est dense dans E. L'ensemble $E - G$ est par conséquent non-dense, donc dénombrable: $E - G = [q_1, q_2, \ldots]$. On pose $E_{2n-1} = (q_n)$.

---

[1]) G. Poprougénko, *Sur un problème de M. Mazurkiewicz*, Fund. Math. 15 (1930), p. 285.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle*, Fund. Math. 11 (1928), p. 302.

[3]) Cf. W. Sierpiński ibid., p. 304. Le problème de l'existence des ensembles indénombrables satisfaisant à la thèse du théorème 5 provient de M. Borel. On ne sait pas l'établir sans l'hypothèse du continu. Voir E. Borel, *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. math. de France 47 (1919), p. 1 et E. Szpilrajn, *Sur une hypothèse de M. Borel*, Fund. Math. 15 (1930), p. 126.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

Symboles de la Logique et de la Théorie des ensembles.

Symboles topologiques et métriques.

Termes.

AUTEURS CITÉS.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME CHAPITRE. **Espaces complets.**