TROISIÈME CHAPITRE.

Espaces complets.

§ 29. Définitions. Généralités.

I. Définitions. Une suite de points $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ (situés dans un espace métrique) *satisfait à la condition de Cauchy*, lorsqu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond un n tel qu'on a $|p_n - p_k| < \epsilon$ pour tout $k > n$; autrement dit, lorsque $\lim\limits_{n=\infty} \delta(E_n) = 0$, où E_n désigne l'ensemble $(p_n, p_{n+1}, \ldots)$.

Un espace métrique est dit *complet* [1]), lorsque chaque suite satisfaisant à la condition de Cauchy y est convergente (c. à d. qu'il existe dans cet espace un point p tel que $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$).

Remarque. La notion d'espace complet n'est pas une notion topologique: l'intervalle ouvert $0 < x < 1$ n'est pas un espace complet, tandis que l'ensemble de tous les nombres réels — qui lui est homéomorphe — est complet (en vertu du théorème classique sur l'équivalence de la condition de Cauchy à la convergence d'une suite de nombres réels).

Nous distinguons entre la notion d'espace complet *au sens métrique* (qui vient d'être définie) et celle d'espace complet *au sens topologique:* à savoir, d'espace homéomorphe à un espace complet au sens métrique [2]).

---

[1]) Notion due à M. Fréchet (Thèse). Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 315. Il est à remarquer que les espaces métriques satisfaisant à l'ax. I de M. R. L. Moore (*Foundations*..., p. 464) sont complets, voir J. H. Roberts, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), p. 835. Cf. aussi W. Sierpiński, Fund. Math. 6 (1924), p. 106.

[2]) C'est dans ce dernier sens que M. Fréchet emploie le terme espace complet.

II. Convergence et condition de Cauchy. *Chaque suite convergente satisfait à la condition de Cauchy.*

Car, si l'on admet que $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, à chaque $\epsilon > 0$ correspond un n tel que l'on a $|p_k - p| < \epsilon/2$ pour $k \geqslant n$; donc $|p_n - p_k| < \epsilon$.

Le théorème inverse n'est pas vrai dans les espaces non complets. Cependant: *si une suite satisfaisant à la condition de Cauchy contient une sous-suite convergente, la suite totale est convergente* (et converge vers la limite de la sous-suite en question).

Soit, en effet, $p = \lim\limits_{j=\infty} p_{i_j}$. Le sens de ϵ et n étant le même que dans la définition de la condition de Cauchy, soit m un indice $> n$ et tel que $|p_{i_m} - p| < \epsilon$. Comme $i_m \geqslant m > n$, il vient $|p_{i_m} - p_k| < 2\epsilon$ pour $k > n$. On a donc $|p_k - p| < 3\epsilon$, d'où $\lim\limits_{k=\infty} p_k = p$.

Un espace dont chaque suite contient une sous-suite convergente est nommé *compact* [1]). Ainsi chaque espace métrique compact est complet.

III. Produit cartésien. *Le produit cartésien $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ de deux espaces complets est complet, lorsqu'il est métrisé par la formule $|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2}$, où $\mathfrak{z} = (x, y)$ et $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1)$* (cf. p. 88).

En effet, si la suite des points $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy, les suites des abscisses $x_1, x_2, \ldots$ et des ordonnées $y_1, y_2, \ldots$ lui satisfont également, car $|x_n - x_k| \leqslant |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k|$ et $|y_n - y_k| \leqslant |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k|$. Les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ étant complets, ils contiennent respectivement des points x et y tels que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n=\infty} y_n$, d'où $(x, y) = \lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$.

Le théorème précédent, valable pour chaque nombre fini d'espaces, s'étend sur les produits dénombrables. Notamment, *le produit $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots$ d'une suite d'espaces complets est un espace complet, lorsqu'il est métrisé par la formule*

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}{1 + |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}$$

où $\mathfrak{z}$ désigne la suite $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots$ et $\mathfrak{y}$ la suite $\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \ldots$ (voir p. 88, renvoi [2])).

---

[1]) A l'étude des espaces compacts sera consacré le Chapitre IV.

Supposons, en effet, que la suite $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy. Soit i un indice arbitraire fixe. A chaque $\epsilon > 0$ (tel que $1 - 2^i\epsilon > 0$) correspond un n tel que l'on a $|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k| < \epsilon$, quel que soit $k > n$. Il vient

$$\frac{|\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i|}{1 + |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i|} < 2^i\epsilon, \quad \text{d'où} \quad |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i| < \frac{2^i\epsilon}{1 - 2^i\epsilon} = \frac{1}{\dfrac{1}{2^i\epsilon} - 1}.$$

Ce dernier nombre tendant vers 0 avec ϵ, on en conclut que la suite $\mathfrak{z}_1^i, \mathfrak{z}_2^i, \ldots, \mathfrak{z}_n^i, \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy. L'espace $\mathcal{X}_i$ étant complet, il existe donc un $\mathfrak{z}^i = \lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i$, d'où $\mathfrak{z} = \lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$.

En particulier, *l'espace euclidien* $\mathcal{E}^n$, *l'espace* $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ *des suites de nombres réels, le cube n-dimensionnel* $\mathcal{J}^n$, *le cube fondamental* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *de Hilbert, l'espace* $\mathcal{N}$ *des nombres irrationnels* (comme la puissance $\aleph_0$ de l'ensemble des nombres naturels) *sont topologiquement complets* (c. à d. homéomorphes à des espaces complets).

IV. Espace $2^{\mathcal{X}}$. *Si* $\mathcal{X}$ *est complet, l'espace* $2^{\mathcal{X}}$ *l'est également* [1]. De plus, *toute suite* $\{A_n\}$ *extraite de l'espace* $2^{\mathcal{X}}$ *et satisfaisant à la condition de Cauchy converge vers l'ensemble (non vide)* $\operatorname{Lim}\limits_{n=\infty} A_n$ (au sens établi p. 155), *qui est aussi un élément de cet espace.*

Soit, en effet, $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'ensembles-éléments de $2^{\mathcal{X}}$ satisfaisant à la condition de Cauchy. Autrement dit: à chaque $\epsilon > 0$ correspond un $n(\epsilon)$ tel que

(1) $\qquad n > n(\epsilon)$ entraîne $\operatorname{dist}(A_n, A_{n(\epsilon)}) < \epsilon$.

Posons $L = \operatorname{Ls} A_n$. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n=\infty} \operatorname{dist}(L, A_n) = 0$.

Il suffit de prouver que $\operatorname{dist}(L, A_{n(\epsilon)}) \leqslant 2\epsilon$, car on en conclura en vertu de (1) que $\operatorname{dist}(L, A_n) \leqslant 3\epsilon$ pour $n > n(\epsilon)$.

Ainsi tout revient à montrer que

1° quel que soit $p \in L$, on a $\rho(p, A_{n(\epsilon)}) \leqslant 2\epsilon$,

2° quel que soit $q \in A_{n(\epsilon)}$, on a $\rho(q, L) \leqslant 2\epsilon$.

Or, R désignant la sphère (généralisée) fermée de centre $A_{n(\epsilon)}$ et de rayon ϵ, on a, selon (1), $A_n \subset R$, pour $n > n(\epsilon)$ (§ 15, VII (2)).

[1] Théorème de M. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 124, Leipzig 1932.

Comme limite supérieure de la suite $\{A_n\}$, l'ensemble L satisfait à l'inclusion $L \subset \overline{A_n + A_{n+1} + \ldots}$ (cf. § 25, IV, 8), d'où $L \subset R$, ce qui prouve la proposition 1°.

Pour démontrer 2° posons $n(\epsilon/2^k) = n_k$ (on peut admettre que $n_k > n_{k-1}$) et envisageons la suite $q_{n_0}, q_{n_1}, \ldots, q_{n_k}, \ldots$ définie par induction comme il suit: on choisit dans A_{n_k} un point q_{n_k} de façon que $q_{n_0} = q$ et $|q_{n_k} - q_{n_{k-1}}| < \epsilon/2^{k-1}$, ce qui est toujours possible en raison de (1).

La suite $q_{n_0}, q_{n_1}, \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy, car on a $|q_{n_m} - q_{n_k}| < \epsilon/2^{k-1}$ pour $m > k$. L'espace étant complet, la suite converge donc vers un point l de cet espace. Par définition de la limite supérieure, l appartient à L. Comme, en outre, $|q_{n_k} - q_{n_0}| < 2\epsilon$ quel que soit k, il vient $|q - l| \leqslant 2\epsilon$, d'où la proposition 2°.

Enfin, d'après le théorème p. 158, la limite d'une suite d'ensembles $\{A_n\}$, convergente dans l'espace $2^{\mathcal{X}}$, coïncide avec l'ensemble $\operatorname{Lim}\limits_{n=\infty} A_n$, de sorte que $L = \operatorname{Lim}\limits_{n=\infty} A_n$.

V. Espace fonctionnel. Espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Nous avons vu au § 15, VIII que la famille des fonctions bornées $y = f(x)$ qui transforment l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$ peut être conçue comme un espace métrique, lorsqu'on adopte la définition suivante de la distance:

(⁰) $$|f_1 - f_2| = \max_{x \in \mathcal{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Si $\mathcal{Y}$ *est complet, l'espace fonctionnel considéré l'est également.*

Supposons, en effet, que l'on ait $|f_n - f_k| < \epsilon$ pour $k > n$. Par conséquent, pour x fixe, on a $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$ et la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy. Posons donc $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$. La suite $f_n(x)$ étant uniformément convergente, les fonctions f_n convergent vers f au sens de la distance (⁰).

Il en résulte que *l'espace des fonctions bornées continues*, espace que nous désignons [1] par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, *est complet.* Car la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue.

[1] par analogie à la puissance n^{m} dans le théorie des nombres cardinaux.

Il en est de même de l'espace des fonctions de classe α (cf. § 27, VIII), de celui des fonctions mesurables B, de l'espace des fonctions à propriété de Baire (cf. § 28, III).

VI. Ensembles G_δ dans les espaces complets.

Il résulte directement de la définition de l'espace complet que *tout sous-ensemble fermé d'un espace complet constitue lui-même un espace complet* (avec la même notion de distance).

D'après le corollaire p. 151, tout sous-ensemble G_δ d'un espace métrique $\mathfrak{X}$ est homéomorphe à un ensemble fermé situé dans le produit cartésien $\mathfrak{X}\times\mathcal{E}^{\aleph_0}$ où $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ désigne l'espace des suites infinies de nombres réels. Or, si l'on suppose que $\mathfrak{X}$ est un espace complet, l'espace $\mathfrak{X}\times\mathcal{E}^{\aleph_0}$, comme produit de deux espaces complets, l'est également, ainsi que chacun de ses sous-ensembles fermés. On arrive ainsi au suivant

Théorème [1]). *Chaque sous-ensemble G_δ d'un espace complet est homéomorphe à un espace complet, c. à d. est complet au sens topologique.*

Le procédé qui nous a servi à démontrer le corollaire cité de p. 151 permet de définir directement une „nouvelle distance" dans un ensemble G_δ, de façon que cet ensemble devienne un espace complet. Notamment, étant donné un ensemble $Q=G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ où G_i est ouvert, posons $f_i(x)=\dfrac{1}{\rho(x,\mathfrak{X}-G_i)}$.
La nouvelle distance entre deux points x et y de Q est alors égale à

$$|x-y|+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|f_i(x)-f_i(y)|}{1+|f_i(x)-f_i(y)|}.$$

VII. Prolongement d'un espace métrique en espace complet.

Chaque espace métrique est isométrique à un sous-ensemble d'un espace complet [2]).

Notamment, les suites $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots,\mathfrak{z}^i,\ldots]$ extraites de l'espace donné $\mathfrak{X}$ et satisfaisant à la condition de Cauchy sont les points

---

[1]) Théorème de M. Alexandroff, *Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits*, C. R. Paris, t. 178 (1924), p. 185. Une simple démonstration a été donnée par M. Hausdorff, *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen*, Fund. Math. 6 (1924), p. 146. Pour le théorème inverse, voir § 31, II.

[2]) Théorème de M. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 315. La démonstration de M. Hausdorff présente une généralisation du procédé bien connu de Cantor-Méray de la définition des nombres irrationnels.

de l'espace complet $\widetilde{\mathfrak{X}}$; la distance entre deux suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ est définie dans l'espace $\widetilde{\mathfrak{X}}$ par la formule

$$(0)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|=\lim_{i=\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|,$$

deux suites à distance 0 étant identifiées (cf. p. 83, remarque).

L'espace $\widetilde{\mathfrak{X}}$ ainsi défini est métrique. Car, d'une part, l'inégalité $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|\leqslant|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}^j|+|\mathfrak{z}^j-\mathfrak{y}^j|+|\mathfrak{y}^j-\mathfrak{y}^i|$ donne $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|-|\mathfrak{z}^j-\mathfrak{y}^j|\leqslant\leqslant|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}^j|+|\mathfrak{y}^j-\mathfrak{y}^i|$ et par conséquent, si les suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ satisfont à la condition de Cauchy, il en est de même de la suite (numérique) $|\mathfrak{z}^1-\mathfrak{y}^1|$, $|\mathfrak{z}^2-\mathfrak{y}^2|,\ldots$ L'existence de la limite $\lim\limits_{i=\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|$ en résulte. Ainsi la distance se trouve définie pour chaque couple d'éléments de $\widetilde{\mathfrak{X}}$.

D'autre part, la loi du triangle est vérifiée, car l'inégalité $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|+|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{w}^i|\geqslant|\mathfrak{y}^i-\mathfrak{w}^i|$ donne par le passage à limite la formule $|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|+|\mathfrak{z}-\mathfrak{w}|\geqslant|\mathfrak{y}-\mathfrak{w}|$.

Dans le cas où pour chaque i on a $\mathfrak{z}^i=x$ et $\mathfrak{y}^i=y$, il vient évidemment $|x-y|=|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|$. L'espace $\mathfrak{X}$ est donc isométrique au sous-ensemble de $\widetilde{\mathfrak{X}}$ composé de suites à éléments identiques.

Reste à prouver que l'espace $\widetilde{\mathfrak{X}}$ est complet.

Soit $\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\ldots,\mathfrak{z}_n,\ldots$ une suite extraite de $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Il existe donc une suite d'entiers positifs $m_1,m_2,\ldots,m_n,\ldots$ telle que

$$(1)\qquad |\mathfrak{z}_n^{m_n}-\mathfrak{z}_n^i|<\frac{1}{n}\quad\text{pour } i>m_n.$$

Supposons que la suite $\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\ldots$ satisfait à la condition de Cauchy. Nous allons prouver qu'il en est de même de la suite $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}_1^{m_1},\mathfrak{z}_2^{m_2},\ldots]$, donc que $\mathfrak{z}\,\varepsilon\,\widetilde{\mathfrak{X}}$, et qu'en outre $\mathfrak{z}=\lim\limits_{n=\infty}\mathfrak{z}_n$.

Soit $\epsilon>0$. La suite $\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\ldots$ satisfaisant à la condition de Cauchy, il existe un indice $q=q(\epsilon)>1/\epsilon$ tel que $|\mathfrak{z}_q-\mathfrak{z}_{q+k}|<\epsilon$, quel que soit k. Il existe donc selon (0) une suite d'entiers j_k telle que

$$(2)\qquad |\mathfrak{z}_q^i-\mathfrak{z}_{q+k}^i|<\epsilon\quad\text{pour } i>j_k.$$

L'inégalité $|\mathfrak{z}_q^{m_q}-\mathfrak{z}_{q+k}^{m_{q+k}}|\leqslant|\mathfrak{z}_q^{m_q}-\mathfrak{z}_q^i|+|\mathfrak{z}_q^i-\mathfrak{z}_{q+k}^i|+|\mathfrak{z}_{q+k}^i-\mathfrak{z}_{q+k}^{m_{q+k}}|$ implique d'après (1) et (2) pour i supérieur à m_q, j_k et m_{q+k} que

$$(3) \qquad |\mathfrak{z}_q^{m_q} - \mathfrak{z}_{q+k}^{m_{q+k}}| < \frac{1}{q} + \epsilon + \frac{1}{q+k} < 3\epsilon,$$

ce qui prouve que la suite $\mathfrak{z}$ satisfait à la condition de Cauchy.

L'inégalité $|\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_i^{m_i}| \leqslant |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_n^{m_n}| + |\mathfrak{z}_n^{m_n} - \mathfrak{z}_i^{m_i}|$ entraîne en vertu de (1) et (3) pour $i > m_n$, $n > q$ et $i > q$:

$$(4) \qquad |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_i^{m_i}| < \frac{1}{n} + 6\epsilon < 7\epsilon.$$

On voit ainsi qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice q tel que pour $n > q$ on a l'inégalité (4), pourvu que i soit suffisamment grand. En faisant croître i à l'infini, il vient en raison de (0) $|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}| \leqslant 7\epsilon$, d'où $\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$.

Remarque. Si l'on identifie les points x de l'espace $\mathfrak{X}$ avec les suites $[x, x, x, ...]$, *l'espace* $\mathfrak{X}$, considéré comme sous-ensemble de $\widetilde{\mathfrak{X}}$, *est dense dans* $\widetilde{\mathfrak{X}}$. En effet, étant donnée une suite $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, ...]$ appartenant a $\widetilde{\mathfrak{X}}$, on a $\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$, où $\mathfrak{z}_n = [\mathfrak{z}^n, \mathfrak{z}^n, \mathfrak{z}^n, ...]$. Car d'après (0) $|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}| = \lim_{i=\infty} |\mathfrak{z}^n - \mathfrak{z}^{n+i}|$ et, la suite $\mathfrak{z}$ satisfaisant à la condition de Cauchy, il vient $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}| = 0$.

En particulier, *si* $\mathfrak{X}$ *est séparable*, $\widetilde{\mathfrak{X}}$ *l'est également.*

A. Espaces complets arbitraires (§§ 30—31).

§ 30. Suites d'ensembles. Théorème de Baire.

L'espace considéré dans ce § est supposé complet (séparable ou non).

I. **Coefficient** $\alpha(A)$. Nous désignons par $\alpha(A)$ la borne inférieure des nombres ϵ pour lesquels l'ensemble A se laisse décomposer en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \epsilon$. L'égalité $\alpha(A) = 0$ signifie ainsi que A est totalement borné (p. 91).

Théorème[1]. *Toute suite* $A_1 \supset A_2 \supset ...$ *de sous-ensembles fermés non vides de l'espace* $\mathfrak{X}$ *et tels que* $\lim_{n=\infty} \alpha(A_n) = 0$ *converge dans l'espace* $2^{\mathfrak{X}}$ *vers l'ensemble non vide* $A_1 \cdot A_2 \cdot ...$

[1]) Voir ma note *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), p. 303. D'après un théorème du Chapitre IV, l'ensemble $A_1 \cdot A_2 \cdot ...$ est *compact*.

Supposons d'abord que la suite $\{A_n\}$ ne satisfasse pas à la condition de Cauchy. Il existe alors un $\epsilon > 0$ et une suite d'entiers croissants $\{k_n\}$ tels que $\mathrm{dist}(A_n, A_{k_n}) > \epsilon$. On en conclut qu'il existe une suite de points $\{p_n\}$ telle que $p_n \in A_n$ et $\rho(p_n, A_{k_n}) > \epsilon$, car l'inclusion $A_n \supset A_{k_n}$ entraîne $\rho(A_n, x) = 0$ pour chaque $x \in A_{k_n}$.

Soit m un entier tel que $\alpha(A_m) < \epsilon$. Posons

$$A_m = Z_1 + ... + Z_l \quad \text{et} \quad \delta(Z_i) < \epsilon.$$

Les points $p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, ...$ appartenant à A_m, il existe parmi les ensembles $Z_1, ..., Z_l$ un (on peut admettre que ce soit Z_1) qui en contient une sous-suite infinie $p_{i_1}, p_{i_2}, ...$ Soit j un indice tel que $i_j > k_{i_1}$. Donc $A_{k_{i_1}} \supset A_{i_j}$ et $p_{i_j} \in A_{k_{i_1}}$. Les formules $p_{i_1} \in Z_1$, $p_{i_j} \in Z_1$ et $\delta(Z_1) < \epsilon$ entraînent $|p_{i_1} - p_{i_j}| < \epsilon$, d'où $\rho(p_{i_1}, A_{k_{i_1}}) < \epsilon$, contrairement à la définition de la suite $\{p_n\}$.

Cette contradiction montre que la suite $\{A_n\}$ satisfait à la condition de Cauchy, donc (selon § 29, IV) qu'elle converge vers l'ensemble $\mathrm{Lim}\, A_n$, qui coïncide avec le produit $A_1 \cdot A_2 \cdot ...$, puisque la suite est décroissante (§ 25, VI, 8).

Corollaire. Etant donnée une famille (dénombrable ou non) d'ensembles fermés $\{F_\iota\}$ *tels que* 1° *le produit de chaque système fini d'ensembles* F_ι *est non vide et* 2° *il existe des ensembles* F_ι *avec* $\alpha(F_\iota)$ *aussi petit que l'on veut, — le produit de* t o u s *les ensembles* F_ι *est non vide.*

Soit $\varkappa_n$ un indice tel que $\alpha(F_{\varkappa_n}) < 1/n$. Posons $P = F_{\varkappa_1} \cdot F_{\varkappa_2} \cdot ...$ Il vient $\alpha(P) = 0$, c. à. d. que P est totalement borné, donc séparable (p. 91). D'après le théorème de M. L i n d e l ö f (p. 102) appliqué à l'ensemble P, considéré comme l'espace, il existe une suite d'indices $\iota_1, \iota_2, ...$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} P - F_{\iota_n} = \sum_{\iota} P - F_\iota$, donc que $\prod_{n=1}^{\infty} PF_{\iota_n} = \prod_{\iota} PF_\iota = \prod_{\iota} F_\iota$. Posons $A_n = F_{\varkappa_1} \cdot ... \cdot F_{\varkappa_n} \cdot F_{\iota_1} \cdot ... \cdot F_{\iota_n}$. Il résulte du théorème précédent que $\prod_{n=1}^{\infty} PF_{\iota_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$, d'où $\prod_{\iota} F_\iota \neq 0$.

II. Théorème de Cantor [1]. *Pour toute suite $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ d'ensembles fermés, non vides et tels que $\lim\limits_{n=\infty} \delta(A_n) = 0$, l'ensemble $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ se compose d'un seul point.*

C'est une conséquence immédiate du théorème N°I et de l'inégalité $\alpha(A_n) \leqslant \delta(A_n)$.

Le théorème de Cantor peut être démontré plus directement. Notamment, en extrayant un point p_n de chaque A_n, on définit une suite satisfaisant à la condition de Cauchy. La limite de cette suite étant un point de chaque A_n (puisque A_n est fermé), elle appartient à $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$

Il est à remarquer que ce théorème *caractérise* les espaces complets (parmi les espaces métriques). Considérons, en effet, une suite $p_1, p_2, \dots$ satisfaisant à la condition de Cauchy; en posant $E_n = (p_n, p_{n+1}, \dots)$, il vient $\lim\limits_{n=\infty} \delta(E_n) = 0$. D'après le théorème de Cantor, il existe un point $p \varepsilon \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \cdot \dots$, d'où $|p - p_n| \leqslant \delta(\overline{E}_n) = \delta(E_n)$, donc $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$.

III. Application aux fonctions continues. *Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur l'espace $\mathcal{X}$ et soit $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ une suite d'ensembles fermés, non vides et tels que $\lim\limits_{n=\infty} \alpha(F_n) = 0$* (en particulier, tels que $\lim\limits_{n=\infty} \delta(F_n) = 0$). *On a alors* $f\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} f(F_n)$.

En effet, on a toujours (§ 3, II, 2a): $f(F_1 \cdot F_2 \cdot \dots) \subset f(F_1) \cdot f(F_2) \cdot \dots$ Réciproquement, considérons un point $y \varepsilon f(F_1) \cdot f(F_2) \cdot \dots$ et posons $A_n = F_n \cdot f^{-1}(y)$. Il vient, selon N° I, $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \neq 0$, d'où $f^{-1}(y) \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \neq 0$, donc $y \varepsilon f(F_1 \cdot F_2 \cdot \dots)$, c. q. f. d.

IV. Théorème de Baire [2]. *Chaque ensemble de première catégorie est un ensemble frontière.*

Soit, en effet, $E = N_1 + N_2 + \dots$ une série d'ensembles non-denses. Soit S_0 une sphère arbitraire (fermée). Il s'agit de prouver que $S_0 - E \neq 0$.

Considérons la suite $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ de sphères fermées, définie (par induction) comme suit: l'ensemble N_n étant non-dense, il existe une sphère fermée, désignons la par S_n, telle que $S_n \subset S_{n-1} - N_n$ et $\delta(S_n) < 1/n$. D'après le théorème de Cantor, il

[1] Cf. G. Cantor, Math. Ann. 17 (1880) et F. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 318, où on trouve ce théorème dans la forme énoncée ici.

[2] Thèse, Ann. di Mat. 1899, p. 65.

existe un point $p \varepsilon \prod\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. Comme $\prod\limits_{n=0}^{\infty} S_n \subset \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - N_n) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, il vient $p \varepsilon S_0 - E$.

Corollaire 1. Le complémentaire d'un ensemble de I-re catégorie n'est pas de I-re catégorie (pourvu que l'espace soit non vide).

Corollaire 2. L'espace n'est de I-re catégorie en aucun point.

Car, en cas contraire, il existerait un ensemble ouvert non vide de I-re catégorie.

Corollaire 3. Chaque point d'un espace complet dense en soi en est un point de condensation.

Car, en cas contraire, il existerait un ensemble ouvert dénombrable et, chaque point individuel formant un ensemble non-dense, l'ensemble ouvert serait de I-re catégorie.

Corollaire 4. Chaque espace complet dénombrable est clairsemé [1].

Car un espace non clairsemé contient un sous-ensemble parfait non vide (§ 9, VI, 3). Cet ensemble parfait, considéré comme l'espace, est complet et dense en soi, donc indénombrable d'après le corollaire précédent.

Corollaire 5. Etant donnée une décomposition d'un espace complet en une série d'ensembles fermés: $1 = Z_1 + Z_2 + \dots$, si l'ensemble EZ_n est clairsemé pour chaque n, l'ensemble E l'est également.

Soit D un sous-ensemble dense en soi de E. Comme ensemble clairsemé, DZ_n est un ensemble frontière dans D (§ 9, VI, 1). On a donc $\overline{D - Z_n} = \overline{D}$. d'où $\overline{D} \cdot Z_n \subset \overline{D} = \overline{D - Z_n} \subset \overline{D} - Z_n$, ce qui prouve que $\overline{D} \cdot Z_n$ est un ensemble frontière dans $\overline{D}$ (p. 34, VI); comme ensemble fermé, il est donc non-dense dans $\overline{D}$.

L'identité $\overline{D} = \overline{D} \cdot Z_1 + \overline{D} \cdot Z_2 + \dots$ implique par conséquent que $\overline{D}$, comme ensemble de I-re catégorie sur lui-même, est vide (d'après le cor. 1, l'ensemble $\overline{D}$ étant considéré comme un espace complet). Donc $D = 0$.

Corollaire 6. E étant un ensemble dense en soi (non vide) situé dans un espace complet 1 et $f(x)$ étant une fonction définie sur cet espace, continue et telle que la fonction partielle $f(x|E)$ est biunivoque, l'ensemble V des valeurs de la fonction f est indénombrable.

Supposons, par contre, que $V = (y_1, y_2, \dots)$. Posons $Z_n = f^{-1}(y_n)$. Il vient $1 = Z_1 + Z_2 + \dots$ et les ensembles Z_n sont fermés. En outre, EZ_n ne contient qu'un seul point au plus, puisque les conditions $x \varepsilon EZ_n$ et $x' \varepsilon EZ_n$ entraînent $f(x) = y_n = f(x')$, d'où $x = x'$ (la fonction $f(x|E)$ étant biunivoque). D'après le cor. 5, l'ensemble E serait donc clairsemé, contrairement à l'hypothèse.

[1] Voir dans cet ordre d'idées § 32, V, théorème.

Remarques. 1. La démonstration du théorème de B a i r e peut être rendue *effective* dans ce sens (cf. p. 108) qu'étant données: 1⁰ la base $R_1, R_2, \ldots$ de l'espace, 2⁰ une suite $N_1, N_2, \ldots$ d'ensembles non-denses et 3⁰ une sphère S_0, on peut *définir* un point p qui appartient à $S_0-(N_1+N_2+\ldots)$. On pose notamment, pour $n>0$, $S_n=\overline{R}_{k_n}$ où k_n est le plus petit indice tel que $\overline{R}_{k_n}\subset R_{k_{n-1}}-N_n$ et $\delta(R_{k_n})<1/n$. Le produit $S_0\cdot S_1\cdot S_2\cdot\ldots$ se compose alors d'un seul point, que l'on désigne par p.

2. *Le théorème de Baire équivaut à l'hypothèse que chaque suite X_n d'ensembles arbitraires remplit l'égalité* $1-\sum_{n=1}^{\infty} X_n\cdot\overline{1-\overline{X}_n}=1$.

Car les ensembles non-denses peuvent être définis comme ensembles de la forme $X\cdot\overline{1-\overline{X}}$ (puisque $X\cdot\overline{1-\overline{X}}\subset\overline{X}\cdot\overline{1-\overline{X}}$, cf. p. 33, IV).

V. Applications aux ensembles G_δ.

1). $Q_1, Q_2, \ldots$ *étant des G_δ denses, l'ensemble $Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots$ l'est aussi.*

Car, chacun des ensembles $1-Q_n$, comme un F_σ frontière, est de I-re catégorie. La somme $(1-Q_1)+(1-Q_2)+\ldots$ l'est donc également et le complémentaire de cette somme, c. à d. l'ensemble $Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots$, est dense.

2). *Chaque G_δ de I-re catégorie est non-dense.*

En effet, si Q n'est pas non-dense, il existe un ensemble ouvert $G\neq 0$ tel que l'ensemble QG est dense dans G. Par conséquent, si Q est un G_δ, $G-Q$ est un F_σ frontière, donc un ensemble de I-re catégorie. Si l'on supposait Q de I-re catégorie, l'ensemble ouvert G, comme somme de deux ensembles de I-re catégorie, le serait aussi, contrairement au corollaire 2.

Chaque ensemble G_δ situé dans un espace complet étant homéomorphe à un espace complet (§ 29, VII), tous les énoncés du N⁰ V se laissent *relativiser* par rapport aux ensembles G_δ. En particulier:

3). *Etant donné un ensemble Q qui est un G_δ, chaque sous-ensemble qui est de I-re catégorie dans Q est un ensemble frontière dans Q. Chaque ensemble G_δ dénombrable est clairsemé.*

VI. Applications aux ensembles F_σ et G_δ.

Théorème[1]). *Chaque ensemble F_σ et G_δ est développable en série alternée (transfinie) d'ensembles fermés décroissants.*

[1]) F. H a u s d o r f f, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 462.

Soit, en effet, E un ensemble F_σ et G_δ et X un ensemble fermé arbitraire non vide. Il s'agit de démontrer (p. 61, N⁰ V, 1⁰) que soit XE, soit $X-E$ n'est pas un ensemble frontière dans X. Or dans le cas contraire les ensembles XE et $X-E$, comme des F_σ frontières, seraient de I-re catégorie dans X (p. 44, N⁰ II) et leur somme $X=XE+X-E$ serait par conséquent de I-re catégorie sur elle-même, contrairement au corollaire 1 du N⁰ IV (X étant considéré comme l'espace).

En tenant compte du théorème inverse (p. 112, III (1)), on voit que *dans les espaces complets séparables les ensembles F_σ et G_δ coïncident avec les ensembles développables.*

On en conclut (cf. § 12, V et IX) que, pour qu'un ensemble E situé dans un espace complet séparable soit un F_σ et G_δ, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble F fermé et non vide:

1⁰ la frontière de FE relative à F soit non-dense dans F (ou encore: qu'elle soit $\neq F$),

2⁰ que FE soit une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense dans F (ou encore: une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense dans F),

3⁰ que FE soit localement fermé dans un de ses points (ou vide).

Il résulte de 3⁰ que *tout ensemble F_σ et G_δ homogène dans l'espace est une différence de deux ensembles fermés* (comme ensemble localement fermé en c h a c u n de ses points, cf. p. 65, N⁰ IX, 2⁰).

Dans les espaces complets séparables *chaque famille bien ordonnée d'ensembles F_σ et G_δ croissants (ou décroissants) est dénombrable*[1]) (cf. p. 113 (2)).

Problèmes de l'effectivité. 1. Chaque ensemble F_σ et G_δ est un F_σ et un G_δ *effectif* (cf. p. 112, remarque 1).

2. Dans le domaine des ensembles qui sont à la fois des F_σ et des G_δ *l'axiome du choix* se laisse réaliser effectivement, c. à d. que l'on sait nommer une fonction $f(X)$, définie pour chaque X qui est un F_σ et G_δ non vide, de façon que l'on ait $f(X)\in X$.

En vertu de l'énoncé précédent, il suffit de démontrer cette proposition pour les G_δ effectifs. Autrement dit, il s'agit de faire correspondre à chaque suite d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \ldots$ tels que $G_1\cdot G_2\cdot\ldots\neq 0$ un point p qui appartienne à chaque G_n, $n=1,2,\ldots$ Or, $R_1, R_2, \ldots$ étant la base de l'espace, soit k_1 le plus petit indice tel que $\overline{R}_{k_1}\subset G_1$, $R_{k_1}\cdot\prod_{n=1}^{\infty} G_n\neq 0$ et $\delta(R_{k_1})<1$;

[1]) Cet énoncé ne s'étend pas sur les ensembles G_δ. On ne peut non plus omettre l'hypothèse que l'espace est complet. Voir § 36, III.

d'une façon générale, soit k_m le plus petit indice tel que $\overline{R_{k_m}} \subset G_m \cdot R_{k_{m-1}}$, $R_{k_m} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq 0$ et $\delta(R_{k_m}) < 1/m$. D'après le théorème de Cantor, le produit $\overline{R}_{k_1} \cdot \overline{R}_{k_2} \cdot \ldots$ se réduit à un seul point; c'est bien le point p demandé.

3. Chaque famille dénombrable d'ensembles F_σ disjoints qui couvre l'espace tout entier est *effectivement dénombrable.*

En effet, le complémentaire de chacun de ces ensembles étant un F_σ, chacun d'eux est à la fois un F_σ et un G_δ. En appliquant l'énoncé précédent, on leur fait correspondre un point choisi; l'ensemble E de ces points, comme clairsemé (N° IV, cor. 5), est effectivement dénombrable (p. 115, IV), d'où la conclusion demandée.

VII. Applications aux fonctions de I-re classe. D'après le théorème p. 189, si $f(x)$ est une fonction mesurable B de I-re classe qui transforme un espace métrique $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un espace séparable $\mathcal{Y}$, l'ensemble de ses points de discontinuité est de I-re catégorie dans $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ est complet, cet ensemble est donc un ensemble frontière; autrement dit, *la fonction $f(x)$ est ponctuellement discontinue.* En rapprochant cet énoncé du théorème 2, p. 190, on parvient au théorème suivant:

Théorème[1]). *$\mathcal{X}$ étant complet et $\mathcal{Y}$ séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit mesurable B de I-re classe est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé.*

On voit aussitôt que la discontinuité ponctuelle peut être remplacée par l'existence d'un point de continuité sur tout ensemble fermé non vide et que le terme *fermé* peut être remplacé par *parfait* (voir p. 190, remarques 1 et 2).

Corollaire 1. Dans les mêmes hypothèses, si l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$ est dénombrable, f est de I-re classe.

Car tout ensemble parfait, comme indénombrable (N° V, cor. 3), contient un point de continuité de la fonction.

Corollaire 2. Chaque famille bien ordonnée de fonctions de I-re classe (à valeurs réelles) définies sur un espace complet: $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_\xi(x) \leqslant f_{\xi+1}(x) \leqslant \ldots$, est dénombrable.

---

[1]) R. Baire, Thèse, Ann. di Mat. 1899.

C'est une conséquence directe du théorème p. 113.

VIII. Applications aux théorèmes d'existence. L'importance du théorème de Baire tient aussi au fait, qu'il permet souvent de démontrer *l'existence* des éléments jouissant d'une propriété **P** donnée: notamment, si dans un espace complet l'ensemble des éléments qui ne jouissent pas de la propriété **P** se décompose en une série d'ensembles non-denses, cet ensemble, comme ensemble de I-re catégorie, n'épuise pas l'espace: c. à d. qu'il existe un élément qui possède la propriété **P** (et même un ensemble dense de tels éléments).

Ce procédé s'est montré surtout applicable à des problèmes d'existence des fonctions (de variable réelle) jouissant de certaines singularités [1]).

Considérons comme exemple la démonstration de *l'existence d'une fonction continue sans dérivée* [2]). Nous allons établir en effet l'existence d'une fonction plus singulière encore, à savoir d'une fonction continue qui n'admet dans aucun point les deux nombres dérivés droits finis: c'est bien cette dernière propriété des fonctions continues que nous désignerons par **P**.

Envisageons à ce but l'espace $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ des fonctions continues $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (cf. § 29, V). La condition que la fonction f ne jouisse pas de la propriété **P**, c. à d. qu'elle possède en un point (au moins) les deux nombres dérivés droits finis, équivaut à l'existence d'un entier positif n et d'un point x tels qu'on ait

$$(1) \qquad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant n, \quad \text{quel que soit } h > 0.$$

L'ensemble des fonctions f dépourvues de la propriété **P** est donc égal à la somme $N_1 + N_2 + \ldots$, où N_n désigne l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un x assujetti à la condition (1).

Tout revient donc à démontrer que l'ensemble N_n est non-dense (dans l'espace $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$). Or, l'ensemble N_n est fermé, car f_k étant une suite de fonctions et x_k une suite de points satisfaisant à la condition (1), on prouve facilement que, si la suite f_k converge uniformément, sa limite appartient à N_n [3]).

---

[1]) Voir plusieurs ouvrages des MM. Auerbach, Banach, Kaczmarz, Mazurkiewicz dans Studia Math. 3 (1931), de M. Steinhaus, ibid. vol. 1 (1929), p. 51—83, de M. Saks, Fund. Math. 10 (1927), p. 186—196 et 19 (1932), p. 211—219, de M. Orlicz, Bull. Acad. Polon. 1932, p. 221—228.

Plusieurs applications topologiques du procédé considéré seront traitées dans *Topologie II.*

[2]) S. Banach, *Ueber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. 3 (1931), p. 174.

[3]) Le fait que N_n est fermé est d'ailleurs évident, si l'on se sert des symboles logiques; on a notamment:

$$N_n = \underset{f}{E} \sum_x \prod_{h>0} \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant n \right\},$$

Donc, pour prouver que N_n est non-dense, il suffit de démontrer que N_n est un ensemble frontière; ou encore: l'ensemble des polynômes étant dense dans $\mathcal{E}^{\mathcal{Y}}$, il suffit de démontrer que, f étant un polynôme, il existe une fonction continue qui en diffère aussi peu qu'on le veut et qui n'appartient pas à N_n; ceci est un fait élémentaire.

L'existence des fonctions continues sans dérivée finie se trouve ainsi établie; plus encore: les fonctions qui ne jouissent pas de cette singularité constituent un ensemble de I-re catégorie (elles présentent donc des „exceptions" dans la totalité des fonctions continues).

§ 31. Prolongement des fonctions.

I. Prolongement des fonctions continues. *Etant donnée une fonction $y = f(x)$ définie sur un sous-ensemble A d'un espace (métrique) $\mathcal{X}$, continue et dont les valeurs appartiennent à un espace complet $\mathcal{Y}$, la fonction f se laisse prolonger d'une façon continue sur un ensemble $\boldsymbol{G_\delta}$.*

Soit A^* l'ensemble des points p de $\bar{A}$ tels que $\omega(p) = 0$, c. à d. que l'oscillation de f s'annule au point p (voir p. 85). Faisons correspondre à chaque point p de A^* une suite $\{p_n\}$ telle que $p_n \varepsilon A$ et $\lim p_n = p$. En désignant par E_n l'ensemble $(p_n, p_{n+1}, \ldots)$, on déduit de l'égalité $\omega(p) = 0$ que $\lim\limits_{n=\infty} \delta[f(E_n)] = 0$, donc que la suite $f(p_1), f(p_2), \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy. L'espace $\mathcal{Y}$ étant complet, posons $f^*(p) = \lim f(p_n)$ [1]. La fonction f^* se trouve ainsi définie sur l'ensemble A^*, qui est un $\boldsymbol{G_\delta}$ (p. 85). Pour $x \varepsilon A$ on a $f(x) = f^*(x)$. Reste à démontrer que la fonction f^* est continue pour $p \varepsilon A^*$, c. à d. que $\omega^*(p) = 0$, où ω^* désigne l'oscillation de f^*:

Or, G étant un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X}$, on a $f^*(G) \subset \overline{f(G)}$, d'où $\delta[f^*(G)] \leqslant \delta[\overline{f(G)}] = \delta[f(G)]$. Donc (p. 85): $\omega^*(p) = \min \delta[f^*(G)] \leqslant \leqslant \min \delta[f(G)] = \omega(p) = 0$, où G parcourt les ensembles ouverts contenant p.

---

ce qui prouve que N_n est la projection (parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$) de l'ensemble fermé

$$\underset{fx}{E} \prod_{h>0} \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant n \right\} = \prod_{h>0} \underset{fx}{E} \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant n \right\}.$$

L'axe $\mathcal{Y}$ étant compact, la projection d'un ensemble fermé est fermée (voir ma note de Fund. Math. 17, p. 271).

[1]) c. à d. que $f^*(p) = \prod\limits_G \overline{f(G)}$, G étant un entourage variable de p (cf. p. 203, corollaire).

Remarques. 1. L'hypothèse que l'espace $\mathcal{Y}$ est complet est *essentielle.* Pour s'en convaincre on pose: $\mathcal{X}$ = intervalle 01, $A = \mathcal{Y}$ = ensemble des nombres rationnels de $\mathcal{X}$ et $f(x) = x$ pour $x \varepsilon A$.

2. Nous déduirons du théorème précédent que *$\mathcal{X}$ étant un espace métrique séparable de puissance $\mathfrak{c}$, il existe une fonction $g(x)$, $x \varepsilon \mathcal{X}$, à valeurs réelles qui est discontinue sur chaque ensemble de puissance $\mathfrak{c}$* [1]).

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant de la Théorie générale des ensembles: *Soit Φ une famille de transformations de sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ en sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{Y}$. Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et Φ sont de puissance $\mathfrak{m}$, il existe une transformation $g(x)$ de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ qui ne coïncide sur aucun ensemble de la puissance $\mathfrak{m}$ avec aucune transformation appartenant à Φ.*

Pour démontrer ce lemme, on range les éléments de $\mathcal{X}$ et ceux de Φ en deux suites transfinies $\{x_\alpha\}$ et $\{f_\alpha\}$ ayant le plus petit type d'ordre possible et on définit la fonction $g(x)$ par l'induction transfinie, en convenant que $g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha)$, quel que soit $\xi < \alpha$.

Substituons à Φ la famille de toutes les fonctions réelles définies sur des sous-ensembles $\boldsymbol{G_\delta}$ de l'espace $\mathcal{X}$. D'après § 19, I et VI, la famille Φ est de puissance $\mathfrak{c}$. La fonction $g(x)$ est la fonction demandée. En effet, si elle était continue sur un ensemble E de la puissance $\mathfrak{c}$, il existerait une fonction continue $f(x)$ définie sur un $\boldsymbol{G_\delta}$ contenant E et telle que $f(x) = g(x)$ pour $x \varepsilon E$. Mais ceci est impossible, puisque $f \varepsilon \Phi$.

3. Citons sans démonstration le théorème suivant [2]), qui rentre dans un ordre d'idées analogue au théorème du N⁰ I: *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces complets séparables, toute fonction $y = f(x)$ définie sur un ensemble $A \subset \mathcal{X}$, continue et telle que pour chaque ensemble ouvert G l'ensemble $f(G)$ est ouvert dans $f(A)$, se laisse prolonger sur un ensemble $\boldsymbol{G_\delta}$ de façon que la fonction prolongée soit continue et jouisse de la propriété considérée par rapport à lui.*

Théorème de M. Tietze [3]). *Etant donnée une fonction $y = f(x)$, définie sur un sous-ensemble fermé F d'un espace (métrique) $\mathcal{X}$, con-*

---

[1]) Théorème de MM. Sierpiński et Zygmund, Fund. Math. 4 (1923), p. 316.

[2]) Voir S. Mazurkiewicz, *Sur les transformations intérieures*, Fund. Math. 19 (1932), p. 198.

[3]) H. Tietze, *Ueber Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journ. f. Math. 145 (1915), p. 9—14. La démonstration du texte est due à M. Hausdorff, Math. Zft. 5 (1919), p. 296 (où l'on trouvera d'autres indications bibliographiques). Cf. aussi P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 293 et K. Borsuk, Bull. Acad. Pol. 1933 (où il s'agit de prolonger la fonction f de façon que le „prolongement" soit une opération *linéaire* sur les fonctions prolongées).

tinue et dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathcal{I}^n$ *(où* n *est un entier positif ou* $\aleph_0$*), la fonction* f *se laisse prolonger d'une façon continue sur l'espace* $\mathcal{X}$ *tout entier.*

D'après § 14, IV, la condition pour qu'un point variable de l'espace $\mathcal{I}^n$ varie d'une façon continue, est que chacune de ses coordonnées varie de la même façon. Le théorème se réduit donc au cas où l'on remplace l'espace $\mathcal{I}^n$ par l'intervalle $\mathcal{I}$, c. à d. où $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Posons $f(p) = \min\limits_{x \in F} \{f(x) + \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} - 1\}$ pour $p \in \mathcal{X} - F$.

Il vient $f(p) \geqslant 0$, car $|p - x| \geqslant \rho(p, F)$. D'autre part, $f(p) \leqslant 1$, car $\min\limits_{x\in F} \{f(x) + \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} - 1\} \leqslant \max\limits_{x\in F} [f(x) - 1] + \min\limits_{x\in F} \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} \leqslant 1$.

Afin d'établir la continuité de la fonction f sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier, remarquons que $f(p)$ étant le minimum de l'expression entre crochets $\{\ \}$, on peut (pour p fixe) restreindre la variabilité de x aux points tels que $f(x) + \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} - 1 < f(p) + 1$, donc tels que $\dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} < f(p) - f(x) + 2 \leqslant 3$.

Soient $p \neq q$ deux points de $\mathcal{X} - F$. Il existe donc un $x \in F$ tel que

$$(1) \qquad f(x) + \frac{|p-x|}{\rho(p, F)} - 1 < f(p) + |p - q| \quad \text{et} \quad |p - x| \leqslant 3\rho(p, F).$$

Par définition de $f(q)$ on a $f(q) \leqslant f(x) + \dfrac{|q-x|}{\rho(q, F)} - 1$, d'où $f(q) < f(p) + |p - q| + \dfrac{|q-x|}{\rho(q, F)} - \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)}$ et comme, en outre, $\dfrac{|q-x|}{\rho(q, F)} - \dfrac{|p-x|}{\rho(p, F)} = \dfrac{|q-x| - |p-x|}{\rho(q, F)} + |p-x| \dfrac{\rho(p, F) - \rho(q, F)}{\rho(q, F)\cdot\rho(p, F)} \leqslant$ $\leqslant \dfrac{|p-q|}{\rho(q, F)} + \dfrac{3}{\rho(q, F)} [\rho(p, F) - \rho(q, F)]$, on en déduit l'inégalité $f(q) - f(p) < |p - q| + \dfrac{|p-q|}{\rho(q, F)} + \dfrac{3}{\rho(q, F)} [\rho(p, F) - \rho(q, F)]$. Une formule symétrique subsiste pour $f(p) - f(q)$. On en conclut aussitôt que, si le point p tend vers q, la différence $|f(p) - f(q)|$ tend vers 0. Cela prouve la continuité de la fonction f aux points de $\mathcal{X} - F$.

Reste à considérer le cas où le point p appartenant à $\mathcal{X} - F$ tend vers $q \in F$. Soit (pour p fixe) x' un point de F tel que $\dfrac{|p-x'|}{\rho(p, F)} < 1 + |p - q|$. En vertu de la définition de $f(p)$ on a donc $f(p) \leqslant f(x') + \dfrac{|p-x'|}{\rho(p, F)} - 1 < f(x') + |p - q|$.

D'autre part, x satisfaisant à la condition (1), on a

$$f(x) - |p - q| < f(p) - \left[\frac{|p-x|}{\rho(p, F)} - 1\right] \leqslant f(p),$$

d'où

$$(2) \qquad f(x) - |p - q| < f(p) < f(x') + |p - q|.$$

Or, lorsque p tend vers q, $\rho(p, F)$ tend vers 0 (puisque $q \in F$), donc, d'après (1), $|p - x|$ tend vers 0 et, par définition de x', $|p - x'|$ tend vers 0. Ainsi x et x' tendent vers p, donc vers q et, la fonction f étant continue sur F, $f(x)$ et $f(x')$ tendent vers $f(q)$. En vertu de (2), $f(p)$ tend donc vers $f(q)$.

Dans le même ordre d'idées citons le théorème suivant [1]: *chaque fonction continue* f, *définie sur un sous-ensemble fermé* F *d'un espace métrique séparable* $\mathcal{X}$ *à* n *dimensions, se laisse prolonger sur l'espace* $\mathcal{X}$ *tout entier de façon que* $f(F) = f(\mathcal{X})$ *et que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de dimension* $< n$.

En particulier, *chaque sous-ensemble fermé (non vide)* F *d'un espace* $\mathcal{X}$ *de dimension* 0 *en est une image continue* [2] (on n'a qu'à poser $f(x) = x$ pour $x \in F$).

Il en résulte qu'*à chaque famille (de la puissance* $\mathfrak{c}$*) d'ensembles arbitraires* $E_{\mathfrak{z}}$ *où* $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}$ *correspond un ensemble* $Z \subset \mathcal{N}$ *dont chaque* $E_{\mathfrak{z}}$ *est une image continue* [3]. Soit, en effet, $N_{\mathfrak{z}}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\mathfrak{y}$ tels que $\mathfrak{y}^{(1)} = \mathfrak{z}^{(1)}$, $\mathfrak{y}^{(3)} = \mathfrak{z}^{(2)}$, $\mathfrak{y}^{(5)} = \mathfrak{z}^{(3)}, \ldots$ Comme homéomorphe à $\mathcal{N}$, l'ensemble $N_{\mathfrak{z}}$ contient un ensemble $A_{\mathfrak{z}}$ dont $E_{\mathfrak{z}}$ est une image continue (p. 149, cor. 1). La somme de tous les ensembles $A_{\mathfrak{z}}$ où $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}$, constitue l'ensemble Z demandé. Car les ensembles $N_{\mathfrak{z}}$ étant disjoints et fermés dans $\mathcal{N}$, $A_{\mathfrak{z}}$ est fermé dans Z et en est par conséquent une image continue.

---

[1] Voir G. Poprougenko, *Sur la dimension de l'espace et l'extension des fonctions continues,* Mon. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 129. D'après une remarque de M. Otto, on peut se débarrasser de l'hypothèse que les valeurs de f soient réelles.

[2] W. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 118.

[3] W. Sierpiński, Fund. Math. 14 (1929), p. 234.

II. Prolongement des fonctions bicontinues.

Théorème de M. Lavrentieff[1]. *Toute homéomorphie entre deux ensembles A et B situés dans deux espaces complets $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ se laisse prolonger sur deux ensembles G_δ situés dans ces espaces.*

Soit, en effet, $y = f(x)$ une fonction bicontinue, définie sur A et telle que $f(A) = B$. Soit $x = g(y)$ la fonction inverse. Prolongeons (cf. N° I) la fonction f d'une façon continue à une fonction f^* définie sur un ensemble A^* qui est un G_δ. Attribuons un sens analogue aux symboles g^* et B^* par rapport à la fonction g. Posons $I = \underset{xy}{E}[y = f^*(x)]$ et $J = \underset{xy}{E}[x = g^*(y)]$. Désignons par A_1 et B_1 respectivement les projections de $I \cdot J$ sur l'axe $\mathcal{X}$ et sur l'axe $\mathcal{Y}$. La fonction f^* est évidemment une homéomorphie entre A_1 et B_1.

Reste à démontrer que A_1 et B_1 sont des G_δ. Or, en posant $h(x) = [x, f^*(x)]$, on a $A_1 = h^{-1}(J)$. La fonction $h(x)$ étant continue et l'ensemble J étant fermé dans $\mathcal{X} \times B^*$ (p. 144), donc un G_δ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, l'ensemble $h^{-1}(J)$ est un G_δ dans A^* (p. 68 (5)), donc dans $\mathcal{X}$. De même, B_1 est un G_δ dans $\mathcal{Y}$.

On rapprochera le corollaire suivant du théorème du N° I:

Corollaire. Etant donnée une fonction $y = f(x)$, définie sur un sous-ensemble A d'un espace métrique $\mathcal{X}$ (complet ou non), *bicontinue et dont les valeurs appartiennent à un espace complet $\mathcal{Y}$, la fonction f se laisse prolonger d'une façon bicontinue sur un ensemble G_δ.*

Désignons, en effet, par $\widetilde{\mathcal{X}}$ l'espace complet qui contient topologiquement $\mathcal{X}$ (voir p. 200, VII). L'homéomorphie f se laisse prolonger sur un ensemble A_1 qui est un G_δ relativement à $\widetilde{\mathcal{X}}$. On a donc $A \subset A_1 \subset \widetilde{\mathcal{X}}$. L'ensemble $A_2 = A_1 \cdot \mathcal{X}$ est l'ensemble demandé: il est un G_δ (dans $\mathcal{X}$), il contient A et la fonction prolongée est bicontinue sur lui.

Remarques. 1. L'ensemble $f(A_2)$ peut ne pas être un G_δ. Soient, en effet, $\mathcal{X} = A =$ ensemble des nombres rationnels de l'intervalle 01, $\mathcal{Y} =$ intervalle 01 et $f(x) = x$.

---

[1]) C. R. Paris t. 178 (1924), p. 187 et *Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes*, Fund. Math. 6 (1924), p. 149.

2. Le théorème de M. Lavrentieff permet d'établir le théorème suivant, qui a été démontré par une autre voie au § 22, IV (théor. 5): *chaque ensemble n-dimensionnel* (situé dans un espace métrique séparable) *est contenu dans un ensemble G_δ n-dimensionnel*[1].

La démonstration[2] se ramène au cas où $n = 0$ (cf. p. 132, th. 5). Or, A étant un ensemble 0-dimensionnel, il existe une homéomorphie entre A et un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (p. 124, th. VI). Cette homéomorphie se laisse prolonger, en vertu du corollaire, à un ensemble G_δ. Ce dernier ensemble est 0-dimensionnel comme homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{C}$, donc à un ensemble 0-dimensionnel.

III. Caractérisation des espaces topologiquement complets.

Tout ensemble (situé dans un espace métrique arbitraire $\mathcal{X}$) *homéomorphe à un espace complet $\mathcal{Y}$ est un G_δ*[3].

Car, en supposant dans le corollaire précédent que les valeurs de la fonction f remplissent l'espace $\mathcal{Y}$, le prolongement f^* de f coïncide avec f (puisque la fonction f^* est biunivoque): le domaine des arguments de f (c. à d. l'ensemble A) est donc identique à celui de f^* et ce dernier est un G_δ[4].

En rapprochant ce corollaire du théorème du § 29, VI, on en conclut que, *pour qu'un sous-ensemble d'un espace complet soit homéomorphe à un espace complet* (c. à d. qu'il soit *topologiquement complet), il faut et il suffit qu'il soit un G_δ*[5]. Il en résulte que *tout ensemble homéomorphe à un G_δ contenu dans un espace complet est un G_δ*[6].

---

[1]) donc contenu *topologiquement* dans un espace *complet n-dimensionnel*. Comme on verra dans le Chap. IV, le terme *complet* peut être remplacé par *compact*.

[2]) L. Tumarkin, Math. Ann. 98 (1928), p. 653.

[3]) Cet énoncé présente un cas particulier de *l'invariance de la classe borelienne* (voir N° IV).

[4]) Pour une démonstration plus directe, voir W. Sierpiński, *Sur les ensembles complets d'un espace* (D), Fund. Math. 11 (1928), p. 203.

[5]) C'est en particulier à ce fait que tient l'importance et l'utilité de la notion d'ensemble G_δ.

[6]) Théorème de M. Mazurkiewicz, *Ueber Borelsche Mengen*, Bull. Acad. Cracovie 1916, p. 490—494. Voir aussi W. Sierpiński, *Sur l'invariance topologique des ensembles G_δ*, Fund. Math. 8 (1926), p. 135. Le théorème peut aussi être déduit directement du théorème de M. Lavrentieff sans avoir recours au théor. § 29, VI, voir M. Lavrentieff, l. cit.

Les espaces complets séparables ne sont autre chose—au point de vue topologique — *que des ensembles G_δ situés dans le cube fondamental $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert.* Car, d'après le théorème d'Urysohn, chaque espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (p. 104); si cet espace est en outre complet, le sous-ensemble en question est, comme nous venons de démontrer, un G_δ.

IV. Invariance intrinsèque des différentes familles d'ensembles. Une propriété d'ensembles $\mathbf{P}$ est dite *invariant intrinsèque*, lorsque chaque ensemble (situé dans un espace complet) homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété $\mathbf{P}$ (et situé dans le même ou dans un autre espace complet) jouit également de la propriété $\mathbf{P}$ [1]).

Théorème [2]). *Soit $\mathbf{P}$ un invariant intrinsèque tel que, X jouissant de la propriéte $\mathbf{P}$, chaque ensemble qui est un G_δ dans X en jouit également. Dans ces hypothèses les propriétés suivantes sont des invariants intrinsèques:*

1°: propriété $\mathbf{P}_\sigma$ d'être la somme d'une famille dénombrable d'ensembles à propriété $\mathbf{P}$,

2°: propriété $\mathbf{P}_\delta$ d'être le produit d'une famille dénombrable d'ensembles à propriété $\mathbf{P}$,

3°: propriété $\mathbf{P}_\rho$ d'être la différence de deux ensembles à propriété $\mathbf{P}$,

4°: propriété $\mathbf{P}_c$ d'être le complémentaire d'un ensemble à propriété $\mathbf{P}$, dans l'hypothèse supplémentaire qu'un ensemble à propriété $\mathbf{P}$ ne cesse pas de la posséder, lorsqu'on lui ajoute un ensemble F_σ.

L'invariance de la propriété $\mathbf{P}_\sigma$ est évidente (elle ne dépend guère de l'hypothèse que les G_δ relatifs jouissent de la propriété $\mathbf{P}$).

Pour établir 2°, posons: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ...$ où A_n jouit de la propriété $\mathbf{P}$ et A est homéomorphe à B. D'après le théorème de M. Lavrentieff, l'homéomorphie f entre A et B se laisse prolonger à un ensemble G_δ; désignons le par A^*. Il vient donc

1) Il est à remarquer qu'il s'agit ici d'une homéomorphie entre *sous-ensembles* de deux espaces. Bien entendu, dans le cas d'une homéomorphie entre *espaces*, chaque propriété exprimée en termes topologiques est invariante.

2) M. Lavrentieff, Fund. Math. 6, op. cit.

$A = A \cdot A^*$, d'où $A = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot A^*)$ et $B = f(A) = \prod_{n=1}^{\infty} f(A_n \cdot A^*)$, puisque la fonction f est biunivoque. A^* étant un G_δ, l'ensemble $A_n \cdot A^*$ jouit de la propriété $\mathbf{P}$ et il en est de même de l'ensemble $f(A_n \cdot A^*)$. Donc B jouit de la propriété $\mathbf{P}_\delta$.

La démonstration de 3° et 4° est analogue. Soit $A = A_1 - A_2$, les symboles B, f et A^* ayant le même sens qu'auparavant. Il vient $A = A \cdot A^* = A_1 \cdot A^* - A_2 \cdot A^*$, d'où $B = f(A) = f(A_1 \cdot A^*) - f(A_2 \cdot A^*)$, ce qui achève la démonstration de 3°.

Soit enfin $A = A_1'$ (complémentaire de A_1). Il vient $A = A^* \cdot A_1' = A^* - A_1 \cdot A^*$ et $B = f(A) = f(A^*) - f(A_1 \cdot A^*) \} = \{[f(A^*)]' + f(A_1 \cdot A^*)\}'$. L'ensemble $f(A^*)$ étant un G_δ, $[f(A^*)]'$ est un F_σ. L'ensemble entre crochets $\{\ \}$ jouit donc de la propriété $\mathbf{P}$ et B jouit de la propriété $\mathbf{P}_c$.

On déduit de 1°, 2°, 4° et de l'invariance intrinsèque de la notion d'ensemble G_δ (établie au N° précédent) le

Corollaire 1 [1]). *Les propriétés d'être un ensemble borelien de classe G_α avec $\alpha > 0$ ($G_\delta, G_{\delta\sigma}$ etc.) et celle d'être de classe F_α avec $\alpha > 1$ ($F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}$ etc.) sont des invariants intrinsèques.*

Il suffit d'ailleurs de supposer que A est situé dans un espace complet, tandis que B (qui est homéomorphe à A) peut être supposé situé dans un espace métrique arbitraire $\mathcal{X}$. Car, $\widetilde{\mathcal{X}}$ désignant l'espace $\mathcal{X}$ „complété“ (cf. p. 200, VII), B est — d'après le corollaire 1 — de classe G_α (de classe F_α) relativement à l'espace $\widetilde{\mathcal{X}}$, donc relativement à $\mathcal{X}$, qui contient B.

Corollaire 2. La propriété de Baire au sens restreint est un invariant intrinsèque.

Car la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble A jouisse de cette propriété est que chaque ensemble Z fermé dans A soit une somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de I-re catégorie dans Z (p. 55, VI).

1) Sans l'emploi du théorème de M. Lavrentieff ce corollaire a été établi pour quelques cas particuliers (d'ailleurs dans des hypothèses supplémentaires sur l'espace); voir outre le renvoi [6]) p. 215: W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$* et *Sur une définition topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$*, Fund. Math. 6 (1924), p. 21—29, du même auteur: C. R. Paris t. 171 (1920), p. 24 (cas des ensembles $G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, ...$) et S. Mazurkiewicz, *Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$*, Fund. Math. 2 (1921), p. 104.

L'invariance de la propriété $\mathbf{P}_\rho$ peut servir pour démontrer l'invariance intrinsèque des *développements en séries alternées* (finies ou transfinies) des ensembles de classe G_α (ou de classe F_α) [1]). Par exemple, la propriété d'être une différence de deux ensembles G_δ est un invariant intrinsèque [2]).

V. Applications aux rangs topologiques. *Dans chaque espace complet séparable de la puissance $\mathfrak{c}$ il existe une famille composée de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles dont les rangs topologiques sont incomparables deux à deux* [3]).

Nous établirons d'abord un théorème de la Théorie générale des ensembles.

Φ étant une famille de transformations des sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{X}$, convenons d'appeler deux ensembles X et Y (contenus dans $\mathcal{X}$) *incomparables* (par rapport à Φ), lorsqu'il n'existe dans Φ aucune transformation d'un de ces ensembles en sous-ensemble de l'autre.

Si les transformations appartenant à Φ sont biunivoques et $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \overline{\overline{\Phi}} = \mathfrak{m}$, il existe une famille $\boldsymbol{F}$ composée de $2^{\mathfrak{m}}$ sous-ensembles de $\mathcal{X}$ qui sont incomparables deux à deux.

Rangeons l'ensemble $\mathcal{X}$, ainsi que la famille Φ augmentée de toutes les fonctions inverses aux fonctions qu'elle contient, en deux suites transfinies $\{x_\alpha\}$ et $\{f_\alpha\}$ ayant le plus petit type d'ordre possible. Soit $P = \{p_\alpha\}$ une suite transfinie définie par induction de manière que p_α soit différent de tous les p_ξ et de tous les $f_\xi(p_\eta)$ avec $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de sous-ensembles de P telle que $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} = 2^{\mathfrak{m}}$ et que $\overline{\overline{X - Y}} = \mathfrak{m}$ pour chaque couple d'ensembles distincts appartenant à $\boldsymbol{F}$ [4]).

[1]) Cf. les „petites classes" de Borel, § 33.

[2]) W. Sierpiński, *Sur quelques invariants d'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), p. 119.

[3]) Voir ma note *Sur la puissance de l'ensemble des „nombres de dimension" au sens de M. Fréchet*, Fund. Math. 8 (1926), p. 201. Cf. aussi: W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les types de dimensions*, Fund. Math. 19 (1932), p. 70, S. Banach, ibid. p. 10 et l'extrait d'une communication de M. Lindenbaum (Ann. Soc. Pol. Math. X, 1932, p. 114), d'après lequel on peut remplacer l'incomparabilité des rangs topologiques par l'incomparabilité relative aux transformations continues (non nécessairement bicontinues).

[4]) L'existence d'une famille $\boldsymbol{F}$ de ce genre est une conséquence de l'identité $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}^2$, qui permet de faire correspondre à chaque élément p de P (où $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}$) deux sous-ensembles A_p et B_p de P de façon que $\overline{\overline{A}}_p = \mathfrak{m} = \overline{\overline{B}}_p$ et que les ensembles $A_p, B_p, A_{p'}$ et $B_{p'}$ soient disjoints deux à deux pour $p \neq p'$. La famille $\boldsymbol{F}$ a pour éléments tous les ensembles $F(X)$, où $X \subset P$ et où $F(X)$ est la somme des ensembles A_p avec $p \,\varepsilon\, X$ et des ensembles $B_{p'}$ avec $p' \,\varepsilon\, P - X$.

Supposons par impossible qu'une fonction $f_\gamma \,\varepsilon\, \Phi$ transforme X en Y_1 où $X \,\varepsilon\, \boldsymbol{F}$ et $Y_1 \subset Y \,\varepsilon\, \boldsymbol{F}$. Soit $f_\gamma^{-1} = f_\xi$. Nous allons démontrer que les formules $p_\alpha \,\varepsilon\, X - Y$ et $\xi < \alpha$ entraînent $\alpha < \gamma$, d'où on conclura que $\overline{\overline{X - Y}} < \mathfrak{m}$, contrairement à l'hypothèse.

Posons $f_\gamma(p_\alpha) = p_\eta$, donc $p_\alpha = f_\xi(p_\eta)$. Il vient $\eta \geqslant \alpha$ par définition de p_α. D'autre part, $\eta \neq \alpha$, car $p_\eta \,\varepsilon\, Y$ et p_α *non*-ε Y. Les formules $\alpha < \eta$ et $p_\eta = f_\gamma(p_\alpha)$ entraînent $\eta \leqslant \gamma$, d'où $\alpha < \gamma$.

Ceci établi, substituons à Φ la famille de toutes les fonctions bicontinues, définies sur des sous-ensembles $\boldsymbol{G}_\delta$ de l'espace $\mathcal{X}$. Si l'on suppose que $X \,\varepsilon\, \boldsymbol{F}$, que $X \neq Y \,\varepsilon\, \boldsymbol{F}$ et que X est topologiquement contenu dans Y, il existe d'après le théor. de M. Lavrentieff une homéomorphie $f(x)$ définie sur un $\boldsymbol{G}_\delta$ contenant X et telle que $f(X) \subset Y$. Mais ceci est impossible, puisque $f \,\varepsilon\, \Phi$ et X et Y sont incomparables par rapport à Φ.

Dans un ordre d'idées analogue on établit *l'existence d'une suite transfinie de puissance $> \mathfrak{c}$ d'ensembles dont le rang topologique augmente*, ainsi que *d'une suite transfinie de puissance $\mathfrak{c}$ d'ensembles dont le rang topologique diminue* [1]).

VI. Prolongement des fonctions mesurables B.

Théorème [2]). *Soient $\mathcal{X}$ un espace métrique arbitraire, $\mathcal{Y}$ un espace complet séparable, A un sous-ensemble de $\mathcal{X}$. Chaque fonction $f(x)$ de classe α, définie sur A, se laisse prolonger (sans altérer sa classe) sur un ensemble A^* de classe $\alpha + 1$ multiplicative.*

Si, en particulier, l'ensemble A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative, la fonction peut être prolongée sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier [3]).

Le théorème étant établi au N°I pour $\alpha = 0$, posons $\alpha > 0$. D'après p. 136, 3, il existe une suite de fonctions $f_n(x)$ de classe α,

[1]) Voir W. Sierpiński, l. c. et la note de M. Sierpiński et de moi *Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires*, Fund. Math. 8 (1926), p. 193.

[2]) Voir ma note *Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de variables réelles*, C. R. Paris, t. 197 (1933), p. 19.

[3]) Pour la deuxième partie du théorème, restreinte aux fonctions à valeurs réelles, voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 244.

définies sur A, qui approchent uniformément $f(x)$ et pour lesquelles les ensembles $f_n(A)$ sont isolés. On peut donc poser:

$$(1) \qquad |f_n(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}, \quad \text{quel que soit } n \geqslant k,$$

$f_n(A) = [y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^i, \dots]$ suite finie ou infinie d'éléments distincts.

Soit $B_{i_1 \dots i_n} = [f_1^{-1}(y_1^{i_1})] \cdot \dots \cdot [f_n^{-1}(y_n^{i_n})]$.

Chacun des ensembles $f_k^{-1}(y_k^i)$ étant ambigu de classe α par rapport à A (puisque le point y_k^i, comme point isolé de l'ensemble $f_k(A)$, constitue dans cet ensemble un ensemble ouvert et fermé), les hypothèses du théorème p. 165, VIII, 2 se trouvent vérifiées.

Il existe par conséquent pour chaque n un ensemble A_n de classe $\alpha+1$ multiplicative et un système $\{C_{i_1 \dots i_n}\}$ d'ensembles ambigus de classe α par rapport à A_n, tels que:

1° $C_{i_1 \dots i_n} \cdot C_{j_1 \dots j_k} = 0$ pour $(i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k)$ et $k \leqslant n$

2° $A_n = \sum C_{i_1 \dots i_n}$ 3° $A \cdot C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$

4° Si $B_{i_1 \dots i_n} = 0$, on a $C_{i_1 \dots i_n} = 0$.

De plus (en vertu de la deuxième partie du théorème précité), si A est de classe α multiplicative, on a $A_n = \mathcal{X}$ (puisque l'égalité $A = f_k^{-1} f_k(A) = f_k^{-1}(y_k^1) + f_k^{-1}(y_k^2) + \dots$, valable pour chaque k, entraîne $A = \sum B_{i_1 \dots i_n}$, quel que soit n).

L'ensemble $A^* = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ est donc de classe $\alpha+1$ multiplicative; en outre, dans le cas où A est de classe α multiplicative (donc où $A_n = \mathcal{X}$) on a $A^* = \mathcal{X}$.

Prolongeons chacune des fonctions f_n sur l'ensemble A_n, en convenant que $f_n(x) = y_n^{i_n}$, si $x \in C_{i_1 \dots i_n}$. L'ensemble des valeurs de la fonction f_n ainsi définie étant dénombrable, il suffit — pour prouver que cette fonction est de classe α (sur A_n) — de démontrer que l'ensemble $f_n^{-1}(y_n^i)$ est de classe α additive par rapport à A_n pour n et i fixes. Or, cela résulte directement de la formule $f_n^{-1}(y_n^i) = \sum C_{i_1 \dots i_{n-1}\, i}$, la sommation étant étendue à tous les systèmes de $n-1$ indices.

Ceci établi, nous allons démontrer que les fonctions f_n (prolongées) convergent uniformément sur l'ensemble A^*, notamment que l'inégalité (1) est valable, quel que soit $x_0 \in A^*$.

Soit, en effet, $x_0 \in C_{i_1 \dots i_n}$ et $x_0 \in C_{j_1 \dots j_k}$, $k \leqslant n$. D'après 1° il vient $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$. Soit $x \in B_{i_1 \dots i_n}$, donc $x \in f_n^{-1}(y_n^{i_n})$, d'où $f_n(x) = y_n^{i_n} = f_n(x_0)$. L'égalité $i_k = j_k$ implique de même que $x \in f_k^{-1}(y_k^{j_k})$, d'où $f_k(x) = y_k^{j_k} = f_k(x_0)$. Comme point de A, x satisfait à la formule (1). Il en est de même de x_0, puisque $f_n(x) = f_n(x_0)$ et $f_k(x) = f_k(x_0)$.

L'espace $\mathcal{Y}$ étant complet, posons $f(x) = \lim f_n(x)$. La fonction $f(x)$ se trouve définie ainsi pour chaque $x \in A^*$ et, comme limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe α, elle est encore de classe α (p. 185, 2).

Corollaire[1]. *Dans les mêmes hypothèses sur les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, chaque fonction $f(x)$ de classe α, définie sur A, se laisse prolonger sur l'espace tout entier de façon qu'elle devienne une fonction de classe $\alpha+1$.*

En effet, d'après la première partie du théorème précédent, il existe un ensemble E de classe $\alpha+1$ multiplicative sur lequel la fonction f se laisse prolonger sans altérer sa classe (pour $\alpha = 0$, voir N° I) et d'après la deuxième partie du même théorème, la fonction f, ainsi prolongée, peut être étendue à l'espace tout entier comme fonction de classe $\alpha+1$.

VII. Prolongement de l'homéomorphie de classe α, β.

Une transformation $y = f(x)$ de classe α dont la transformation inverse $x = f^{-1}(y)$ est de classe β est dite une *homéomorphie de classe α, β*[2].

Les énoncés qui suivent permettent de généraliser ceux des NN° II — IV dans l'hypothèse que les espaces considérés sont séparables.

Théorème. Toute homéomorphie de classe α, β entre deux ensembles arbitraires A et B situés dans deux espaces complets séparables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ se laisse prolonger sur deux ensembles respectivement de classes $\alpha+\beta+1$ et $\beta+\alpha+1$ situés dans ces espaces.

---

[1]) Pour le cas où $\mathcal{Y}$ est l'espace des nombres réels, voir W. Sierpiński, *Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques*, Fund. Math. 16 (1930), p. 81 et G. v. Alexits, *Ueber die Erweiterung einer Baireschen Funktion*, Fund. Math. 15 (1930), p. 51.

[2]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 21 (1933), p. 66.

Reprenons la démonstration du théorème de M. Lavrentieff. Soient: $y = f(x)$ une homéomorphie de classe α, β entre A et B, A^* un ensemble de classe $\alpha+1$ multiplicative, $A \subset A^*$, $y = f^*(x)$ une fonction de classe α définie sur A^* et qui coïncide avec $f(x)$ sur A (cf. N° VI), $I = \underset{xy}{E}\,[y = f^*(x)]$. Attribuons un sens analogue aux symboles B^*, g^* et J par rapport à la fonction $x = g(y)$, inverse de $y = f(x)$. Soient enfin A_1 et B_1 les projections de l'ensemble $I \cdot J$ sur les axes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement. L'ensemble J étant de classe $\beta+1$ multiplicative (p. 183, VIII, 1), l'ensemble A_1 est de classe $\alpha+\beta+1$ multiplicative par rapport à A^* (p. 183, VII, 2), donc par rapport à $\mathcal{X}$, c. q. f. d.

Le théorème établi, considérons le cas particulier où A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative. Posons $A^* = A$ et $f^* = f$. Il vient $A_1 = A$ et $B_1 = B$. L'ensemble I étant à présent de classe α multiplicative, B_1 est de classe $\beta + \alpha$ multiplicative par rapport à B^*, donc par rapport à $\mathcal{Y}$. On parvient ainsi au

Corollaire. La propriété d'être un ensemble de classe $\alpha > 0$ multiplicative est invariante par rapport aux homéomorphies de classe α, 0.

B. Espaces complets séparables (§§ 32—35).

L'espace $\mathcal{X}$ sera supposé complet et séparable.

§ 32. Rapports à l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels.

I. Opération ($\mathcal{A}$). Admettons qu'à chaque système $n_1 \dots n_k$ d'entiers positifs corresponde un sous-ensemble fermé (vide ou non) $F_{n_1 \dots n_k}$ d'un espace complet $\mathcal{X}$.

Nous supposerons dans la suite que[1]):

(1) $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k \mathfrak{z}^{k+1}} \subset F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ (2) $\lim\limits_{k=\infty} \delta(F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = 0.$

Soit Z l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \neq 0$, quel que soit k. L'ensemble $F_{\mathfrak{z}^1} \cdot F_{\mathfrak{z}^1\mathfrak{z}^2} \cdot F_{\mathfrak{z}^1\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}^3} \cdot \dots$ se réduit alors (§ 30, II) à un seul point, que nous désignons par $f(\mathfrak{z})$. Par conséquent

[1]) Nous désignons, comme d'habitude, par $\mathfrak{z}$ une suite variable $[\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \dots]$ d'entiers positifs. En identifiant cette suite avec le nombre irrationnel $\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(1)}} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(2)}} + \dots$, on peut admettre que $\mathfrak{z}$ parcourt l'ensemble $\mathcal{N}$ (cf. p. 5 et 80).

(3) $$f(Z) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k},$$

de sorte que $f(Z)$ est le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur le système $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$.

(a) *L'ensemble Z est fermé dans $\mathcal{N}$.*

En effet, si $\mathfrak{z}$ *non*-$\varepsilon\, Z$, il existe un k tel que $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = 0$. On a donc $F_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^k} = 0$ pour chaque $\mathfrak{y}$ tel que $\mathfrak{y}^1 = \mathfrak{z}^1, \dots, \mathfrak{y}^k = \mathfrak{z}^k$, de sorte que $\mathfrak{y}$ *non*-$\varepsilon\, Z$. L'ensemble $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ des $\mathfrak{y}$ considérés étant, comme on vérifie facilement, ouvert, on en conclut que $\mathfrak{z}$ est un point intérieur du complémentaire de Z, donc que Z est fermé.

(b) *La fonction $f(\mathfrak{z})$ est continue* (sur l'ensemble Z).

Soient, en effet, $\mathfrak{z} \,\varepsilon\, Z$ et k un indice tel que $\delta(F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) < \epsilon$. $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ désignant le même ensemble qu'auparavant, la condition $\mathfrak{z}_1 \,\varepsilon\, Z \cdot \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ entraîne $f(\mathfrak{z}_1) \,\varepsilon\, F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$, donc $|f(\mathfrak{z}) - f(\mathfrak{z}_1)| < \epsilon$. $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ étant un entourage de $\mathfrak{z}$, on en conclut que la fonction f est continue au point $\mathfrak{z}$.

La proposition suivante est évidente:

(c) *Si $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \neq 0$, quels que soient $\mathfrak{z}$ et k, alors $Z = \mathcal{N}$.*

(d) *Si le système $\{F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\}$ est diadique,* c. à d. si l'ensemble $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ s'annule toujours sauf quand le système $\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k$ se compose de chiffres 1 et 2, — *l'ensemble Z est homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor.*

Car, dans ces hypothèses, Z est l'ensemble des suites composées de chiffres 1 et 2.

(e) *Si deux ensembles $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$* et *$F_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^k}$ pourvus de différents systèmes de k indices sont toujours disjoints, la fonction f est biunivoque.* En outre,

$$f(Z) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$$

(de sorte que l'ensemble $f(Z)$ est alors un $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$).

En effet, si $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{y}$, il existe un indice k tel que $\mathfrak{z}^k \neq \mathfrak{y}^k$. Comme $f(\mathfrak{y}) \,\varepsilon\, F_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^k}$, il vient $f(\mathfrak{y})$ *non*-$\varepsilon\, F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$, d'où $f(\mathfrak{z}) \neq f(\mathfrak{y})$.

Pour le reste de l'énoncé (e) voir § 1, VI, 5.

(f) *Si l'on ajoute à l'hypothèse de l'énoncé précédent celle que les ensembles $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ soient ouverts (tout en étant fermés), la fonction $f(\mathfrak{z})$ établit une homéomorphie entre Z et $f(Z)$.*

Soit, en effet, $\lim_{m=\infty} f(\mathfrak{z}_m) = f(\mathfrak{z})$. Il s'agit de prouver que $\lim_{m=\infty} \mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}$, c. à d. que $\lim_{m=\infty} \mathfrak{z}_m^k = \mathfrak{z}^k$, quel que soit k, ou encore que, k étant fixe, on a $\mathfrak{z}_m^k = \mathfrak{z}^k$ pour m suffisamment grand.

Or, l'ensemble $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ étant ouvert, on conclut de la formule $\lim_{m=\infty} f(\mathfrak{z}_m) = f(\mathfrak{z}) \in F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ que $f(\mathfrak{z}_m) \in F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ pour m suffisamment grand. D'autre part $f(\mathfrak{z}_m) \in F_{\mathfrak{z}_m^1 \dots \mathfrak{z}_m^k}$. L'hypothèse de l'énoncé (e) entraîne donc $\mathfrak{z}_m^1 = \mathfrak{z}^1, \dots, \mathfrak{z}_m^k = \mathfrak{z}^k$.

(g) *Si* $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$ *et* $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k i}$, *quels que soient* $\mathfrak{z}$ *et* k, *on a* $f(Z) = \mathcal{X}$.

En effet, p étant un point donné, il existe un indice n_1 tel que $p \in F_{n_1}$. Procédons par induction. Supposons que $p \in F_{n_1 \dots n_k}$. Il existe par hypothèse un indice n_{k+1} tel que $p \in F_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$. En désignant par $\mathfrak{z}$ la suite $n_1, n_2, n_3, \dots$, il vient $p = f(\mathfrak{z})$.

II. Transformations de l'ensemble $\mathcal{N}$ en espaces complets.

Théorème 1[1]. *Chaque espace complet séparable est (effectivement*[2]*) une image continue de l'espace* $\mathcal{N}$.

Soit, en effet, $R_1, R_2, \dots$ une base de l'espace $\mathcal{X}$ telle que $R_i \neq 0$ et $\delta(R_i) < 1$ (cf. § 17, I et II). Posons $F_i = \overline{R_i}$. Il vient

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} R_i = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{et} \quad \delta(F_i) \leqslant 1.$$

Procédons par induction. L'ensemble fermé non vide $F_{n_1 \dots n_k}$ supposé défini et considéré comme l'espace, il existe une suite infinie d'ensembles fermés et non vides $F_{n_1 \dots n_k i}$, $i = 1, 2, \dots$, telle que

$$F_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1 \dots n_k i} \quad \text{et} \quad \delta(F_{n_1 \dots n_k i}) \leqslant 1/k+1.$$

D'après (b), (c) et (g), $\mathcal{X}$ est une image continue de $\mathcal{N}$.

Théorème 2. Chaque espace complet séparable de dimension 0 *est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de l'espace* $\mathcal{N}$.

En effet, l'espace $\mathcal{X}$ étant 0-dimensionnel, chaque ensemble ouvert est la somme d'une suite infinie d'ensembles disjoints (vides

[1] Ce théorème sera étendu dans le § 33 sur les ensembles boreliens.

[2] c. à d. que la démonstration qui suit permet de n o m m e r une fonction continue f qui transforme $\mathcal{N}$ en $\mathcal{X}$ (cf. § 18, VIII).

ou non) qui sont à la fois fermés et ouverts et de diamètre aussi petit que l'on veut (p. 120, cor. 1). Il vient donc, comme dans la démonstration précédente:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i, \qquad F_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1 \dots n_k i}, \qquad \delta(F_{n_1 \dots n_k i}) \leqslant 1/k+1,$$

les ensembles $F_{n_1 \dots n_k}$ étant fermés, ouverts et disjoints pour k fixe.

D'après (a), (f) et (g), $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un ensemble Z fermé dans $\mathcal{N}$.

Corollaire. Dans l'espace $\mathcal{N}$ *chaque ensemble* $\boldsymbol{G}_\delta$ *est homéomorphe à un ensemble fermé.*

Car, en vertu de § 29, VII, chaque ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ contenu dans $\mathcal{N}$ est homéomorphe à un espace complet de dimension 0.

Théorème 3 (de M. M a z u r k i e w i c z)[1]. *Chaque ensemble* $\boldsymbol{G}_\delta$, *dense et frontière dans un espace complet, séparable et* 0*-dimensionnel est homéomorphe à l'espace* $\mathcal{N}$.

En effet, d'après le théor. I', p. 120, l'ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ en question est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système d'ensembles $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$ non vides, fermés, ouverts, disjoints pour k fixe et satisfaisant aux conditions (1) et (2) du N° I. D'après (3), (c) et (f), cet ensemble est donc homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Corollaire. Chaque ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ *dense et frontière dans l'espace* $\mathcal{E}$ *des nombres réels est homéomorphe à* $\mathcal{N}$.

Soit Q l'ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ considéré et soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{E} - Q$, dense et tel que l'ensemble $\mathcal{E} - Q - D$ soit dense (un ensemble D de ce genre existe, car l'ensemble $\mathcal{E} - Q$ est dense et dense en soi). L'ensemble Q est par conséquent dense et frontière dans $\mathcal{E} - D$. De plus, comme ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$, $\mathcal{E} - D$ est un espace topologiquement complet de dimension 0 (§ 29, VII). Q est donc homéomorphe à $\mathcal{N}$ en vertu du théor. 3.

[1] *Teorja zbiorów* $\boldsymbol{G}_\delta$, Wektor 1918. Cf. dans cet ordre d'idées L. E. J. B r o u w e r, *On linear inner limiting sets*, Proc. Akad. Amsterdam 20 (1917), p. 1191; P. A l e x a n d r o f f et P. U r y s o h n, *Ueber nulldimensionale Mengen*, Math. Ann. 98 (1927), p. 89 (cas de l'ensemble $\boldsymbol{F}_\sigma$ homogène).

III. Transformations biunivoques.

Théorème. L'intervalle $\mathcal{J}$, ainsi que le cube n-dimensionnel $\mathcal{J}^n$ (n fini ou $\aleph_0$) [1]*, se laissent obtenir de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe* 0,1, c. à d. *par une transformation biunivoque et continue $y = f(x)$, dont la transformation inverse $x = f^{-1}(y)$ est de I-re classe.*

Soit N l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor dépourvu des extrémités gauches des intervalles contigus. La fonction $t(x)$ qui fait correspondre au nombre $x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_m}{3^m} + \ldots$ ($c_m = 0$ ou 2) le nombre $t(x) = \frac{c_1}{2^2} + \frac{c_2}{2^3} + \ldots + \frac{c_m}{2^{m+1}} + \ldots$ transforme N en $\mathcal{J}$ d'une façon biunivoque et continue (p. 149).

La fonction inverse t^{-1} n'admet qu'un ensemble dénombrable des points de discontinuité (notamment, les points qui sont représentés par des fractions diadiques finies); elle est donc de I-re classe (§ 30, VII, cor. 1).

N étant dense et frontière dans $\mathcal{C}$, les ensembles N et $\mathcal{N}$ sont homéomorphes (théor. 3, N° II); soit $s(x)$ une homéomorphie telle que $s(\mathcal{N}) = N$. La fonction $f(x) = ts(x)$ satisfait au théorème pour $n = 1$.

En faisant correspondre à la suite (finie ou infinie), composée de nombres irrationnels $x_1, x_2, \ldots$ la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots$, on définit une transformation continue g de $\mathcal{N}^n$ en $\mathcal{J}^n$ (p. 149, VI).

La transformation inverse $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \ldots$ fait correspondre à chaque point $y_1, y_2, \ldots$ de l'espace $\mathcal{J}^n$ un point de $\mathcal{N}^n$; la transformation g^{-1} est donc de I-re classe, puisque f^{-1} est de I-re classe (p. 183, 3). $\mathcal{N}^n$ étant homéomorphe à $\mathcal{N}$ (p. 148, remarque), désignons par h une homéomorphie telle que $h(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^n$. La fonction superposée $gh(x)$ est bien la fonction demandée.

Corollaire [2]. *Chaque espace métrique séparable $\mathcal{X}$ se laisse obtenir d'un sous-ensemble E de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe* 0,1. En outre, *si $\mathcal{X}$ est complet, E est fermé* (c. à d. *est topologiquement complet, séparable, et 0-dimensionnel).*

En effet, $\mathcal{X}$ peut être considéré comme un sous-ensemble Q de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (p. 104, IV). En outre, si l'espace $\mathcal{X}$ est complet, Q est un $\boldsymbol{G_\delta}$ (cf. p. 215, III). Or, f étant la fonction considérée dans le théorème précédent (pour $n = \aleph_0$), l'ensemble $f^{-1}(Q)$ est un $\boldsymbol{G_\delta}$ dans $\mathcal{N}$; il est donc homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ (corollaire du théor. 2, N° II).

[1]) et d'une façon plus générale *chaque espace complet séparable et dense en soi*; voir ma note sur ce sujet, qui paraîtra dans Fund. Math. 22 (1934).

[2]) Dans le § suivant ce corollaire sera étendu sur les ensembles boreliens.

IV. Théorèmes de décomposition.

1. *Chaque espace complet, séparable,* 0-*dimensionnel et indénombrable se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble homéomorphe à $\mathcal{N}$.*

En effet, d'après le théorème de Cantor-Bendixson (p. 108), l'espace se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble P parfait et non vide. Soit D un ensemble dénombrable dense dans P. L'ensemble P, considéré comme l'espace, est complet, séparable et 0-dimensionnel. En outre, chaque point en est un point de condensation (§ 30, IV, cor. 3); l'ensemble $P - D$ est donc dense dans P. Comme un $\boldsymbol{G_\delta}$ dense et frontière dans P, l'ensemble $P-D$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$ selon le théor. 3 du N° II.

On en conclut que *chaque ensemble $\boldsymbol{G_\delta}$ indénombrable situé dans $\mathcal{E}$ devient homéomorphe à $\mathcal{N}$, lorsqu'on supprime un ensemble dénombrable convenablement choisi* [1]. Car en enlevant les points rationnels, on parvient à un ensemble $\boldsymbol{G_\delta}$ de dimension 0, qui devient — comme nous venons de démontrer — homéomorphe à $\mathcal{N}$, lorsqu'on enlève un ensemble dénombrable.

2. *Chaque espace complet, séparable et indénombrable se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble qui s'obtient de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe* 0,1.

Soient, en effet, $\mathcal{Y}$ l'espace considéré et $\mathcal{X}$ un espace complet, séparable, 0-dimensionnel et tel que $\mathcal{Y}$ s'en obtienne par une homéomorphie f de classe 0,1 (N° III, corollaire). D'après le théorème précédent, on a $\mathcal{X} = D + N$, où D est dénombrable et N homéomorphe à $\mathcal{N}$. La formule $\mathcal{Y} = f(D) + f(N)$ représente la décomposition demandée.

V. Rapports à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor.

Théorème. Chaque transformation continue d'un espace complet séparable $\mathcal{X}$ est une homéomorphie sur un ensemble A homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, pourvu que cette transformation admette une infinité indénombrable des valeurs différentes.

[1]) Théorème de M. Mazurkiewicz, l. cit.

En outre[1]), *chaque espace complet, dense en soi et non vide* (qu'il soit séparable ou non) *contient* $\mathcal{C}$ *topologiquement.*

Faisons correspondre à chaque valeur y de la fonction f considérée un point x_y tel que $y = f(x_y)$. L'espace $\mathcal{X}$ étant séparable et l'ensemble des x_y indénombrable, soit D un sous-ensemble dense en soi (non vide) de cet ensemble (cf. § 18, V).

Soient $p_0 \neq p_2$ deux points de l'ensemble D et soient F_0 et F_2 deux sphères (fermées) de centre p_0 et p_2 telles que: 1° $\delta(F_0) < 1$, $\delta(F_2) < 1$, 2° $f(F_0) \cdot f(F_2) = 0$. L'existence des sphères F_0 et F_2 résulte de la continuité de la fonction f: si elles n'existaient pas, on pourrait définir (en considérant des sphères de plus en plus petites) deux suites $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ telles que $\lim r_n = p_0$, $\lim s_n = p_2$ et $f(r_n) = f(s_n)$; mais on aurait alors $\lim f(r_n) = \lim f(s_n)$, d'où $f(p_0) = f(p_2)$ et $p_0 = p_2$, car la fonction f est biunivoque sur D.

L'ensemble D étant dense en soi, il existe à l'intérieur de F_0 deux points p_{00} et p_{02} de D et deux sphères F_{00} et F_{02} telles que $\delta(F_{00}) < 1/2$, $\delta(F_{02}) < 1/2$, $f(F_{00}) \cdot f(F_{02}) = 0$ et $F_{00} + F_{02} \subset F_0$. En attribuant un sens analogue aux symboles F_{20} et F_{22} et en procédant ainsi de proche en proche, on parvient à un système diadique d'ensembles fermés non vides $\{F_{c_1 \dots c_k}\}$ qui satisfait aux conditions (1) et (2) du N° I. On a en outre

$$\text{(i)} \qquad f(F_{c_1 \dots c_k}) \cdot f(F_{d_1 \dots d_k}) = 0, \quad \text{si } (c_1 \dots c_k) \neq (d_1 \dots d_k),$$

ce qui implique que $F_{c_1 \dots c_k} \cdot F_{d_1 \dots d_k} = 0$.

Il en résulte en vertu de N° I, (d) et (e), que l'ensemble $A = \prod_{k=1}^{\infty} \sum F_{c_1 \dots c_k}$, où la sommation s'étend à tous les systèmes de k chiffres $c_1 \dots c_k$, est une image biunivoque et continue de $\mathcal{C}$: $A = g(\mathcal{C})$[2]).

La fonction $g(c), c \in \mathcal{C}$, est b i c o n t i n u e[3]). Soit, en effet, $\lim_{n=\infty} g(c_n) = g(c)$. Il s'agit de démontrer que $\lim_{n=\infty} c_n = c$, donc—en vertu du théor. de Bolzano-Weierstrass—que la condition $\lim_{n=\infty} c_{k_n} = c'$ entraîne $c' = c$. Or, la fonction g étant continue, on a l'égalité $\lim_{n=\infty} g(c_{k_n}) = g(c')$, d'où $g(c') = g(c)$ et $c' = c$, puisque la fonction g est biunivoque.

Il est ainsi établi que A est homéomorphe à $\mathcal{C}$. Enfin, pour prouver que la fonction partielle $f(x|A)$ est bicontinue, il suffit de démontrer—comme nous venons de voir—que cette fonction est biunivoque. Or, étant donnés deux points $x_1 \neq x_2$ de A, il existe deux systèmes différents d'indices $c_1 \dots c_k$ et $d_1 \dots d_k$ tels que $x_1 \in F_{c_1 \dots c_k}$ et $x_2 \in F_{d_1 \dots d_k}$. Il vient selon (i): $f(x_1) \neq f(x_2)$, c. q. f. d.

Pour établir la deuxième partie du théorème, il suffit de poser dans le raisonnement précédent $D = \mathcal{X}$ et $f(x) = x$.

Corollaire 1. Toute image continue indénombrable d'un espace complet séparable contient $\mathcal{C}$ *topologiquement. Elle est donc de la puissance du continu.*

Corollaire 2. Tout espace complet, séparable et indénombrable contient un G_δ *(homéomorphe à* $\mathcal{N}$*) dont chaque espace complet séparable est une image continue.*

C'est une conséquence du corollaire précédent, du théor. 1 (N° II) et du fait que l'ensemble $\mathcal{C}$ dépourvu des extrémités des intervalles contigus est homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Corollaire 3. Etant donnée une fonction continue $f(x)$, définie sur un espace complet séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des valeurs de cette fonction soit indénombrable est qu'il existe un ensemble dense en soi E (situé dans cet espace) tel que la fonction partielle $f(x|E)$ soit biunivoque.

La condition est nécessaire en vertu du théorème de ce N°. Elle est suffisante d'après le corollaire 6, p. 206.

§ 33. Ensembles boreliens dans les espaces complets séparables.

I. Ensembles ambigus[1]). *A chaque ensemble ambigu A de classe $\alpha + 1 > 1$, situé dans* $\mathcal{X}$, *correspondent: un espace complet séparable C de dimension* 0 (autrement dit, un sous-ensemble fermé

[1]) Cf. W. H. Y o u n g, Leipz. Ber. 55 (1903), p. 287.

[2]) La fonction $g(c)$ peut être définie directement, en convenant que $g(c) = F_{c_1} \cdot F_{c_1 c_2} \cdot F_{c_1 c_2 c_3} \cdot \dots$ pour $c = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{27} + \dots$ Cf. F. H a u s d o r f f, *Mengenlehre*, p. 134.

[3]) C'est un cas particulier d'un théorème sur les espaces compacts.

[1]) Cf. N. L u s i n, *Ensembles analytiques*, chap. II.

de $\mathfrak{N}$) *et une homéomorphie f de classe $0,\alpha$ qui transforme C en $\mathfrak{X}$ de façon que l'ensemble $f^{-1}(A)$ soit un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$ (dans C).*

Supposons que le théorème soit vrai pour chaque ensemble ambigu de classe $<\beta$ $(\beta>1)$. Nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi, quand A est un ensemble ambigu de classe β.

D'après p. 166, IX, l'ensemble A est de la forme:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cdot A_{n+1}\cdot\ldots)=\prod_{n=1}^{\infty}(A_n+A_{n+1}+\ldots)$$

où A_n est ambigu de classe α_n et $0<\alpha_n<\beta$.

Si $\beta>2$, il existe par hypothèse un ensemble C_n fermé dans $\mathfrak{N}$ et une homéomorphie f_n de classe $0,\alpha_n$, définie sur C_n, telle que $f_n(C_n)=A_n$. Si $\beta=2$, on parvient à la même conclusion en vertu du corollaire § 32, III (où l'espace $\mathfrak{X}$ peut être remplacé par l'ensemble A_n, car celui-ci est un $\boldsymbol{G}_\delta$).

L'ensemble $\mathfrak{X}-A_n$ étant aussi ambigu de classe α_n, il existe un ensemble D_n fermé dans l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle (1,2) et dont le rapport à $\mathfrak{X}-A_n$ est identique à celui de C_n à A_n; de sorte qu'en posant $E_n=C_n+D_n$, la fonction f_n définie sur l'ensemble E_n tout entier, est continue, biunivoque et remplit les formules $f_n(C_n)=A_n$ et $f_n(D_n)=\mathfrak{X}-A_n$. La fonction f_n^{-1} est de classe α_n, car les fonctions partielles $f_n^{-1}|A_n$ et $f_n^{-1}|(\mathfrak{X}-A_n)$ sont par hypothèse de classe α_n et l'ensemble A_n est ambigu de classe α_n (cf. p. 179, IV, 2).

Remarquons que E_n est topologiquement complet, séparable, 0-dimensionnel et que les ensembles C_n et D_n sont fermés et ouverts dans cet espace. Soit $E=E_1\times E_2\times\ldots$ le produit cartésien des espaces E_n, c. à d. l'espace des suites $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$ où $\mathfrak{z}^n\in E_n$. Soit C l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $f_1(\mathfrak{z}^1)=f_2(\mathfrak{z}^2)=\ldots$ Posons $f(\mathfrak{z})=f_1(\mathfrak{z}^1)$ pour $\mathfrak{z}\in C$.

Les fonctions f_n étant continues, C est fermé dans E. L'espace E étant topologiquement complet, séparable et 0-dimensionnel (§ 29, III, § 14, VI, § 24, V), il en est de même de C.

On a $f(C)=\mathfrak{X}$. Car x étant un point de $\mathfrak{X}$, il existe, pour chaque n, un $t_n\in E_n$ tel que $x=f_n(t_n)$. En posant $\mathfrak{z}=[t_1,t_2,\ldots]$, il vient $x=f(\mathfrak{z})$ et $\mathfrak{z}\in C$.

La fonction $f(\mathfrak{z})$ est *biunivoque*. En effet, si $\mathfrak{z}\neq\mathfrak{y}$, il existe un n tel que $\mathfrak{z}^n\neq\mathfrak{y}^n$, d'où $f(\mathfrak{z})=f_n(\mathfrak{z}^n)\neq f_n(\mathfrak{y}^n)=f(\mathfrak{y})$, puisque la fonction f_n est biunivoque.

La fonction $f(\mathfrak{z})$ est *continue*, car la fonction $f_1(\mathfrak{z}^1)$ est continue.

La fonction $\mathfrak{z}=f^{-1}(x)$ est de classe β, si β est un nombre limite, et de classe $<\beta$ dans le cas contraire. Car en vertu des équivalences:

$$\{\mathfrak{z}=f^{-1}(x)\}\equiv\{f(\mathfrak{z})=x\}\equiv\{x=f_1(\mathfrak{z}^1)=f_2(\mathfrak{z}^2)=\ldots\}\equiv$$
$$\equiv\{\mathfrak{z}^1=f_1^{-1}(x),\ \mathfrak{z}^2=f_2^{-1}(x),\ldots\}$$

chaque coordonnée du point $\mathfrak{z}=f^{-1}(x)$ est une fonction de classe $<\beta$ (p. 183, VI, 1).

L'ensemble $f^{-1}(A)$ *est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$*. On a, en effet,

$$f^{-1}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(A_n)\cdot f^{-1}(A_{n+1})\cdot\ldots]=\prod_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(A_n)+f^{-1}(A_{n+1})+\ldots].$$

La fonction f étant continue, il suffit donc de démontrer que l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ est fermé et ouvert dans C. Or, on a pour $\mathfrak{z}\in C$: $\{f(\mathfrak{z})\in A_n\}\equiv\{f_n(\mathfrak{z}^n)\in A_n\}\equiv\{\mathfrak{z}^n\in C_n\}$ et l'ensemble C_n étant fermé et ouvert dans E_n, l'ensemble $f^{-1}(A_n)=C\cdot\underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z}^n\in C_n\}$ est fermé et ouvert dans C, puisque $\underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z}^n\in C_n\}=E_1\times\ldots\times E_{n-1}\times C_n\times E_{n+1}\times\ldots$

Remarque. La classe de la fonction $f^{-1}(x)$ ne peut pas être *réduite*. Car f^{-1} étant de classe ξ, l'ensemble $A=ff^{-1}(A)$ est ambigu de classe $\xi+1$, puisque $f^{-1}(A)$ est ambigu de classe 1 (§ 27, III). Par conséquent, si A est de classe $\alpha+1$ sans être de classe α, on a $\xi\geqslant\alpha$.

II. Ensembles boreliens arbitraires [1].

Corollaire 1. Chaque ensemble borelien B de classe $\alpha>0$ se laisse obtenir d'un espace complet, 0-dimensionnel et séparable (autrement dit: d'un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{N}$) à l'aide d'une homéomorphie de classe $0,\alpha$.

En effet, B étant ambigu de classe $\alpha+1$, on considère l'ensemble $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$ du théorème précédent comme l'espace complet et on restreint à cet espace le domaine des arguments de la fonction f.

Il est en outre à remarquer que, *si B est de classe α additive (multiplicative), l'ensemble $f(X)$ l'est également, quel que soit l'ensemble X ouvert (fermé).*

---

[1]) Cf. N. Lusin, ibid. Pour des énoncés plus précis, cf. ma note sur ce sujet, qui paraîtra dans Fund. Math. 22 (1934).

Corollaire 2. Dans chaque ensemble borelien indénombrable B de classe $\alpha > 0$ il existe un ensemble dénombrable D tel que l'ensemble $B - D$ se laisse obtenir de $\mathcal{N}$ à l'aide d'une homéomorphie de classe $0,\alpha$.

Soient, conformément au cor. 1, C un espace complet, séparable, 0-dimensionnel et f une homéomorphie de classe $0,\alpha$ telle que $f(C) = B$. E étant un sous-ensemble dénombrable de C tel que l'ensemble $C - E$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$ (p. 227, IV, 1), on pose $D = f(E)$.

Corollaire 3. Chaque ensemble borelien est une image continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels.

Supposons d'abord l'ensemble B indénombrable et soit $D = p_1, p_2, \ldots$ l'ensemble dénombrable (fini ou infini) considéré dans le cor. 2. Soit $f(t)$, $t \in \mathcal{N}$, une fonction continue telle que $f(\mathcal{N}) = B - D$. Désignons par $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $(n, n+1)$ et posons $f(\mathcal{N}_n) = p_n$. L'ensemble $\mathcal{N} + \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \ldots$, qui est évidemment homéomorphe à $\mathcal{N}$, se trouve ainsi transformé en B d'une façon continue.

Dans le cas où B est dénombrable, on pose $B = D$. La fonction f transforme alors l'ensemble $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \ldots$ en B.

Corollaire 4. (théor. de M. M. Alexandroff-Hausdorff) [1]. *Chaque ensemble borelien indénombrable contient topologiquement l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. Sa puissance est donc* $\mathfrak{c}$.

C'est une conséquence du cor. 3 et du cor. 1, p. 229.

III. Développement des ensembles ambigus en séries alternées [2]. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit ambigu de classe $\alpha + 1$ est qu'il soit développable en série alternée dénombrable (transfinie) d'ensembles décroissants de classe α multiplicative*:

$$(1) \qquad E = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \ldots + B_\omega - B_{\omega+1} + \ldots$$

La suffisance de cette condition a été démontrée p. 164, 3. Pour en prouver la nécessité, considérons, conformément au théor. du N° I, un espace complet séparable C et une homéomorphie f de

[1] P. Alexandroff, C. R. Paris t. 162 (1916), p. 323, F. Hausdorff, Math. Ann. 77 (1916), p. 430.

[2] N. Lusin, l. cit.

classe $0,\alpha$ qui transforme C en l'espace $\mathcal{X}$ (qui contient E) de façon que l'ensemble $f^{-1}(E)$ soit un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$. En vertu du théorème p. 207, VI, l'ensemble $f^{-1}(E)$ est de la forme

$$f^{-1}(E) = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_\omega - F_{\omega+1} + \ldots,$$

où les ensembles F_ξ sont fermés et décroissants.

La fonction f étant biunivoque, il vient:

$$E = ff^{-1}(E) = f(F_1) - f(F_2) + \ldots + f(F_\omega) - f(F_{\omega+1}) + \ldots$$

et les ensembles décroissants $B_\xi = f(F_\xi)$ sont de classe α multiplicative, puisque la fonction f^{-1} est de classe α.

IV. Petites classes de Borel. Le théorème précédent conduit d'une façon naturelle à une classification des ensembles ambigus d'une classe α donnée (où α n'est pas un nombre limite). Notamment, la série (1) étant du type β, nous dirons que E appartient à la *petite classe* $\boldsymbol{F}_\alpha^\beta$. D'une façon analogue, si le complémentaire de E est développable en une série du type β, E est dit de *petite classe* $\boldsymbol{G}_\alpha^\beta$ [1].

On voit ainsi que la classification des ensembles ambigus de classe α (α fixe) en „petites classes" est tout-à-fait analogue à celle des ensembles boreliens en classes $\boldsymbol{F}_\alpha$ (ou $\boldsymbol{G}_\alpha$).

Ainsi, par exemple, les ensembles des petites classes $\boldsymbol{F}_1^1, \boldsymbol{F}_1^2, \boldsymbol{F}_1^3 \ldots$, $\boldsymbol{G}_1^1, \boldsymbol{G}_1^2, \boldsymbol{G}_1^3, \ldots$ sont respectivement de la forme:

$$F, \quad F_1 - F_2, \quad F_1 - F_2 + F_3, \ldots$$

$$\mathcal{X} - F, \quad \mathcal{X} - F_1 + F_2, \quad \mathcal{X} - F_1 + F_2 - F_3, \ldots$$

Par une méthode analogue à celle qui nous a servi pour démontrer qu'à chaque α correspond (dans l'espace des nombres irrationnels) un ensemble borelien qui est de classe α sans être de classe $< \alpha$ (p. 175) on établit l'exis-

[1] Cette condition s'exprime d'une façon plus naturelle, lorsqu'on emploie la *division* des ensembles, en posant par définition $X : Y = X + Y'$ (où $Y' =$ complémentaire de Y). G_α^β est alors la classe des ensembles qui se laissent développer en un „produit alterné" du type β d'ensembles croissants de classe α additive:

$$E = (G_1 : G_2) \cdot (G_3 : G_4) \cdot \ldots \cdot (G_\omega : G_{\omega+1}) \cdot \ldots \quad \text{où} \quad G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_\omega \subset \ldots$$

En effet, la formule $E' = B_1 - B_2 + \ldots + B_\omega - B_{\omega+1} + \ldots$ entraîne

$$E = (B_1 - B_2)' \cdot \ldots \cdot (B_\omega - B_{\omega+1})' \cdot \ldots = (B_1' : B_2') \cdot \ldots \cdot (B_\omega' : B_{\omega+1}') \cdot \ldots$$

tence des ensembles qui appartiennent à une petite classe donnée sans appartenir aux petites classes à indices inférieurs [1]).

§ 34. Ensembles projectifs.

I. Définitions. On appelle *ensembles projectifs de classe* 0 les ensembles boreliens. Les *ensembles projectifs de classe* $2n+1$ sont les images continues des ensembles projectifs de classe $2n$ (situés dans le même espace); les *ensembles projectifs de classe* $2n$ sont les complémentaires des ensembles projectifs de classe $2n-1$ [2]).

En particulier, les ensembles projectifs de classe 1, c. à d. les images continues des ensembles boreliens sont appelés *analytiques* ou *ensembles* A [3]), leur complémentaires, c. à d. les ensembles projectifs de classe 2, sont nommés *complémentaires analytiques* ou *ensembles* CA [4]).

Comme on verra dans la suite, il y a de nombreux problèmes d'un caractère élémentaire qui conduisent aux ensembles A et aux ensembles CA. Il y a aussi des exemples importants d'ensembles qui sont analytiques sans être boreliens; tel est, dans l'espace des sous-ensembles fermés de l'intervalle, l'ensemble des ensembles fermés indénombrables [5]).

L'importance de la théorie des ensembles projectifs (surtout des ensembles analytiques) tient aussi à ses applications aux autres branches de la

[1]) M. Lavrentieff, *Sur les sous-classes de la classification de M. Baire*, C. R. Paris 1925. Cf. aussi N. Lusin, op. cit. p. 123, et W. Sierpiński, *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles*, Fund. Math. 14 (1929), p. 82.

[2]) Avec les opérations dénombrables $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ et $\prod\limits_{n=1}^{\infty}$ il n'y aurait aucune difficulté de prolonger cette classification dans le transfini ($<\Omega$), en imitant la classification des ensembles boreliens.

[3]) ou „ensembles de Souslin" (F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 177).

[4]) La notion d'ensemble analytique a été introduite par MM. Souslin et Lusin; voir *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*, C. R. Paris t. 164, 1917, p. 88 et suiv. La théorie des ensembles analytiques a été développée surtout par MM. Lusin et Sierpiński. La notion d'ensemble projectif est due à M. Lusin; voir *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, C. R. Paris t. 180 (1925), p. 1570. Cf. L. Kantorovitch et E. Livenson, *Memoir on the analytical operations and projective sets*, Fund. Math. t. 18 (1932), p. 214 et t. 20 (1933), p. 54.

[5]) W. Hurewicz, *Zur Theorie der analytischen Mengen*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 4—17. Nous reviendrons sur ce point dans le Chap. IV.

Topologie; ainsi, par exemple, la démonstration du théorème sur l'inversion des fonctions continues (§ 35, V) repose sur cette théorie.

Nous allons voir que les ensembles analytiques jouissent de la propriété de Baire (même au sens restreint) et qu'ils sont mesurables (dans le cas de l'espace des nombres réels, cf. § 35, II). Le problème si ces deux propriétés appartiennent aux ensembles projectifs en général, n'est pas résolu [1]); en conséquence, les ensembles projectifs de classes $n>2$ sont — à l'état actuel de leur théorie — moins susceptibles d'applications. Néanmoins, on est conduit à la notion d'ensemble projectif d'une façon tout-à-fait naturelle, surtout lorsqu'on se sert des notations logiques et lorsqu'on tient compte du fait que l'opérateur logique $\sum\limits_{x}$ correspond à la projection (p. 8) et que la négation correspond au passage au complémentaire d'un ensemble.

II. Relations entre les classes projectives. Désignons, d'une façon générale, par CX la famille des complémentaires des ensembles appartenant à une famille donnée X et par PX la famille des images continues des ensembles appartenant à X. On a les formules évidentes:

1. $CCX=X$ 2. $X\subset PX=PPX$
3. $X\subset Y$ *entraîne* $CX\subset CY$ *et* $PX\subset PY$.

En outre, L_n désignant la n-ième classe projective, on a:

4. $L_{2n+1}=PL_{2n}$ 5. $L_{2n}=CL_{2n-1}$
6. $CL_0=L_0$ *et* $PL_0=L_1=A$.

Nous allons démontrer que

7. $L_{2n}\subset L_{2n+k}$ *et* $L_{2n+1}\subset L_{2n+2+k}$ *pour* $n\geqslant 0$ *et* $k=1,2,\ldots$

Il suffit évidemment de prouver que:

(i) $L_{2n}\subset L_{2n+1}$, (ii) $L_n\subset L_{n+2}$, (iii) $L_{2n+1}\subset L_{2n+4}$.

L'inclusion (i) est une conséquence directe de 2 et 4.

[1]) La solution de ce problème (même dans le cas de $n=3$ et de l'espace des nombres réels) semble présenter des difficultés très profondes; d'après M. Lusin, qui a posé ce problème, „on ne saura jamais" (!) si la solution est positive ou négative. Il en est de même du problème si la puissance d'un ensemble CA indénombrable est celle du continu. Voir N. Lusin, *Les propriétés des ensembles projectifs*, C. R. Paris t. 180 (1925), p. 1817.

L'inclusion (ii) est satisfaite pour $n=0$ en vertu de 3 et 6. Pour $n>0$ on a soit $L_n = PCL_{n-2}$, soit $L_n = CPL_{n-2}$ (où l'on pose $L_{-1} = L_0$). Si l'on admet (en raisonnant par induction) l'inclusion $L_{n-2} \subset L_n$, il vient selon 3: $PCL_{n-2} \subset PCL_n$ et $CPL_{n-2} \subset CPL_n$, d'où l'inclusion (ii).

Enfin, l'inclusion (i) donne $CL_{2n+1} = L_{2n+2} \subset L_{2n+3}$, d'où selon 3 et 1: $L_{2n+1} = CCL_{2n+1} \subset CL_{2n+3} = L_{2n+4}$.

III. Propriétés des ensembles projectifs.

1. *P_k étant un ensemble projectif de classe n situé dans un espace complet séparable $\mathcal{X}_k$, $k=1, 2, \dots$, le produit cartésien (fini ou infini) $P_1 \times P_2 \times \dots$ est un ensemble projectif de classe n dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$*

2. *P et Q étant deux ensembles projectifs de classe n, situés respectivement dans les espaces complets séparables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, et $y=f(x)$ étant une fonction continue définie sur P, l'ensemble $f^{-1}(Q)$ est de classe n. En outre, si n est impair, $f(P)$ est de classe n; si n est pair, $f(P)$ est de classe $n+1$.*

3[1]. *La propriété d'être un ensemble projectif de classe n est additive et multiplicative au sens dénombrable; autrement dit, si les ensembles $P_1, P_2, \dots$ sont des ensembles projectifs de classe n, les ensembles $P_1 + P_2 + \dots$ et $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots$ le sont également.*

Nous établirons ces propriétés par l'induction finie.

Pour $n=0$ (cas des ensembles boreliens), les propriétés 1, 3 et la première partie de 2 sont satisfaites (§ 26, III). La deuxième partie de 2 l'est également. Car $\mathcal{Y}$ étant supposé indénombrable (ce qui est légitime, puisque autrement $f(P)$ est dénombrable, donc de classe 1), il existe un sous-ensemble borelien N de $\mathcal{Y}$ dont P est une image continue: $P = g(N)$ (cf. p. 229, cor. 2 et p. 232, cor. 3). L'ensemble $f(P) = fg(N)$ est donc de classe 1.

Admettons donc que $n>0$ et que les trois propriétés soient réalisées pour $n-1$ (nous les désignerons par 1_{n-1}, 2_{n-1}, 3_{n-1}).

a) *Cas de n impair.* Posons $P_k = p_k(R_k)$, l'ensemble R_k étant un sous-ensemble de $\mathcal{X}_k$ de classe $n-1$ et p_k une fonction continue définie sur R_k.

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les familles inductives et projectives d'ensembles*, Fund. Math. 13 (1929), pp. 228–239.

ad 1). En faisant correspondre au point $(x_1, x_2, \dots)$ de l'ensemble $R_1 \times R_2 \times \dots$ le point $[p_1(x_1), p_2(x_2), \dots]$ de l'ensemble $P_1 \times P_2 \times \dots$, premier ensemble se trouve transformé d'une façon continue en deuxième (voir p. 149, VI). Le premier étant de classe $n-1$ en vertu de 1_{n-1}, le deuxième est de classe n en vertu de la dernière partie de 2_{n-1}.

ad 2). Soit, comme auparavant, $P = p(R)$ où $R \subset \mathcal{X}$. Soit, en outre, $Q = q(T)$, l'ensemble T étant un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ de classe $n-1$ et q une fonction continue définie sur T.

On a les équivalences évidentes (où $x \in \mathcal{X}$, $x^* \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$):

$$\{x \in f^{-1}(Q)\} \equiv \{f(x) \in Q\} \equiv \sum_{x^*} \{[x = p(x^*)] \cdot [fp(x^*) \in Q]\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{x^*y} \{[x = p(x^*)] \cdot [fp(x^*) = q(y)]\},$$

d'où

$$f^{-1}(Q) = \mathop{E}_{x} \sum_{x^*y} \{[x = p(x^*)] \cdot [fp(x^*) = q(y)]\}.$$

L'ensemble $f^{-1}(Q)$ est par conséquent une projection (§ 2, V, 3), donc une image continue, de l'ensemble M des points (x, x^*, y) qui satisfont à la condition entre crochets $\{\ \}$. Les fonctions p, fp et q étant continues, et les deux premières ayant R et la troisième T pour ensemble des arguments, l'ensemble M est fermé dans le produit $\mathcal{X} \times R \times T$. Celui-ci étant selon 1_{n-1} de classe $n-1$, M est la partie commune d'un ensemble fermé (donc de classe $n-1$) et d'un ensemble de classe $n-1$. Selon 3_{n-1}, M est par conséquent de classe $n-1$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et $f^{-1}(Q)$, comme image continue de M, est de classe n selon le dernière partie de 2_{n-1}.

En outre, l'identité $f(P) = fp(R)$ implique selon 2_{n-1} que l'ensemble $f(P)$ est de classe n dans $\mathcal{Y}$, comme image continue de R.

ad 3). Soit, à présent, $P_k = p_k(R_k)$ et $R_k \subset \mathcal{X}$. On a

$$\left\{x \in \sum_{k=1}^{\infty} P_k\right\} \equiv \left\{x \in \sum_{k=1}^{\infty} p_k(R_k)\right\} \equiv \sum_k \{x \in p_k(R_k)\} \equiv \sum_k \sum_{x^*} \{x = p_k(x^*)\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{x^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\}.$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \mathop{E}_{x} \sum_{x^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\}$, ce qui prouve que $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ est la projection de $M = \mathop{E}_{xx^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathop{E}_{xx^*} \{x = p_k(x^*)\}$.

Or, la fonction p_k, définie sur R_k, étant continue, l'ensemble $M_k = \underset{xx^*}{E}\{x = p_k(x^*)\}$ est fermé dans le produit $\mathcal{X}\times R_k$, qui est de classe $n-1$ selon 1_{n-1}; donc, comme partie commune d'un ensemble fermé et d'un ensemble de classe $n-1$, l'ensemble M_k est, en raison de 3_{n-1}, de classe $n-1$; en vertu de la même proposition, l'ensemble $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ est de classe $n-1$ et, d'après 2_{n-1}, $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ est de classe n comme image continue (projection) de M.

D'autre part, la condition $x \varepsilon \prod_{k=1}^{\infty} P_k$ veut dire qu'il existe une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ telle que $x = p_k(x_k)$. En désignant, comme d'habitude, par $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ une variable qui parcourt $\mathcal{X}^{\aleph_0}$, on a

$$\left\{x \varepsilon \prod_{k=1}^{\infty} P_k\right\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k} \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\}.$$

$\prod_{k=1}^{\infty} P_k$ est par conséquent la projection de l'ensemble

$$\underset{x\mathfrak{z}}{E} \prod_{k} \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\} = \prod_{k=1}^{\infty} \underset{x\mathfrak{z}}{E} \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\}.$$

Il suffit donc (en raison de 3_{n-1}) de démontrer que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\}$ est de classe $n-1$ (dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{X}^{\aleph_0}$). Or, cela résulte, comme auparavant, du fait que la fonction $p_k(\mathfrak{z}^k)$, considérée comme fonction de $\mathfrak{z}$, est continue (puisque $\mathfrak{z}^k$ est une fonction continue de $\mathfrak{z}$ pour k fixe; p. 145, I) et définie sur l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z}^k \varepsilon R_k\} = \mathcal{X}\times\ldots\times\mathcal{X}\times R_k\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\ldots$, qui est de classe $n-1$ selon 1_{n-1}.

b) *Cas de $n > 0$ pair.* L'ensemble P étant de classe n, l'ensemble P' (le complémentaire de P) est de classe $n-1$ impaire.

La proposition 3 résulte directement de 3_{n-1} et des formules de de Morgan: $\left(\sum_k P_k\right)' = \prod_k P'_k$ et $\left(\prod_k P_k\right)' = \sum_k P'_k$.

En vertu de l'identité (cf. p. 8, 3): $P\times\mathcal{Y} = \mathcal{X}\times\mathcal{Y} - (P'\times\mathcal{Y})$ et de 1_{n-1}, l'ensemble $P\times\mathcal{Y}$ est de classe n et il en est encore de même de l'ensemble $\mathcal{X}_1\times\ldots\times\mathcal{X}_{k-1}\times P_k\times\mathcal{X}_{k+1}\times\ldots$ On en déduit la proposition 1_n, en tenant compte de 3_n et de l'identité (cf. p. 8, 6a): $P_1\times P_2\times\ldots = (P_1\times\mathcal{X}_2\times\mathcal{X}_3\times\ldots)\cdot(\mathcal{X}_1\times P_2\times\mathcal{X}_3\times\ldots)\cdot\ldots$

Passons enfin à la proposition 2. D'après le théorème sur le prolongement des fonctions continues (p. 210, I), il existe un ensemble P^* qui est un $\boldsymbol{G}_\delta$ contenant P et une fonction continue f_1 définie sur P^* et identique à f aux points de P; ceci peut être exprimé par l'égalité $f = f_1 | P$. Il vient (p. 12, 14): $f^{-1}(Q) = P\cdot f_1^{-1}(Q)$ et $f_1^{-1}(Q) = f_1^{-1}(\mathcal{Y} - Q') = P^* - f_1^{-1}(Q')$.

D'après 2_{n-1}, $f_1^{-1}(Q')$ est de classe $n-1$; selon 3_n, l'ensemble $f_1^{-1}(Q) = P^*\cdot[\mathcal{X} - f_1^{-1}(Q')]$ est donc de classe n. En multipliant cet ensemble par P et en appliquant 3_n, on en conclut que $f^{-1}(Q)$ est un ensemble projectif de classe n.

En outre, N désignant (comme dans le cas $n=0$) un sous-ensemble borelien de $\mathcal{Y}$ dont $\mathcal{X}$ est une image continue: $\mathcal{X} = g(N)$, l'ensemble $g^{-1}(P)$ est de classe n dans $\mathcal{Y}$ et par conséquent l'ensemble $f(P) = fg\,[g^{-1}(P)]$ y est de classe $n+1$.

Les propositions 1—3 se trouvent établies complètement.

4. *$f(x)$ étant une fonction mesurable B définie sur un ensemble P de classe n, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ est de classe n.*

En effet, I est borelien relativement au produit cartésien $P\times\mathcal{Y}$ (§ 27, VII). Comme partie commune d'un ensemble borelien et de l'ensemble $P\times\mathcal{Y}$, qui est de classe n (selon 1), I est donc de classe n (d'après 3).

5. *La proposition 2 reste vraie, lorsqu'on admet que $f(x)$ est une fonction mesurable B arbitraire.*

En effet, il existe d'après p. 219, VI, une fonction f_1 mesurable B, définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier et telle que $f = f_1|P$. Il vient (p. 12, 14): $f^{-1}(Q) = P\cdot f_1^{-1}(Q)$. Il suffit donc de démontrer que $f_1^{-1}(Q)$ est de classe n. Or, il en est ainsi, si n est impair, car en posant $J = \underset{xy}{E}\{y = f_1(x)\}$, l'ensemble $f_1^{-1}(Q)$ est la projection de $J\cdot(\mathcal{X}\times Q)$ sur l'axe $\mathcal{X}$. Si n est pair, il en est de même en vertu de l'identité: $f_1^{-1}(\mathcal{Y} - Q) = \mathcal{X} - f_1^{-1}(Q)$.

En outre, $f(P)$ est la projection de l'ensemble $\underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ sur l'axe $\mathcal{Y}$.

Remarque. On voit ainsi qu'on n'altère pas la notion de classe projective, en admettant dans sa définition qu'un ensemble P situé dans l'espace $\mathcal{X}$ est de classe $2n+1$, lorsqu'il existe (dans $\mathcal{X}$ ou dans un autre espace complet séparable) un ensemble R de classe $2n$ et une fonction f définie sur R, mesurable B et telle que $P = f(R)$.

6. *Le résultat de l'opération* $(\mathcal{A})$ *effectuée sur des ensembles de classe n impaire est un ensemble de classe n.*

Soit, en effet, (cf. p. 5): $P = \sum\limits_{\mathfrak{z}} \prod\limits_{k=1}^{\infty} P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ où $P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ est un ensemble de classe n et $\mathfrak{z} \varepsilon \mathfrak{N}$. P étant la projection de l'ensemble

$$\underset{\mathfrak{z}x}{E}\left\{x \varepsilon \prod_{k=1}^{\infty} P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \underset{\mathfrak{z}x}{E}\,\{x \varepsilon P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\},$$

tout revient à démontrer que l'ensemble $Z_k = \underset{\mathfrak{z}x}{E}\,\{x \varepsilon P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\}$ est de classe n (dans l'espace $\mathfrak{N} \times \mathfrak{X}$). Or, l'équivalence évidente

$$\{x \varepsilon P_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\} \equiv \sum_{n_1} \dots \sum_{n_k} \{(x \varepsilon P_{n_1 \dots n_k})\,(n_1 = \mathfrak{z}^1) \dots (n_k = \mathfrak{z}^k)\}$$

donne

$$Z_k = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} \left\{\underset{\mathfrak{z}x}{E}\,(x \varepsilon P_{n_1 \dots n_k}) \cdot \underset{\mathfrak{z}x}{E}\,(n_1 = \mathfrak{z}^1) \cdot \dots \cdot \underset{\mathfrak{z}x}{E}\,(n_k = \mathfrak{z}^k)\right\}.$$

Le premier des $k+1$ ensembles entre crochets $\{\ \}$ étant de classe n (comme identique à $\mathfrak{N} \times P_{n_1 \dots n_k}$) et les autres étant fermés (puisque $\mathfrak{z}^1$, $\mathfrak{z}^2$ etc. sont des fonctions continues de $\mathfrak{z}$), on conclut aussitôt de 3 que l'ensemble Z_k est de classe n.

IV. Projections. *Les ensembles projectifs de classe n impaire situés dans l'espace* $\mathfrak{X}$ *coïncident avec les projections des ensembles de classe* $n-1$ *situés dans le produit* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ [1].

En effet, d'une part, les projections des ensembles de classe $n-1$ sont de classe n (d'après 2). D'autre part, tout ensemble P de classe n est une image continue d'un ensemble R de classe $n-1$: $f(R) = P$ où $R \subset \mathfrak{X}$. P est donc une projection de l'ensemble $\underset{xx^*}{E}\,\{x^* = f(x)\}$, qui est, d'après 4, de classe $n-1$ (dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$).

La proposition que nous venons de démontrer reste vraie, *lorsqu'on remplace l'espace* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ *par* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$.

En effet, d'après le théorème 1, p. 224, l'espace $\mathfrak{X}$ est une image continue de $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{X} = f(\mathfrak{N})$. P étant de classe n (paire ou impaire), l'ensemble $P_1 = f^{-1}(P)$ l'est également (selon III, 2). Par conséquent, P est une image continue d'un ensemble de classe n situé dans $\mathfrak{N}$, et celui-ci est—pour n impair—une image continue d'un sous-ensemble de $\mathfrak{N}$ de classe $n-1$. Par conséquent P est la projection sur l'axe $\mathfrak{X}$ d'un ensemble de classe $n-1$ situé dans le produit $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$.

[1]) Cette proposition justifie l'emploi du terme „ensemble projectif".

En particulier, *les ensembles analytiques coïncident avec les projections (sur l'axe* $\mathfrak{X}$*) des ensembles fermés situés dans* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$ [1]).

En effet, d'après le corollaire 3, p. 232, chaque ensemble borelien est une image continue de $\mathfrak{N}$; il en est donc de même de chaque ensemble analytique. Par conséquent, A étant un ensemble analytique, il existe une fonction continue f définie sur $\mathfrak{N}$ et telle que A est la projection sur l'axe $\mathfrak{X}$ de l'ensemble fermé $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\,\{x = f(\mathfrak{z})\}$, situé dans l'espace $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$ (la variable $\mathfrak{z}$ parcourant l'ensemble $\mathfrak{N}$).

Inversement, la projection d'un ensemble fermé est un ensemble analytique (d'après N°III, 2).

V. Fonctions universelles. Conformément à la définition p. 172, XIII, une fonction $L_n(\mathfrak{z})$ qui fait correspondre à chaque nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ un ensemble projectif de classe n (situé dans un espace $\mathfrak{X}$) est dite universelle relativement à la classe $\boldsymbol{L}_n$, lorsque $\boldsymbol{L}_n$ coïncide avec la famille des valeurs de la fonction $L_n(\mathfrak{z})$. Nous allons prouver qu'*à chaque* $n > 0$ *correspond une fonction universelle* $L_n(\mathfrak{z})$ *telle que l'ensemble* $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\,\{x \varepsilon L_n(\mathfrak{z})\}$ *est de classe* n [2]).

Soit, conformément à l'énoncé final de la p. 174, $F(\mathfrak{z})$ une fonction universelle relativement à la famille des sous-ensembles fermés de l'espace $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$ et telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}\mathfrak{z}^*}{E}\,\{(x\mathfrak{z}^*) \varepsilon F(\mathfrak{z})\}$ soit fermé dans l'espace $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}^*$ parcourant $\mathfrak{N}$).

Chaque sous-ensemble analytique de $\mathfrak{X}$ étant une projection d'un ensemble fermé situé dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{N}$, on obtient une fonction $L_1(\mathfrak{z})$ universelle relativement à $\boldsymbol{L}_1 (= \boldsymbol{A})$ lorsqu'on fait correspondre à $\mathfrak{z}$ la projection de $F(\mathfrak{z})$ sur $\mathfrak{X}$. En symboles: $\{x \varepsilon L_1(\mathfrak{z})\} \equiv \equiv \sum\limits_{\mathfrak{z}^*} \{(x\,\mathfrak{z}^*) \varepsilon F(\mathfrak{z})\}$. L'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\,\{x \varepsilon L_1(\mathfrak{z})\} \equiv \underset{x\mathfrak{z}}{E} \sum\limits_{\mathfrak{z}^*} \{(x\,\mathfrak{z}^*) \varepsilon F(\mathfrak{z})\}$ est analytique, comme projection de l'ensemble fermé $\underset{x\mathfrak{z}\mathfrak{z}^*}{E}\{(x\mathfrak{z}^*) \varepsilon F(\mathfrak{z})\}$.

[1]) Cf. la note de M. Szpilrajn et de moi *Sur les cribles fermés et leurs applications*, Fund. Math. 18 (1931), p. 160.

[2]) Cf. N. Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 290.

Procédons par induction. Posons pour n pair $L_n(\mathfrak{z}) = \mathcal{X} - L_{n-1}(\mathfrak{z})$. La fonction $L_n(\mathfrak{z})$ est universelle relativement à $\boldsymbol{L}_n$ et l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\{x \varepsilon L_n(\mathfrak{z})\} = \underset{x\mathfrak{z}}{E}\{x \text{ non-}\varepsilon L_{n-1}(\mathfrak{z})\} = \mathcal{X} \times \mathcal{N} - \underset{x\mathfrak{z}}{E}\{x \varepsilon L_{n-1}(\mathfrak{z})\}$ est de classe n.

Pour $n > 1$ impair, désignons par $L^*_{n-1}(\mathfrak{z})$ une fonction universelle relativement à la famille des ensembles de classe $n-1$ situés dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ et telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}\mathfrak{z}^*}{E}\{(x\mathfrak{z}^*) \varepsilon L^*_{n-1}(\mathfrak{z})\}$ soit de classe $n-1$ (dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$). En raisonnant comme pour $n=1$, on prouve que la fonction $L_n(\mathfrak{z})$, définie par l'équivalence $\{x \varepsilon L_n(\mathfrak{z})\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}^*}\{(x\mathfrak{z}^*) \varepsilon L^*_{n-1}(\mathfrak{z})\}$, est bien la fonction demandée.

VI. Théorème d'existence [1]. *L'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels contient, pour chaque $n > 0$, un ensemble projectif de classe n qui n'est pas de classe $< n$. $\mathcal{N}$ contient aussi des ensembles non projectifs.*

Considérons la fonction universelle $L_n(\mathfrak{z})$ du N° V (en y posant $\mathcal{X} = \mathcal{N}$). L'indice $n \geqslant 1$ étant impair, soient

$$E_n = \underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z} \varepsilon L_n(\mathfrak{z})\} \quad \text{et} \quad E_{n+1} = \mathcal{N} - E_n = \underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z} \text{ non-}\varepsilon L_n(\mathfrak{z})\}.$$

Comme projection de l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\{x \varepsilon L_n(\mathfrak{z})\} \cdot \underset{x\mathfrak{z}}{E}(x = \mathfrak{z})$, qui est de classe n, E_n est aussi de classe n. Donc E_{n+1} est de classe $n+1$.

D'autre part, d'après le théorème de la diagonale (p. 175, XIV), E_{n+1} n'est pas de classe n, ni—à plus forte raison—de classe $< n$ (puisque n est impair). Il en résulte que E_n n'est pas de classe $< n$, car dans le cas contraire E_{n+1} serait de classe $< n+1$.

Imaginons à présent chacun des ensembles E_n placé dans l'intervalle $(n-1, n)$. L'ensemble $E_\infty = E_1 + E_2 + \ldots$ est non projectif.

---

[1]) Ibidem. Voir aussi la note de M. Banach et de moi *Sur la structure des ensembles linéaires*, Studia Math. 4 (1933), p. 95, où il est établi qu'il existe dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{Y}}$ (des fonctions continues) un ensemble *linéaire* de classe $2n$ qui n'est pas de classe inférieure (un ensemble est dit linéaire, s'il contient, avec $f(x)$ et $g(x)$, chaque fonction de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x)$).

Remarque. Le procédé employé dans les NN° V et VI permet de définir *effectivement* (cf. § 18, VIII) les ensembles E_n et E_∞ [1]).

L'existence des ensembles non projectifs peut d'ailleurs être établie (non effectivement) d'une façon plus simple. Notamment, la famille des ensembles boreliens étant de la puissance du continu et la famille de toutes les images continues d'un ensemble étant également de cette puissance (p. 116), on voit aussitôt que, quel que soit n, *la classe $\boldsymbol{L}_n$ est de puissance* $\mathfrak{c}$. Il en est donc de même de la somme $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots$ La famille de tous les sous-ensembles d'un espace complet séparable et indénombrable ayant la puissance $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, l'existence des ensembles non-projectifs en résulte directement.

VII. Invariance. *P étant un ensemble projectif de classe n, chaque ensemble homéomorphe à P* (qu'il soit situé dans le même espace ou dans un autre espace complet séparable) *l'est également.*

Le théorème est évident dans le cas où n est impair, car dans ce cas chaque image continue de P est de classe n. Dans le cas où $n = 0$ (cas des ensembles boreliens) le théorème est vrai d'après p. 217, cor. 1. Si $n > 0$ est pair, la propriété $\boldsymbol{L}_{n-1}$ satisfait aux hypothèses du théorème p. 216; c. à d. qu'elle est un invariant de l'homéomorphie et qu'en outre: 1) chaque $\boldsymbol{G}_\delta$ relatif à un ensemble de classe $n-1$ est de classe $n-1$, 2) la somme d'un ensemble de classe $n-1$ et d'un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et de classe $n-1$. On en conclut que la propriété d'être le complémentaire d'un ensemble de classe $n-1$, c. à d. d'être de classe n, est un invariant intrinsèque [2]).

VIII. Fonctions propositionnelles projectives [3]). Une fonction propositionnelle $\varphi(x)$ est dite *fonction de classe $\boldsymbol{L}_n$*, lorsque l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ est de classe $\boldsymbol{L}_n$. Nous établirons les règles suivantes du „calcul projectif“:

1. *Si $\varphi(x)$ est de classe $\boldsymbol{L}_n$, sa négation $\varphi'(x)$ est de classe $\boldsymbol{CL}_n$.*

Car $\underset{x}{E}\,\varphi'(x) = \left[\underset{x}{E}\,\varphi(x)\right]'$.

---

[1]) Dans le cas de l'espace des nombres réels, la mesurabilité lebesguienne de l'ensemble E_3 ainsi défini semble présenter des grandes difficultés, bien que cet ensemble soit *nommé* explicitement. Voir à ce sujet ma note *Sur le problème de la mesurabilité des ensembles définissables*, Congr. Int. Math. Zürich 1932, vol. II, p. 117.

[2]) Pour l'invariance de la classe $\boldsymbol{CA}$ voir P. Alexandroff, *Sur les ensembles complémentaires aux ensembles* (A), Fund. Math. 5 (1924), pp. 160—165.

[3]) Cf. §§ 1, 2, et 26, IX. Voir sur ce sujet les notes de M. Tarski et de moi dans Fund. Math. 17 (1931), pp. 241—272.

2. *Si $\varphi(x)$ est de classe L_n dans l'espace $\mathcal{X}$, $\varphi(x)$ est de classe L_n dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.*

Car (N° III, 1): $\underset{xy}{E}\,\varphi(x)=\left[\underset{x}{E}\,\varphi(x)\right]\times\mathcal{Y}$.

3. *$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ étant une suite finie ou infinie de fonctions de classe L_n (n fixe[1])), les fonctions $\sum_k \varphi_k(x)$ et $\prod_k \varphi_k(x)$ sont aussi de classe L_n.*

C'est une conséquence directe de l'énoncé N° III, 3.

4. *$\psi(x,y)$ étant de classe L_n (dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$), la fonction propositionnelle $\sum_y \psi(x,y)$ est de classe PL_n et $\prod_y \psi(x,y)$ est de classe $CPCL_n$ (dans $\mathcal{X}$).*

Car l'ensemble $\underset{x}{E}\sum_y \psi(x,y)$ est la projection (cf. p. 10, V, 3) de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$; il est donc de classe PL_n (N° IV). En outre: $\prod_y \psi(x,y)\equiv\left[\sum_y \psi'(x,y)\right]'$.

Les règles précédentes montrent que *les opérations logiques: $'$, $+$, $\cdot$, $\sum_x$, $\prod_x$, effectuées sur des fonctions propositionnelles projectives conduisent toujours à des fonctions propositionnelles projectives.* Rapprochées des règles du § 26, XI, elles permettent, en même temps, d'*évaluer* la classe borelienne ou projective d'une fonction propositionnelle, donc de l'ensemble qu'elle définit.

Remarques. (1) Etant donnée une fonction propositionnelle de deux variables $\psi(x,y)$, on peut se servir pour évaluer la classe de $\sum_y \psi(x,y)$, tantôt de la règle 4, d'après laquelle l'ensemble $\underset{x}{E}\sum_y \psi(x,y)$ est la *projection* de $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$, tantôt de la règle p. 10, 1, d'après laquelle $\underset{x}{E}\sum_y \psi(x,y)$ est la *somme* $\sum_y \underset{x}{E}\,\psi(x,y)$. La deuxième règle — où y est considéré comme *indice* — est plus avantageuse dans le cas où y parcourt un ensemble dénombrable, ainsi que dans le cas particulier où l'ensemble $\underset{x}{E}\,\psi(x,y)$ est ouvert (pour y fixe), puisque la somme d'une famille (de puissance *arbitraire*) d'ensembles ouverts est ouverte.

Des remarques analogues concernent l'opérateur $\prod$[2]).

---

[1]) On pourrait se débarrasser de cette hypothèse, en prolongeant les classes L_n au-delà des indices finis (cf. p. 234, renvoi [2])).

[2]) C'est ainsi, par exemple, que dans le renvoi [3]), p. 209, h est considéré comme indice et non comme point d'un espace.

(2) Dans le cas où $\mathcal{Y}$ est un espace *compact*, la projection parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ d'un ensemble fermé est un ensemble fermé[1]). En conséquence, on tiendra compte dans ce cas de la règle suivante:

5. *Si $\psi(x,y)$ est de classe F (ou de classe F_σ), $\sum_y \psi(x,y)$ l'est également. Si $\psi(x,y)$ est de classe G (ou de classe G_δ), $\prod_y \psi(x,y)$ l'est également.*

IX. Applications[2]). 1) *Accessibilité rectilinéaire.* Le point x est dit rectilinéairement accessible par rapport à M, en symboles $x\in M_a$, lorsqu'il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ un segment rectiligne xy qui n'a avec M que le point x en commun (et qui ne se réduit pas à un seul point). La condition pour que le point z appartienne au segment xy s'exprimant par l'égalité: $|x-z|+|z-y|=|x-y|$, on en conclut que (les variables x,y,z parcourant l'espace $\mathcal{X}$):

$$\{x\in M_a\}\equiv(x\in M)\cdot\sum_y\{(y\neq x)\cdot\prod_z[(|x-z|+|z-y|=|x-y|)\cdot(z\neq x)\to(z\in M)']\}\equiv$$
$$\equiv(x\in M)\cdot\sum_y\{(y\neq x)\cdot\prod_z[(|x-z|+|z-y|\neq|x-y|)+(z=x)+(z\in M)']\}.$$

La fonction propositionnelle $\varphi(x)\equiv\{x\in M_a\}$ s'obtient ainsi à l'aide des opérations logiques effectuées sur les fonctions:

$$\beta(x)\equiv\{x\in M\},\quad \gamma(x,y)\equiv\{x=y\},\quad \delta(x,y,z)\equiv\{|x-z|+|z-y|=|x-y|\}.$$

La deuxième et troisième sont évidemment de classe F. Quant à la première, elle dépend des hypothèses faites sur l'ensemble M. Si M est un F_σ, on voit aussitôt, en appliquant les règles du § 26, XI, que la fonction entre crochets [ ] est de classe G_δ. Si l'espace est compact, l'opération $\prod_z$ effectuée sur cette fonction donne encore une fonction de classe G_δ (selon 5); en multipliant cette dernière par la fonction $(y\neq x)$, qui est de classe G, on n'altère pas sa classe; puis, en appliquant l'opération $\sum_y$, on parvient à une fonction de classe A (règle 4); en la multipliant par la fonction $(x\in M)$, qui est de classe F_σ, on obtient finalement la fonction $\varphi(x)$, qui est donc de classe A.

Autrement dit: *M étant un ensemble F_σ situé dans un espace compact, l'ensemble de ses points rectilinéairement accessibles est analytique*[3]).

---

[1]) Nous reviendrons sur cette proposition — dont la démonstration est d'ailleurs très facile — dans le Chap. IV. Voir aussi ma note de Fund. Math. 17, p. 253.

[2]) On trouvera de nombreuses applications de la méthode exposée tout-à-l'heure dans les notes citées de Fund. Math. 17, dans Fund. Math. 18, p. 148—159, 61—170 (note de M. Szpilrajn et moi), chez M. Saks, Fund. Math. 19, p. 218.

[3]) Théorème de Nikodym-Urysohn. Il importe de remarquer que la classe de l'ensemble M_a ne peut être réduite; il existe notamment (dans

D'une façon générale, M étant un ensemble de classe L_{2n+1} situé dans un espace complet, M_a est de classe L_{2n+3}.

2) *Opérations de Hausdorff* [1]. Etant donnés: une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ et un sous-ensemble B de l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels, on considère l'ensemble H tel que

$$\{x \in H\} \equiv \sum_{\mathfrak{z}} \{(\mathfrak{z} \in B) \cdot \prod_{mn} [(m = \mathfrak{z}^n) \to (x \in A_m)]\}.$$

Si les ensembles A_n et B sont projectifs (de classe bornée), H est projectif. Si ces ensembles sont analytiques, H l'est également.

§ 35. Ensembles analytiques.

I. Généralités. Rappelons d'abord quelques propriétés des ensembles analytiques établies au § 34. Par définition, les ensembles analytiques coïncident avec les images continues des ensembles boreliens (§ 34, I). Chaque ensemble borelien étant une image continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels, on peut définir les ensembles analytiques comme les *images continues de l'ensemble* $\mathcal{N}$ (§ 34, IV).

La propriété d'être un ensemble analytique est *invariante* par rapport aux opérations dénombrables: d'addition, de multiplication et de multiplication cartésienne, par rapport à l'opération $(\mathcal{A})$ et par rapport aux transformations mesurables B (qu'elles transforment l'ensemble considéré en sous-ensemble du même espace ou d'un autre).

D'après le corollaire 1, p. 229, chaque ensemble analytique indénombrable contient un ensemble parfait [2]. Les ensembles analytiques „réalisent" donc l'hypothèse du continu: leur puissance est soit finie, soit $\aleph_0$, soit $\mathfrak{c}$.

le plan euclidien) un ensemble fermé M pour lequel l'ensemble M_a est non borelien. Voir: O. Nikodym, Fund. Math. 7 (1925), p. 250 et 11 (1928), ainsi que Ann. Soc. Pol. Math. 7 (1929), p. 79, P. Urysohn, Proc. Acad. Amsterdam 28 (1925), p. 984 et N. Lusin, Fund. Math. 12 (1928), p. 158.

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 87 et A. Kolmogoroff, *Opérations sur des ensembles*, Rec. Math. Moscou 25, p. 418. Voir aussi L. Kantorovitch et E. Livensohn, *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets (I)*, Fund. Math. 18 (1932), p. 214, où l'on trouve de nombreux renvois bibliographiques.

[2]) Voir M. Souslin, C. R. Paris t. 164 (1917). Un théorème plus général (en raison du N° II) est celui de M. Hurewicz: chaque ensemble qui s'obtient des ensembles fermés à l'aide de l'opération $(\mathcal{A})$ contient un ensemble parfait, pourvu que l'espace soit séparable (complet ou non). Voir *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)*, Fund. Math. 12 (1928), p. 78—109.

Nous allons établir à présent le théorème suivant:

A étant un ensemble analytique indénombrable, chaque ensemble analytique A^* s'en obtient par une transformation de I-re classe [1].

Il suffit évidemment de démontrer qu'il en est ainsi pour $A^* = \mathcal{N}$.

Or, comme ensemble analytique et indénombrable, A contient un ensemble homéomorphe à $\mathcal{C}$, donc un ensemble N homéomorphe à $\mathcal{N}$. Posons $f(x) = x$ pour $x \in N$. L'ensemble N étant un G_δ dans l'espace $\mathcal{X}$ (qui contient A, cf. p. 215, III), donc un espace topologiquement complet, il existe une fonction $f^*(x)$ de I-re classe définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier, dont les valeurs appartiennent à N et qui coïncide sur N avec $f(x)$ (p. 221, corollaire). Par conséquent $f^*(A) = N$, c. q. f. d.

Dans le même ordre d'idées citons les théorèmes suivants:

1. *Etant donnés deux ensembles analytiques indénombrables de dimension 0, un de ces ensembles est une image continue de l'autre* [2].

2. *Chaque ensemble analytique est une image biunivoque et continue d'un ensemble* **CA** [3].

Plus précisément, $x = f(\mathfrak{z})$ *étant une fonction continue, définie sur un sous-ensemble fermé F de $\mathcal{N}$, l'ensemble F contient un complémentaire analytique C tel que $f(C) = f(F)$ et que la fonction partielle $f(\mathfrak{z} \mid C)$ est biunivoque* [4].

Afin d'établir ce dernier énoncé, rangeons d'abord les nombres irrationnels $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ dans l'ordre „lexicographique"; en symboles:

$$[\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}] \equiv (\mathfrak{z}^1 \leqslant \mathfrak{y}^1) \cdot \prod_k \Big[(\mathfrak{z}^k \leqslant \mathfrak{y}^k) + \sum_{i<k} (\mathfrak{z}^i < \mathfrak{y}^i)\Big]. \tag{1}$$

On voit aussitôt que la fonction propositionnelle $[\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}]$ est de classe F. En outre, il existe dans chaque ensemble fermé $X (\neq 0)$ le *premier* élément. C'est notamment le point $\mathfrak{p}(X) = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots$ où X_1 désigne l'ensemble des $\mathfrak{z} \in X$ pour lesquels $\mathfrak{z}^1$ admet la valeur minima et où X_n, avec $n > 1$, est l'ensemble des $\mathfrak{z} \in X_{n-1}$ pour lesquels $\mathfrak{z}^n$ admet la valeur minima. En vertu du th. de Cantor (p. 205) le produit des ensembles X_n se réduit à un seul point.

[1]) W. Sierpiński, *Sur les images de Baire des ensembles linéaires*, Fund. Math. 15 (1930) p. 195.

[2]) Pour la démonstration voir W. Sierpiński, *Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes*, Fund. Math. 14 (1929), p. 345.

[3]) S. Mazurkiewicz, *Sur une propriété des ensembles $C(A)$*, Fund. Math. 10 (1927), p. 172.

[4]) Pour une généralisation de cet énoncé voir N° V, 5 (p. 254).

Ceci établi, soit C l'ensemble des points $\mathfrak{p}[f^{-1}(x)]$ où x parcourt l'ensemble $f(F)$; en symboles:

$$(2) \qquad [\mathfrak{z} \varepsilon C] \equiv [\mathfrak{z} \varepsilon F] \cdot \prod_{\mathfrak{y}} \{[f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{y})] \rightarrow [\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}]\}.$$

L'ensemble C est un CA, car la fonction propositionnelle entre crochets $\{\ \}$ est borelienne. En outre, la fonction partielle $f(\mathfrak{z} \mid C)$ est biunivoque, car les conditions $\mathfrak{z} \varepsilon C$, $\mathfrak{y} \varepsilon C$ et $f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{y})$ entraînent $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y} \prec \mathfrak{z}$ d'où $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$. On a enfin $f(C) = f(F)$, car $\mathfrak{p}[f^{-1}(x)]$ peut être substitué à $\mathfrak{z}$ dans le membre gauche de l'équivalence (2).

II. Opération $(\mathcal{A})$. Désignons par $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\mathfrak{z} = \frac{1|}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^2} + \dots$ tels que: $\mathfrak{z}^1 = n_1, \dots, \mathfrak{z}^k = n_k$. Cet ensemble est fermé et ouvert. On vérifie facilement les propositions suivantes:

$$(1) \qquad \mathcal{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \qquad\qquad \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k n}$$

$$(2) \qquad \textit{on a} \quad \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k} \cdot \mathcal{N}_{m_1 \dots m_k} = 0 \quad \textit{pour} \quad (n_1 \dots n_k) \neq (m_1 \dots m_k)$$

$$(3) \qquad \mathfrak{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$$

$$(4) \qquad \mathcal{N} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}.$$

La formule (4) montre que l'ensemble $\mathcal{N}$ est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur le système des ensembles $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$.

$$(5) \qquad \lim_{k=\infty} \delta(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = 0.$$

(6) $f(\mathfrak{z})$ *étant une fonction continue définie sur* $\mathcal{N}$, *on a*

$$f(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}.$$

Car $f(\mathfrak{z}) = f\left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\right) \subset \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) \subset \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}$ selon (3) et l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}$ se réduit à un seul point, puisque la continuité de la fonction f implique en vertu de (5) que $\lim_{k=\infty} \delta[f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})] = 0$, d'où $\lim_{k=\infty} \delta[\overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}] = 0$ et $\delta\left(\prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}\right) = 0$.

Théorème. Pour qu'un ensemble soit analytique, il faut et il suffit qu'il soit le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ *effectuée sur un système régulier d'ensembles fermés.*

En effet, A étant analytique, il existe une fonction continue $f(\mathfrak{z})$ telle que $A = f(\mathcal{N})$. L'ensemble A est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur les ensembles $\overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}$, car on a d'après (6):

$$A = f(\mathcal{N}) = \sum_{\mathfrak{z}} f(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}.$$

Inversement l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur des ensembles fermés (même sur des ensembles analytiques) conduit toujours à des ensembles analytiques (p. 240, 6).

Corollaire. Les ensembles analytiques jouissent de la propriété de Baire au sens restreint [1].

Car chaque ensemble fermé jouit de cette propriété et elle est un invariant de l'opération $(\mathcal{A})$ (selon p. 58, corollaire).

Pour la même raison *les ensembles analytiques sont mesurables au sens de Lebesgue* (dans le cas de l'espace des nombres réels, complexes etc).

La propriété de Baire, ainsi que la mesurabilité, appartenant au complémentaire de tout ensemble qui la possède, il en résulte que les ensembles ***CA*** en jouissent également. Il en est encore de même des ensembles qui s'obtiennent à l'aide de la soustraction et de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuées à partir des ensembles fermés [2].

III. Premier théorème de séparation. *A et B étant deux ensembles analytiques disjoints, il existe un ensemble borelien E tel que*

$$A \subset E \quad \textit{et} \quad E \cdot B = 0$$

---

[1]) Ainsi l'ensemble E_1, p. 242, VI, qui est analytique et non borelien, répond au problème de M. Lebesgue (Journ. de Math. 1905, p. 188) sur l'existence des ensembles non boreliens à propriété de Baire au sens restreint. Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur un ensemble non mesurable B*, Journ. de Math. 1923, p. 53.

[2]) L'étude des ensembles de ce genre, qui présentent une généralisation très naturelle des ensembles A et CA, a été proposée par M. Lusin (voir Fund. Math. 5, 1924, p. 165, renvoi [3])). Cf. O. Nikodym, Fund. Math. 14 (1929), p. 145.

(tout couple d'ensembles A, B satisfaisant à la thèse du théorème est dit *séparable* B) [1]).

Lemme [2]). *Les ensembles* $P=P_1+P_2+\ldots$ *et* $Q=Q_1+Q_2+\ldots$ *étant non séparables* B, *il existe un couple* P_n, Q_m *non séparable* B.

Supposons, en effet, que Z_{nm} soit un ensemble borelien tel que $P_n \subset Z_{nm} \subset Q'_m \,(=\mathfrak{X}-Q_m)$. Il vient

$$P_n \subset \prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset \prod_{m=1}^{\infty} Q'_m = \left(\sum_{m=1}^{\infty} Q_m\right)' = Q',$$

donc

$$P=\sum_{n=1}^{\infty} P_n \subset \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset Q',$$

ce qui prouve que l'ensemble borelien $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm}$ sépare les ensembles P et Q.

Le lemme établi, supposons par impossible que les ensembles analytiques disjoints A et B ne soient pas séparables B. Soient f et g deux fonctions continues qui transforment $\mathfrak{N}$ en A et en B: $A=f(\mathfrak{N})$, $B=g(\mathfrak{N})$. Il vient (N° II, 1): $A=f(\mathfrak{N}_1)+f(\mathfrak{N}_2)+\ldots$ et $B=g(\mathfrak{N}_1)+g(\mathfrak{N}_2)+\ldots$ Il existe donc, d'après le lemme précédent, deux ensembles $f(\mathfrak{N}_{n_1})$ et $g(\mathfrak{N}_{m_1})$ non séparables B. Comme on a, en outre, selon N° II (1): $f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})=\sum_{n=1}^{\infty} f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k n})$ et $g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})=\sum_{m=1}^{\infty} g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k m})$, on en déduit par induction l'existence de deux suites infinies: $n_1, n_2, \ldots$ et $m_1, m_2, \ldots$ telles que les ensembles $f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})$ et $g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})$ sont non séparables B, quel que soit k.

$$\text{Posons } \mathfrak{z}=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\ldots \quad \text{et} \quad \mathfrak{y}=\frac{1|}{|m_1}+\frac{1|}{|m_2}+\ldots$$

1) Théorème de M. Lusin, *Sur les ensembles analytiques*, Fund. Math. 10 (1927), p. 52. Il importe de remarquer qu'un théorème analogue pour les ensembles ***CA*** serait en défaut. Voir un simple exemple de M. Sierpiński, *Sur deux complémentaires analytiques non séparables B*, Fund. Math. 17 (1931), p. 298, de même que N. Lusin, *Ensembles analytiques*, pp. 220, 260, 263 et P. Novikoff, Fund. Math. 17, p. 25.

2) Sierpiński, *Zarys teorji mnogości II*, p. 180.

Comme $f(\mathfrak{z})\,\varepsilon\, A$, $g(\mathfrak{y})\,\varepsilon\, B$ et $AB=0$, il vient $|f(\mathfrak{z})-g(\mathfrak{y})|>0$. Les fonctions f et g étant continues, on a (N° II, 5) pour k suffisamment grand: $\delta\,[f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})]+\delta\,[g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})]<|f(\mathfrak{z})-g(\mathfrak{y})|$ et comme (N° II, 3): $f(\mathfrak{z})\,\varepsilon\, f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})$ et $g(\mathfrak{y})\,\varepsilon\, g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})$, il vient: $\overline{f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})}\cdot \overline{g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})}=0$.

Cette dernière formule montre, en raison de l'inclusion $f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})\subset\overline{f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})}$, que les ensembles $f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})$ et $g(\mathfrak{N}_{m_1\ldots m_k})$ sont séparables B, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 1 [1]). *Si les ensembles A et $\mathfrak{X}-A$ sont analytiques, A est borelien.*

Car, en posant dans le théorème précédent $B=\mathfrak{X}-A$, il vient $E=A$.

Le corollaire 1 implique que *la famille des ensembles qui sont simultanément **A** et **CA** coïncide avec celle des ensembles boreliens.*

Corollaire 2 (séparation simultanée). Etant donnée une suite d'ensembles analytiques disjoints $A_1, A_2, \ldots$, il existe une suite d'ensembles boreliens disjoints $B_1, B_2, \ldots$ tels que $A_n\subset B_n$.

D'après le théorème, il existe, en effet, un système d'ensembles boreliens E_{nm} tels que $A_n\subset E_{nm}$ et $E_{nm}\cdot A_m=0$ (pour $n\neq m$).

Posons: $B_1=\prod_{m=2}^{\infty} E_{1m}$ et $B_n=\prod_{m\neq n} E_{nm}-(B_1+\ldots+B_{n-1})$. L'inclusion $B_m\subset E_{mn}$ entraîne $A_n\cdot B_m\subset A_n\cdot E_{mn}=0$ pour $m<n$. Donc $A_n\subset B_n$.

IV. Applications aux ensembles boreliens.

Théorème [2]). *Toute image biunivoque et continue d'un ensemble borelien est un ensemble borelien.*

Chaque ensemble borelien étant composé d'un ensemble dénombrable et d'une image biunivoque et continue de l'ensemble $\mathfrak{N}$ (p. 232, cor. 2), il suffit de démontrer que f étant une fonction biunivoque et continue, définie sur $\mathfrak{N}$, l'ensemble $f(\mathfrak{N})$ est borelien.

La fonction f étant biunivoque, on conclut de N° II (2) que, pour k fixe, les ensembles du système $\{f(\mathfrak{N}_{n_1\ldots n_k})\}$ sont disjoints.

1) M. Souslin, l. cit.

2) M. Souslin, l. cit. Pour des généralisations de ce théorème voir N° V et N° VIII.

D'après le cor. 2 du N° III, il existe pour chaque k un système d'ensembles boreliens disjoints $B_{n_1 \dots n_k}$ tels que $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset B_{n_1 \dots n_k}$.

Posons $B^*_{n_1} = B_{n_1} \cdot \overline{f(\mathcal{N}_{n_1})}$ et, d'une façon générale,

$$B^*_{n_1 \dots n_k} = B_{n_1 \dots n_k} \cdot \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})} \cdot B^*_{n_1 \dots n_{k-1}}.$$

On a l'inclusion

$$(1) \qquad f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset B^*_{n_1 \dots n_k} \subset \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}.$$

En effet, cette formule étant évidente pour $k = 1$, admettons la pour $k-1$; selon N° II (1): $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_{k-1}}) \subset B^*_{n_1 \dots n_{k-1}}$, d'où la formule (1).

La formule (1) implique en vertu de N° II (6) que

$$\prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = \prod_{k=1}^{\infty} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})}, \quad \text{d'où} \quad f(\mathcal{N}) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k},$$

car $f(\mathcal{N}) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})$ selon N° II (6).

En outre, le système $\{B^*_{n_1 \dots n_k}\}$ étant régulier (c. à d. que $B^*_{n_1 \dots n_k} \subset B^*_{n_1 \dots n_{k-1}}$) et composé, pour k fixe, d'ensembles disjoints, il vient (p. 6, 5): $\sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$.

La sommation $\sum_{\mathfrak{z}} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ étant étendue (pour k fixe) sur un système dénombrable d'ensembles boreliens, l'ensemble $\sum_{\mathfrak{z}} B^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ est borelien. L'ensemble $f(\mathcal{N})$ l'est donc également, c. q. f. d.

En rapprochant le théorème précédent du corollaire 1, p. 231, on voit que *les sous-ensembles boreliens des espaces complets séparables coïncident avec les images biunivoques et continues des espaces complets séparables* 0*-dimensionnels.*

Remarque. B étant un ensemble borelien et g une transformation biunivoque et continue, l'espace $\mathcal{Y}$ qui contient $g(B)$ peut être supposé métrique arbitraire *(complet séparable ou non)*. En effet, comme image continue d'un ensemble séparable, $g(B)$ est séparable. Complétons l'ensemble $\overline{g(B)}$, qui est aussi séparable, à un espace $\widetilde{\overline{g(B)}}$ (voir p. 200, VII). D'après le théorème qui vient d'être démontré, $g(B)$ est borelien dans $\widetilde{\overline{g(B)}}$, donc dans $\overline{g(B)}$, c. à d. que $g(B)$ est la partie commune de $\overline{g(B)}$ et d'un ensemble borelien dans $\mathcal{Y}$. L'ensemble $g(B)$ est donc borelien dans $\mathcal{Y}$.

D'autre part, les hypothèses que l'espace $\mathcal{X}$ (contenant B) est *complet* et *séparable* sont essentielles. Admettons, en effet, que $B =$ un ensemble non borelien situé dans l'intervalle $\mathcal{J} = \mathcal{Y}$ et 1° que $\mathcal{X} = B$ (cas où $\mathcal{X}$ est non complet) 2° que $\mathcal{X}$ se compose de points de l'intervalle $\mathcal{J}$, la distance entre chaque couple de points étant définie comme égale à l'unité (cas où $\mathcal{X}$ est non séparable). Dans les deux cas l'ensemble B (borelien dans $\mathcal{X}$) se transforme par l'identité en un ensemble non borelien (dans $\mathcal{Y}$).

V. Applications aux fonctions mesurables B.

1. *$y = f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble borelien E, biunivoque et mesurable B, l'ensemble $f(E)$ est borelien.*

En effet, la fonction f étant biunivoque, on transforme l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ en $f(E)$ d'une façon biunivoque et continue, en le projetant sur l'axe $\mathcal{Y}$. L'ensemble I étant borelien selon p. 239, 4, $f(E)$ l'est également en vertu du théor. N° IV.

2. *Chaque fonction $y = f(x)$ définie sur un ensemble analytique A et telle que l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ est analytique, est mesurable B.* Par conséquent (p. 239, 4) *si A est borelien, l'hypothèse que l'ensemble I est analytique implique qu'il est borelien.*

Il s'agit de prouver que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est borelien dans A, quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathcal{Y}$. Or, comme projection de l'ensemble analytique $I \cdot (\mathcal{X} \times F)$, $f^{-1}(F)$ est analytique. Pour la même raison l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{Y} - F) = A - f^{-1}(F)$ est analytique. D'après le théorème de séparation (N° III), il existe un ensemble borelien E tel que $f^{-1}(F) \subset E$ et $EA - f^{-1}(F) = 0$, d'où $f^{-1}(F) = EA$. Ceci prouve que $f^{-1}(F)$ est borelien dans A.

3. *$y = f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble analytique A, biunivoque et mesurable B, la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est mesurable B sur l'ensemble $f(A)$*[1].

---

[1] Ce théorème remonte (pour le cas où A est un intervalle) à M. Lebesgue (Journ. de Math. 1905, op. cit.). L'analyse de la démonstration de M. Lebesgue, qui n'était pas exacte, a suggéré à Souslin l'introduction des ensembles analytiques. La démonstration correcte est due à MM. Lusin et Souslin.

C'est une conséquence de l'énoncé précédent (en y remplaçant x par y, y par x et A par $f(A)$), en raison de l'identité $\underset{xy}{E}\{x=f^{-1}(y)\}=\underset{xy}{E}\{y=f(x)\}=I$ et du fait que les ensembles I et $f(A)$ sont analytiques (p. 239, 4 et 5).

4. *$y=f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble borelien E, biunivoque et mesurable B, si P est un sous-ensemble projectif de E de classe L_n $(n\geqslant 0)$, l'ensemble $f(P)$ est aussi de classe L_n.*

Car, la fonction $x=f^{-1}(y)$ étant selon 3 et 1 mesurable B sur $f(E)$, l'ensemble $f(P)=(f^{-1})^{-1}(P)$ est de classe L_n selon p. 239, III, 5.

5. *$y=f(x)$ étant une fonction continue sur un ensemble borelien E, il existe un sous-ensemble C de E de classe CA tel que $f(C)=f(E)$ et que la fonction partielle $f(x|C)$ est biunivoque.*

Comme ensemble borelien, E est une image biunivoque et continue d'un ensemble fermé $F\subset\mathcal{N}$ (voir p. 231, cor. 1): $E=g(F)$. Posons $h(\mathfrak{z})=fg(\mathfrak{z})$ où $\mathfrak{z}\in F$. Selon p. 247, 2, F contient un ensemble H de classe CA tel que $h(H)=h(F)$ et que la fonction $h(\mathfrak{z}|H)$ est biunivoque. La fonction $g(\mathfrak{z})$ étant biunivoque et continue, l'ensemble $C=g(H)$ est un CA d'après 4. En outre, $f(C)=fg(H)=$ $=h(H)=h(F)=fg(F)=f(E)$. Enfin, si $x\neq x'$, $x\in C$ et $x'\in C$, il vient $x=g(\mathfrak{z})$, $x'=g(\mathfrak{z}')$, $\mathfrak{z}\neq\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}\in H$ et $\mathfrak{z}'\in H$. L'inégalité $\mathfrak{z}\neq\mathfrak{z}'$ entraîne $f(x)=h(\mathfrak{z})\neq h(\mathfrak{z}')=f(x')$, de sorte que la fonction $f(x|C)$ est biunivoque.

Remarques. 1. Pour chaque α il existe une fonction f continue, biunivoque et telle que la fonction inverse f^{-1} *n'est pas de classe* α (voir p. 231, remarque) [1].

2. L'hypothèse que l'espace $\mathcal{X}$ (de la proposition 3) est *complet séparable* est essentielle. Soient, en effet, Z un ensemble non borelien situé dans l'intervalle $\mathcal{J}=0,1$, Z^* son complémentaire placé dans l'intervalle 1,2, $\mathcal{X}=Z+Z^*$, $\mathcal{Y}=\mathcal{J}$, $f(x)=x$ pour $x\in Z$ et $f(x)=x-1$ pour $x\in Z^*$. La fonction f^{-1} est non mesurable B (elle est même dépourvue de la propriété de Baire, si Z en est dépourvu).

La séparabilité est essentielle d'après l'exemple 2° du N° IV (remarque).

3. Il serait intéressant, d'autre part, de reconnaître, si l'on peut omettre dans l'énoncé 1 l'hypothèse de la séparabilité de *l'espace* $\mathcal{Y}$ (cf. la remarque du N° IV). Cette question est liée au problème de l'invariance de la séparabilité par rapport aux transformations mesurables B. La réponse est affirmative si l'on admet l'hypothèse du continu. En effet, dans chaque espace métrique $\mathcal{Y}$ il existe une suite $F_1, F_2, \dots$ d'ensembles fermés, isolés et tels que $\rho(y, F_n)<1/n$, quel que soit y (p. 91, remarque 1). Si $\mathcal{Y}$ est non séparable, un des ensembles F_n est indénombrable. En entourant chaque point de cet ensemble d'un ensemble ouvert de diamètre suffisamment petit, on obtient une famille indénombrable d'ensembles ouverts disjoints. La famille des sommes de ces ensembles ouverts est donc de puissance $\geqslant 2^{\aleph_1}>\mathfrak{c}$ (en vertu de l'hypothèse du continu). Si l'on suppose que $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ et que f est mesurable B, les ensembles $f^{-1}(G)$ sont boreliens pour G ouvert. Mais alors l'espace $\mathcal{X}$ contient une famille de puissance $>\mathfrak{c}$ d'ensembles boreliens, ce qui implique qu'il est non séparable (p. 162, III).

4. *Application aux groupes métriques.* Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces complets qui constituent des groupes topologiques (cf. p. 75, XII). Soit $f(x)$ une fonction additive (c. à d. que $f(x+x')=f(x)+f(x')$) qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. On prouve que, si la fonction f jouit de la propriété de Baire (en particulier, si elle est mesurable B), elle est continue [1]. Il en résulte que *si les groupes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont complets séparables, toute fonction f additive, continue, biunivoque et telle que $f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}$ est bicontinue* [2]. Car $y=f(x)$ étant une fonction additive, la fonction inverse $x=f^{-1}(y)$ l'est également; comme la fonction f^{-1} est, en outre, mesurable B selon 3, elle est continue.

VI. L'opération $(\mathcal{A})$ et les nombres rationnels. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fractions binaires finies $0<r<1$:

$$r=\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_2}}+\dots+\frac{1}{2^{m_k}}\quad\text{où}\quad 1\leqslant m_1<m_2<\dots<m_k.$$

La fonction $I(r)=[m_1, m_2-m_1, \dots, m_k-m_{k-1}]$ établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathcal{R}$ et la famille de tous les systèmes finis d'entiers positifs; au système $n_1, \dots, n_k$ correspond en effet le nombre $r=\dfrac{1}{2^{n_1}}+\dfrac{1}{2^{n_1+n_2}}+\dots+\dfrac{1}{2^{n_1+\dots+n_k}}$.

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 3 (1922), p. 26.

[1]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, cette collection t. I, p. 23.

[2]) S. Banach, *Über metrische Gruppen*, Studia Math. 3 (1931), p. 111. Pour les nombreuses applications de ce théorème à l'Analyse (en particulier aux équations différentielles), on consultera le livre précité de M. Banach, chap. III. Cf. du même auteur, *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Studia Math. 1 (1929), p. 238 et J. Schauder, *Ueber die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), p. 1.

Lemme [1]). *A étant le résultat de l'opération* ($\mathcal{A}$) *effectuée sur un système régulier* $\{Z_{n_1 \dots n_k}\}$, *la formule* $x \varepsilon A$ *équivaut à l'existence d'une suite infinie de nombres rationnels* $\{r_k\}$ *tels que*

(1) $$r_1 < r_2 < \dots \quad \textit{et} \quad x \varepsilon Z_{I(r_1)} \cdot Z_{I(r_2)} \cdot \dots$$

En effet, si $x \varepsilon A$, il existe une suite infinie $n_1, n_2, \dots$ telle que $x \varepsilon Z_{n_1} \cdot Z_{n_1 n_2} \cdot \dots$ Les nombres $r_k = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_1+\dots+n_k}}$ satisfont donc à (1).

Admettons inversement que la formule (1) soit remplie. Posons $\lim\limits_{k=\infty} r_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_k}}$ où $1 \leqslant m_1 < m_2 < \dots$ Soient $n_1 = m_1$ et $n_k = m_k - m_{k-1}$ pour $k > 1$. Il existe un r_{j_k} tel que $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{m_i}} < r_{j_k} < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_i}}$. Dans le développement de $r_{j_k} = \frac{1}{2^{l_1}} + \dots + \frac{1}{2^{l_s}}$ où $1 \leqslant l_1 < \dots < l_s$, on a donc $l_1 = m_1, \dots, l_k = m_k$. Il en résulte que les k premiers termes du système $I(r_{j_k})$ coïncident respectivement avec les nombres $n_1, \dots, n_k$. Le système d'ensembles $\{Z_{n_1 \dots n_k}\}$ étant régulier, on a l'inclusion $Z_{I(r_{j_k})} \subset Z_{n_1 \dots n_k}$, d'où $x \varepsilon Z_{n_1 \dots n_k}$, quel que soit k. Donc $x \varepsilon A$.

Théorème. A étant un ensemble analytique, il existe une famille d'ensembles fermés W_r, *où* $r \varepsilon \mathcal{R}$, *telle que la formule* $x \varepsilon A$ *équivaut à l'existence d'une suite infinie de nombres rationnels qui satisfont aux conditions* $r_1 < r_2 < \dots$ *et* $x \varepsilon W_{r_1} \cdot W_{r_2} \cdot \dots$

En effet, A étant le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur un système régulier d'ensembles fermés $Z_{n_1 \dots n_k}$ (N° II), on pose $W_r = Z_{I(r)}$.

[1]) Ce lemme appartient à la Théorie générale des ensembles. Dans le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{E}$, on imagine l'ensemble $Z_{I(r)}$ placé sur la droite $y = r$; le point x_0 appartient alors à A, si l'intersection de l'ensemble-somme des $Z_{I(r)}$ où $r \varepsilon \mathcal{R}$ avec la droite $x = x_0$ contient une suite infinie de nombres croissants. Voir N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de math. II (1923), p. 65—68. Cf. W. Sierpiński, *Le crible de M. Lusin et l'opération* ($\mathcal{A}$) *dans les espaces abstraits*, Fund. Math. 11 (1928), p. 16, N. Lusin, Fund. Math. 10 (1927), p. 20 et E. Sélivanowski, C. R. Paris t. 184 (1927), p. 1311.

Le *théorème inverse* est aussi vrai; plus encore: si les ensembles W_r sont analytiques, l'ensemble A des x pour lesquels il existe une suite de nombres rationnels $r_1 < r_2 < \dots$ tels que $x \varepsilon W_{r_1} \cdot W_{r_2} \cdot \dots$ est analytique. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à mettre en termes logiques la définition de A:

$$\{x \varepsilon A\} \equiv \sum_{\xi} \prod_{n} \sum_{r} (x \varepsilon W_r)(r = \xi^n)(\xi^n < \xi^{n+1}) \quad \text{où } \xi \varepsilon \mathcal{J}^{\aleph_0} \text{ et } r \varepsilon \mathcal{R}.$$

VII. Deuxième théorème de séparation [1]). *A et B étant deux ensembles analytiques, il existe deux ensembles* **CA**: *D et H tels que*

(1) $$A - B \subset D, \quad B - A \subset H, \quad DH = 0.$$

Les ensembles W_r ayant le même sens que dans le théorème du N° VI, ordonnons l'ensemble $M_x = \underset{r}{E}(x \varepsilon W_r)$ selon la relation $r > s$. On a donc l'équivalence suivante:

$$\{x \varepsilon A\} \equiv \{\text{l'ensemble } M_x = \underset{r}{E}(x \varepsilon W_r) \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

D'une façon analogue, il existe une famille d'ensembles fermés Z_r, $r \varepsilon \mathcal{R}$, telle que l'on a:

$$\{x \varepsilon B\} \equiv \{\text{l'ensemble } N_x = \underset{r}{E}(x \varepsilon Z_r) \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

Posons $M_x \prec N_x$, lorsque l'ensemble M_x est semblable à une partie de N_x. Soient:

$$D = B' \cdot \left[\underset{x}{E}(M_x \prec N_x)\right]' \quad \text{et} \quad H = A' \cdot \left[\underset{x}{E}(N_x \prec M_x)\right]'$$

(X' désignant, comme toujours, le complémentaire de X).

La formule (1) est vérifiée. En effet, si $x \varepsilon A - B$, M_x n'est pas un ensemble bien ordonné, tandis que N_x en est un; on ne peut donc avoir $M_x \prec N_x$. Par conséquent, $x \varepsilon \left[\underset{x}{E}(M_x \prec N_x)\right]'$ et comme $x \varepsilon B'$, il vient $x \varepsilon D$. Donc $A - B \subset D$ et par raison de symétrie $B - A \subset H$.

D'autre part, si $x \varepsilon B' \cdot A'$, les deux ensembles M_x et N_x sont bien ordonnés. Ils sont donc comparables, c. à d. que l'on a soit $M_x \prec N_x$, soit $N_x \prec M_x$. Par conséquent on ne peut avoir $x \varepsilon \left[\underset{x}{E}(M_x \prec N_x)\right]' \cdot \left[\underset{x}{E}(N_x \prec M_x)\right]'$. Il en résulte que $DH = 0$.

[1]) Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 210 („deuxième principe").

Pour prouver que D et H sont des ensembles ***CA***, il suffit de démontrer que l'ensemble $\mathop{E}_{x}(M_x \prec N_x)$ est analytique. Or, M et N étant deux sous-ensembles de $\mathcal{R}$, la condition $M \prec N$ équivaut évidemment à l'existence des deux suites de nombres réels (dans l'intervalle $\mathcal{J} = 01$) $\xi = [\xi^1, \xi^2, ...]$ et $\eta = [\eta^1, \eta^2, ...]$ telles que 1°: la suite $\xi^1, \xi^2, ...$ contient tous les éléments de l'ensemble M, 2°: la suite $\eta^1, \eta^2, ...$ est entièrement contenue dans N, 3°: l'inégalité $\xi^i > \xi^j$ entraîne $\eta^i > \eta^j$ pour chaque couple d'indices i, j. En symboles logiques:

$$\{M \prec N\} \equiv \sum_{\xi\eta} \Big\{ \prod_r [(r \in M) \to \sum_n (r = \xi^n)] \cdot \prod_k [\eta^k \in N] \cdot$$

$$\cdot \prod_{ij} [(\xi^i > \xi^j) \to (\eta^i > \eta^j)] \Big\}.$$

Substituons M_x à M et N_x à N et remarquons que (par définition de M et de N) on a les équivalences:

$$(r \in M_x) \equiv (x \in W_r) \quad \text{et} \quad [\eta^k \in N_x] \equiv [x \in Z_{\eta^k}] \equiv \sum_r [(r = \eta^k)\,(x \in Z_r)].$$

En remplaçant (§ 1, I): $(\alpha \to \beta)$ par $(\alpha' + \beta)$, il vient en définitive:

$$\{M_x \prec N_x\} \equiv \sum_{\xi\eta} \Big\{ \prod_r [(x \in W_r') + \sum_n (r = \xi^n)] \cdot \prod_k \sum_r [(r = \eta^k)\,(x \in Z_r)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{ij} [(\xi^i \leqslant \xi^j) + (\eta^i > \eta^j)] \Big\}.$$

Les ensembles $\mathop{E}_{\xi}(r = \xi^n)$, $\mathop{E}_{\eta}(r = \eta^k)$, $\mathop{E}_{x}(x \in Z_r)$ et $\mathop{E}_{\xi}(\xi^i \leqslant \xi^j)$ étant fermés (puisque Z_r est fermé et la fonction ξ^n est une fonction continue de l'argument ξ), les ensembles $\mathop{E}_{x}(x \in W_r')$ et $\mathop{E}_{\eta}(\eta^i > \eta^j)$ étant ouverts et les opérations $\prod_r, \sum_n, \prod_k, \sum_r$ et $\prod_{ij}$ étant dénombrables, l'ensemble Q des points (x, ξ, η) qui satisfont à la condition entre crochets { } est un ensemble borelien (un $F_{\sigma\delta}$) dans l'espace complet $\mathcal{X} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ (voir § 26, XI). Comme projection de Q, l'ensemble $\mathop{E}_{x}\{M_x \prec N_x\}$ est donc analytique.

*Corollaire 1 (séparation simultanée). Etant donnée une suite d'ensembles analytiques $A_1, A_2, ...$, il existe une suite d'ensembles **CA** disjoints $C_1, C_2, ...$ tels que*

$$A_n - (A_1 + ... + A_{n-1} + A_{n+1} + ...) \subset C_n.$$

Soit, en effet, conformément au théorème précédent:

$$A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset D_n, \quad \sum_{k \neq n} A_k - A_n \subset H_n, \quad D_n \cdot H_n = 0.$$

Posons: $C_n = D_n \cdot \prod_{k \neq n} H_k$. Les ensembles C_n sont donc des ensembles ***CA*** disjoints. En outre:

$$A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset A_n - A_k \subset \sum_{n \neq k} A_n - A_k \subset H_k,$$

quel que soit $k \neq n$. Donc $A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset \prod_{k \neq n} H_k$, d'où l'inclusion demandée.

*Corollaire 2. Etant donné un système d'ensembles analytiques $A_{n_1 ... n_k}$ tels que $A_{n_1 ... n_k} = A_{n_1 ... n_k 1} + A_{n_1 ... n_k 2} + ...$, il existe un système régulier $\{C_{n_1 ... n_k}\}$ d'ensembles **CA**, disjoints pour k fixe et tels que*

$$\text{(i)} \qquad A_{n_1 ... n_k} - \sum{}' A_{m_1 ... m_k} \subset C_{n_1 ... n_k},$$

la sommation $\sum'$ s'étendant aux systèmes $(m_1 ... m_k) \neq (n_1 ... n_k)$.

Soit, pour k fixe, $\{D_{n_1 ... n_k}\}$ un système d'ensembles ***CA*** disjoints et tels que $A_{n_1 ... n_k} - \sum' A_{m_1 ... m_k} \subset D_{n_1 ... n_k}$ (conformément au cor. 1). Posons $C_{n_1} = D_{n_1}$ et $C_{n_1 ... n_k} = D_{n_1 ... n_k} \cdot C_{n_1 ... n_{k-1}}$ pour $k > 1$. Il s'agit de prouver que $A_{n_1 ... n_k} - \sum' A_{m_1 ... m_k} \subset C_{n_1 ... n_{k-1}}$. Or cela résulte de l'inclusion (i) admise pour $k-1$ et des formules suivantes admises par hypothèse: $A_{n_1 ... n_k} \subset A_{n_1 ... n_{k-1}}$ et $A_{m_1 ... m_{k-1}} = A_{m_1 ... m_{k-1} 1} + A_{m_1 ... m_{k-1} 2} + ... \subset \sum' A_{m_1 ... m_k}$.

VIII. Ordre de valeur d'une fonction mesurable B.

y est dit valeur *d'ordre* 1 de f, en symboles $y \in Z_f$, lorsqu'il existe un et un seul x tel que $y = f(x)$. Le théorème suivant présente une généralisation de celui du N° IV.

Théorème 1[1]. *Les valeurs d'ordre* 1 *d'une fonction f mesurable B définie sur un ensemble borelien constituent un ensemble **CA**.*

Le théorème va être établi d'abord pour le cas d'une fonction continue. Chaque ensemble borelien (indénombrable) dépourvu d'un ensemble dénombrable convenablement choisi étant une

[1]) N. Lusin, op. cit., p. 257.

image biunivoque et continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ (p. 232, cor. 2), il suffit de démontrer que, $f(\mathfrak{z})$ étant une fonction continue définie sur $\mathcal{N}$, l'ensemble Z de ses valeurs d'ordre 1 est un ***CA***.

On a par définition [1]) $Z = \sum_{\mathfrak{z}} [f(\mathfrak{z}) - f(\mathcal{N} - \mathfrak{z})]$. Selon N^0 II et p. 204, III, on a $\mathfrak{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}$ et $f\left[\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}\right] = \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k})$. Il en résulte que $f(\mathfrak{z}) - f(\mathcal{N} - \mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) - f\left[\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k})\right] = \prod_{k=1}^{\infty} [f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) - f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k})]$. Posons $A_{n_1 \ldots n_k} = f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})$ et $B_{n_1 \ldots n_k} = f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})$. Donc $Z = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k})$.

D'après II (1) et (2) on a $B_{n_1 \ldots n_k} = \sum' A_{m_1 \ldots m_k}$, la sommation $\sum'$ s'étendant aux systèmes $(m_1 \ldots m_k) \neq (n_1 \ldots n_k)$. D'autre part, selon II (1), $A_{n_1 \ldots n_{k+1}} = A_{n_1 \ldots n_k 1} + A_{n_1 \ldots n_k 2} + \ldots$ Le cor. 2 du N^0 VII est donc applicable. Posons $C^*_{n_1 \ldots n_k} = C_{n_1 \ldots n_k} \cdot \overline{A}_{n_1 \ldots n_k} - B_{n_1 \ldots n_k}$, $C_{n_1 \ldots n_k}$ ayant le même sens que dans le cor. 2. On a par conséquent

$$(1) \qquad A_{n_1 \ldots n_k} - B_{n_1 \ldots n_k} \subset C^*_{n_1 \ldots n_k} \subset \overline{A}_{n_1 \ldots n_k} - B_{n_1 \ldots n_k}$$

et les ensembles $C^*_{n_1 \ldots n_k}$ sont des ***CA*** disjoints pour k fixe. En outre, le système $\{C^*_{n_1 \ldots n_k}\}$ est régulier, car $\{C_{n_1 \ldots n_k}\}$ est régulier et l'inclusion $\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k} \subset \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ (cf. N^0 II (1)) donne:

$$A_{n_1 \ldots n_k} = f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \subset f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_{k-1}}) = A_{n_1 \ldots n_{k-1}} \subset \overline{A}_{n_1 \ldots n_{k-1}},$$

$$B_{n_1 \ldots n_k} = f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \supset f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_{k-1}}) = B_{n_1 \ldots n_{k-1}},$$

d'où on déduit la formule $C^*_{n_1 \ldots n_k} = C_{n_1 \ldots n_k} \cdot \overline{A}_{n_1 \ldots n_k} - B_{n_1 \ldots n_k} \subset C_{n_1 \ldots n_{k-1}} \cdot \overline{A}_{n_1 \ldots n_{k-1}} - B_{n_1 \ldots n_{k-1}} = C^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$.

---

[1]) La formule $\{y \varepsilon Z_f\} \equiv \sum_{x} [y = f(x)] \cdot \prod_{xx'} \{[y = f(x) = f(x')] \to (x = x')\}$ conduirait, dans le cas considéré ici, à un résultat moins précis. Cependant on en déduit que, si f est définie sur un $\boldsymbol{F}_\sigma$ d'un espace compact, Z_f est une différence de deux $\boldsymbol{F}_\sigma$ (ce qui est un résultat précis).

La double inclusion (1) implique que

$$(2) \qquad Z \subset \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} C^*_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} \subset \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} (\overline{A}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}).$$

D'après N^0 II (6) et § 1, V il vient

$$\prod_{k=1}^{\infty} (\overline{A}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k})} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} B'_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} B'_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}),$$

d'où $\quad \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} (\overline{A}_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} - B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}) = Z.$

Par conséquent les trois membres de la double inclusion (2) sont identiques. Le système $\{C^*_{n_1 \ldots n_k}\}$ étant régulier et disjoint pour k fixe, la formule § 1, VI, 5 implique donc que l'ensemble

$$Z = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} C^*_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} C^*_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 \ldots n_k} C^*_{n_1 \ldots n_k} \text{ est un } \boldsymbol{CA}.$$

Passons à présent au cas où $g(x)$ est une fonction mesurable B définie sur un ensemble borelien E. Les ensembles E et $g(E)$ étant situés dans les espaces (complets séparables) $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = g(x)\}$ est borelien dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Evidemment l'ensemble des valeurs d'ordre 1 de la fonction g coïncide avec celui des valeurs d'ordre 1 de la projection sur l'axe $\mathcal{Y}$ (considérée comme fonction continue définie sur l'ensemble I) et ce dernier est — comme nous venons de démontrer — un ensemble ***CA***.

Remarque. Inversement, *C étant un **CA** contenu dans $\mathcal{X}$, il existe une fonction continue $f(\mathfrak{z})$ définie sur un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ et telle que $C = Z_f$.*

Soient, en effet, F un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ contenu dans l'intervalle $0, \frac{1}{2}$ et $f(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \varepsilon F$, une fonction biunivoque et continue telle que $f(F) = \mathcal{X}$ (cf. p. 226, corollaire). On définit la fonction $f(\mathfrak{z})$ pour $\frac{1}{2} < \mathfrak{z} < 1$ de façon que la partie commune de $\mathcal{N}$ et de l'intervalle $\frac{1}{2}, 1$ soit transformée en $\mathcal{X} - C$.

La valeur y de la fonction f est dite *d'ordre indénombrable*, en symboles: $y \varepsilon A_f$, lorsque l'ensemble $f^{-1}(y)$ est indénombrable.

Théorème 2[1]. *Les valeurs d'ordre indénombrable d'une fonction f mesurable B, définie sur un ensemble analytique, constituent un ensemble analytique*[2].

Posons, en effet, $I = \underset{xy}{E}\,[y = f(x)]$. L'ensemble I étant analytique (p. 239, 4), tout revient à démontrer qu'*étant donné dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de deux espaces complets séparables un ensemble analytique I, l'ensemble A des y tels que l'ensemble $\underset{x}{E}\,[(xy) \in I]$ est indénombrable est analytique*[3].

Or l'ensemble I, comme analytique, admet une représentation paramétrique sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels, c. à d. qu'il existe deux fonctions continues $g(\mathfrak{z})$ et $h(\mathfrak{z})$ définies sur $\mathcal{N}$ et telles qu'à chaque point xy de I correspond un $\mathfrak{z}$ remplissant les égalités $x = g(\mathfrak{z})$ et $y = h(\mathfrak{z})$. La condition que l'ensemble $\underset{x}{E}\,[(xy) \in I]$ soit indénombrable équivaut donc (p. 229, cor. 3) à l'existence dans $\mathcal{N}$ d'une suite dense en soi sur laquelle: 1° la fonction $h(\mathfrak{z})$ est identiquement égale à y, 2° la fonction $g(\mathfrak{z})$ est biunivoque.

En symboles:

$$\{y \in A\} \equiv \sum_{\xi} \prod_{n} \{[y = h(\xi^n)] \cdot \prod_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)]\},$$

[1] Cf. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fund. Math. 6 (1924), p. 161, ma note de Fund. Math. 17, p. 261 et S. Saks, Fund. Math. 19 (1932).

[2] qui peut d'ailleurs ne pas être borelien même dans le cas où la fonction f est continue et où $\mathcal{X} = \mathcal{Y} =$ un intervalle.

[3] M. Saks (loc. cit.) déduit de cet énoncé l'intéressante application suivante. Soient: $\mathcal{X} =$ intervalle 01, $\mathcal{Y} =$ espace des fonctions réelles continues $y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $I =$ l'ensemble des „points" xy du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tels que la dérivée droite de la fonction y est égale à $+\infty$ au point x. L'ensemble I est analytique (il est un $F_{\sigma\delta}$), car

$$\{(xy) \in I\} \equiv \prod_{n} \sum_{m} \prod_{0 < h \leqslant \frac{1}{m}} \left\{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \geqslant n\right\}.$$

L'énoncé précité implique donc que *l'ensemble des fonctions continues qui possèdent la dérivée droite infinie dans une infinité indénombrable de points est analytique* (dans l'espace $\mathcal{Y}$).

En outre, cet ensemble n'est en aucun point de I-re catégorie (ibid. p. 215), donc—en vertu de la propriété de Baire (p. 53, cor. 2)—*son complémentaire est de I-re catégorie* (et non vide d'après un théorème de M. Besicovitch, ibid. p. 212). On rapprochera cet énoncé de § 30, VIII (p. 210).

où ξ parcourt l'ensemble des suites denses en soi extraites de $\mathcal{N}$. Cet ensemble de suites est topologiquement complet, comme un G_δ dans l'espace complet $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (p. 170, 2). Il en résulte que l'ensemble $\underset{y\xi}{E} \prod_{n} \{[y = h(\xi^n)] \cdot \prod_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)]\}$ est un G_δ. Comme projection de ce dernier, A est analytique.

Remarque. Inversement, *à chaque ensemble analytique A correspond une fonction continue $f(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}$, telle que $A = A_f$.*

Posons, en effet, $g\left(\frac{1}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1}{|\mathfrak{z}^2} + \frac{1}{|\mathfrak{z}^3} + \dots\right) = \frac{1}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1}{|\mathfrak{z}^3} + \frac{1}{|\mathfrak{z}^5} + \dots$ Par conséquent $g(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ et l'ensemble $g^{-1}(\mathfrak{z})$ est indénombrable pour chaque $\mathfrak{z}$. Soit $h(\mathfrak{z})$ une fonction continue qui transforme $\mathcal{N}$ en A. On pose $f(\mathfrak{z}) = hg(\mathfrak{z})$.

Désignons respectivement par I_f, D_f et C_f l'ensemble des y tels que 1° $f^{-1}(y)$ contient un point isolé, 2° $f^{-1}(y)$ est dénombrable (fini ou infini) et non vide, 3° $f^{-1}(y)$ contient un point qui n'en est pas un point de condensation.

Corollaires 1—3[1]. *Si la fonction $f(x)$ définie sur un ensemble borelien est mesurable B, les ensembles I_f, D_f et C_f sont des* **CA**.

ad 1. Soit $R_1, R_2, \dots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$. Désignons par f_n la fonction partielle $f(x \mid R_n)$. Il vient $I_f = Z_{f_1} + Z_{f_2} + \dots$

ad 2. La démonstration se ramène, comme celle du théor. 1, au cas où $f(x)$ est une fonction continue définie sur l'espace $\mathcal{N}$. Parmi les ensembles fermés F, les ensembles dénombrables et non vides (situés dans l'espace $\mathcal{N}$ complet) sont caractérisés par les deux conditions suivantes: 1° F contient un point isolé, 2° F n'est pas indénombrable. Il vient $D_f = I_f - A_f$.

ad 3. f_n ayant le même sens que dans 1, on a $C_f = D_{f_1} + D_{f_2} + \dots$

Corollaire 4[2]. *Si la fonction f est mesurable B et l'ensemble E est borelien, tandis que l'ensemble $f(E)$ ne l'est pas, l'ensemble $f(E) - C_f$ ne l'est non plus.*

Car dans le cas contraire l'ensemble $f(E) = C_f + f(E) - C_f$ est un **CA** selon cor. 3. Comme ensemble analytique (N° V, 1), $f(E)$ est donc (N° III, cor. 1) un ensemble borelien.

Il en résulte, en particulier, que $f(x)$ étant une fonction continue sur un espace $\mathcal{X}$ complet séparable et telle que $f(\mathcal{X}) = D_f$ (c. à d. telle que toutes les valeurs de f sont d'ordre dénombrable), l'ensemble $f(\mathcal{X})$ est borelien. Plus encore, *$\mathcal{X}$ est somme d'une série d'ensembles boreliens: $\mathcal{X} = B_1 + B_2 + \dots$, tels que les fonctions partielles $f(x|B_n)$ sont bicontinues*[3].

[1] S. Braun, *Quelques théorèmes sur les cribles boreliens*, Fund. Math. 20 (1933), p. 168—172.

[2] Ibid. Cf. aussi N. Lusin, l. cit. p. 171. Les corollaires 1—4 présentent des généralisations du théorème du N° IV.

[3] Pour la démonstration voir N. Lusin, l. cit. p. 237 et H. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 381 (42.5.3).

IX. Décomposition en $\aleph_1$ ensembles boreliens.

1. *Chaque ensemble* ***PCA*** (donc, en particulier, chaque ensemble A et chaque ensemble CA) *est une somme de* $\aleph_1$ *ensembles boreliens.*

Cette proposition résulte du théorème suivant, qui appartient à la Théorie générale des ensembles [1]): E étant un ensemble qui s'obtient des ensembles $\{A_{n_1 \dots n_k}\}$ par l'opération $(\mathcal{A})$, posons

$$A^0_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1 \dots n_k}, \quad A^{\alpha+1}_{n_1 \dots n_k} = A^{\alpha}_{n_1 \dots n_k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A^{\alpha}_{n_1 \dots n_k n}$$

et pour λ limite: $A^{\lambda}_{n_1 \dots n_k} = \prod_{\xi<\lambda} A^{\xi}_{n_1 \dots n_k}$. Posons en outre:

$$E_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A^{\alpha}_n \quad \text{et} \quad K_\alpha = E_\alpha - \sum_{n_1 \dots n_k} \{A^{\alpha}_{n_1 \dots n_k} - A^{\alpha+1}_{n_1 \dots n_k}\}.$$

On a alors $E = \prod_{\alpha<\Omega} E_\alpha = \sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha$.

Dans le cas où les ensembles $A_{n_1 \dots n_k}$ sont boreliens, on constate facilement par induction que les ensembles E_α et K_α le sont également. On en conclut que chaque ensemble analytique, ainsi que chaque complémentaire analytique, est une somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens.

Or, soit P un ensemble ***PCA***: $P = f(C)$, f une fonction continue, C un ensemble ***CA***. Par conséquent

$$C = \sum_{\alpha<\Omega} B_\alpha, \quad \text{donc} \quad P = f(C) = \sum_{\alpha<\Omega} f(B_\alpha).$$

B_α étant borelien, l'ensemble $f(B_\alpha)$ est analytique; il est donc une somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens. Par conséquent P l'est également.

2. *Chaque ensemble* ***PCA*** *de puissance* $>\aleph_1$ *contient un ensemble parfait* [2]).

Car, parmi les $\aleph_1$ sommandes boreliens en lesquels cet ensemble se décompose, il existe au moins un qui est indénombrable; comme ensemble borelien, il contient donc topologiquement l'ensemble $\mathcal{C}$.

On voit ainsi que parmi les ensembles ***PCA*** indénombrables il n'y a que deux puissances qui peuvent se présenter: à savoir $\aleph_1$ et $\mathfrak{c}$ (d'ailleurs, on ne sait pas s'il existe des ensembles ***PCA*** ou, plus généralement, des ensembles projectifs de la puissance $\aleph_1$). Quant aux ensembles ***CPCA***, on ne connaît pas d'énoncé analogue.

[1]) W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles* (A), Fund. Math. 8 (1926); on y trouve d'autres citations sur ce sujet.

[2]) Rappelons que dans le cas des ensembles A le signe $>$ peut être remplacé par $\geqslant$. Mais on ne sait pas s'il en est ainsi dans le cas des ensembles ***CA***.

3 [1]). *Si les ensembles* $A_{n_1 \dots n_k}$ *jouissent de la propriété de Baire, il existe un indice* $\mu < \Omega$ *tel que l'ensemble* $E - K_\mu$ *est de I-re catégorie.*

En effet, chaque famille $\{X_\iota\}$ d'ensembles disjoints, jouissant de la propriété de Baire et dont aucun n'est de I-re catégorie est dénombrable; car selon p. 51, IV, 4, les ensembles $\mathrm{Int}[D(X_\iota)]$ sont disjoints, ouverts et non vides.

Par conséquent, à chaque système $n_1 \dots n_k$ correspond un nombre $\lambda < \Omega$ tel que l'ensemble $A^{\lambda}_{n_1 \dots n_k} - A^{\lambda+1}_{n \dots n_k}$ est de I-re catégorie. La famille des systèmes finis $\{n_1 \dots n_k\}$ étant dénombrable, il existe un indice μ tel que $A^{\mu}_{n_1 \dots n_k} - A^{\mu+1}_{n_1 \dots n_k}$ est de I-re catégorie, quel que soit le système $n_1 \dots n_k$. Comme $E - K_\mu \subset E_\mu - K_\mu \subset \sum_{n_1 \dots n_k} \{A^{\mu}_{n_1 \dots n_k} - A^{\mu+1}_{n_1 \dots n_k}\}$, l'ensemble $E - K_\mu$ est de I-re catégorie, c. q. f. d.

On en conclut que, si Z contient un point (au plus) de chaque différence $K_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} K_\xi$, Z est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble de I-re catégorie. Par conséquent, si les ensembles $A_{n_1 \dots n_k}$ jouissent de la propriété de Baire au sens restreint, Z est de I-re catégorie sur chaque ensemble parfait (on peut relativiser, en effet, le raisonnement précédent par rapport à un ensemble parfait donné).

Il en résulte que *E étant analytique et non borelien et $A_{n_1 \dots n_k}$ fermé, Z est un ensemble indénombrable qui est de I-re catégorie sur tout ensemble parfait.*

Car on a $E \neq \sum_{\xi<\alpha} K_\xi$, quel que soit $\alpha < \Omega$.

4. $\{A_{n_1 \dots n_k}\}$ *étant un système régulier d'ensembles fermés et B étant un ensemble borelien disjoint de E, il existe un α tel que* $B \subset D_\alpha = \mathcal{X} - E_\alpha$ [2]). Il en résulte que *tout ensemble Z qui contient un seul point de chaque différence (non vide) $D_{\xi+1} - D_\xi$ est de I-re catégorie sur tout ensemble parfait P* [3]). Car $\mathcal{X} - E$ jouissant de la propriété de Baire au sens restreint, on a $P - E = U + V$, où U est un G_δ est V est de I-re catégorie sur P. Soit α un indice tel que

[1]) Voir E. Sélivanowski, *Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques*, Fund. Math. 21 (1933), p. 20, W. Sierpiński, ibid. p. 29, E. Szpilrajn, ibid. p. 234. L'énoncé 3 reste valable, si l'on remplace la propriété de Baire par la mesurabilité et les ensembles de I-re catégorie par les ensembles de mesure nulle.

[2]) Pour la démonstration voir N. Lusin et W. Sierpiński, Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 39.

[3]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, R. Accad. Lincei 6, v. VII (1928), p. 214.

$U \subset D_\alpha$. L'inclusion $PZ - D_\alpha \subset P - E - D_\alpha \subset V$ montre que $PZ - D_\alpha$ est de I-re catégorie sur P; il en est donc de même de PZ, puisque PZD_α est dénombrable.

X. Fonctions *A* et *CA*. Appelons une fonction $f(x)$ à valeurs réelles *fonction A* (fonction ***CA***), lorsque l'ensemble $\underset{x}{E}\,[f(x) > c]$ est un ensemble A (ensemble CA), quel que soit c [1]).

On voit aussitôt que les fonctions A et les fonctions CA sont *mesurables* au sens de Lebesgue (lorsque x est réel) et *jouissent de la propriété de Baire au sens restreint*. Les fonctions qui sont *simultanément* A *et* CA coïncident avec les fonctions mesurables B. La *fonction caractéristique* d'un ensemble A (ou CA) est une fonction A (ou CA).

La limite d'une suite convergente de fonctions A (ou CA) *est une fonction* A (ou CA). Car la condition $f(x) = \lim f_n(x)$ entraîne l'équivalence

$$\{f(x) > c\} \equiv \sum_n \prod_k [f_{n+k}(x) > c + 1/n],$$

d'où

$$\underset{x}{E}\,\{f(x) > c\} = \sum_n \prod_k \underset{x}{E}\,[f_{n+k}(x) > c + 1/n].$$

$f(x)$ étant une fonction A ou CA, l'ensemble $\underset{xy}{E}\,[y = f(x)]$ *est une différence de deux ensembles analytiques.* Car $\{r_n\}$ désignant la suite des nombres rationnels, on a l'équivalence $[y \neq f(x)] \equiv \sum\limits_n \{[y < r_n < f(x)] + [f(x) < r_n < y]\}$.

$f(x,t)$ étant une fonction (bornée) *mesurable B, la fonction* $g(x) = \max\limits_t f(x,t)$ *est une fonction A et* $h(x) = \min\limits_t f(x,t)$ *est une fonction CA* [2]).

En effet, l'équivalence $[\max\limits_t f(t) \leqslant c] \equiv \prod\limits_t [f(t) \leqslant c]$ entraîne $[g(x) \leqslant c] \equiv \prod\limits_t [f(x,t) \leqslant c]$, c. à d. $[g(x) > c] \equiv \sum\limits_t [f(x,t) > c]$, ce qui prouve que l'ensemble $\underset{x}{E}\,[g(x) > c]$ est analytique comme projection de l'ensemble borelien $\underset{xt}{E}\,[f(x,t) > c]$. D'une façon analogue, l'équivalence $[h(x) < c] \equiv \sum\limits_t [f(x,t) < c]$ entraîne $[h(x) \leqslant c] \equiv \prod\limits_n [h(x) < c + 1/n] \equiv \prod\limits_n \sum\limits_t [f(x,t) < c + 1/n]$, d'où on conclut que l'ensemble $\underset{x}{E}\,[h(x) \leqslant c]$ est analytique.

---

1) On n'a pas entrepris jusqu'à présent une étude systématique des fonctions A et CA. Cf. L. Kantorovitch, *Sur les fonctions du type (U)*, C. R. Paris, t. 192, p. 1267. Bien entendu, on peut définir les fonctions d'une classe projective arbitraire.

2) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 274.

Dans les mêmes hypothèses, *la fonction* $\limsup\limits_{t=a} f(x,t)$ *est une fonction A et* $\liminf\limits_{t=a} f(x,t)$ *est une fonction CA.* Car on a $\limsup\limits_{t=a} f(t) = \lim\limits_{n=\infty} m_n$ où $m_n = \max f(t)$ pour $0 < |a-t| < 1/n$. Par conséquent $\limsup\limits_{t=a} f(x,t)$ est une fonction A comme limite d'une suite de fonctions A.

Exemple. Les dérivées partielles supérieures (ou inférieures) de Dini d'une fonction $g(x,y)$ mesurable B sont des fonctions A (ou CA) (qui peuvent d'ailleurs admettre des valeurs infinies) [1]). Car en posant $f(x,y,t) = \dfrac{g(x+t,y) - g(x,y)}{t}$, on a $\limsup\limits_{t=+0} \dfrac{g(x+t,y) - g(x,y)}{t} = \limsup\limits_{t=0} f(x,y,t)$, où $f(x,y,t)$ est une fonction mesurable B (on admet que $t > 0$).

§ 36. Espaces totalement imparfaits.

Les espaces considérés dans ce § sont supposés métriques séparables.

I. Définition. Existence. Un espace qui ne contient aucun ensemble homéomorphe à l'ensemble parfait $\mathcal{C}$ de Cantor est dit *totalement imparfait*.

Dans un espace complet séparable la propriété d'un ensemble E d'être totalement imparfait signifie que E ne contient aucun ensemble parfait non vide ou, ce qui revient au même, aucun ensemble analytique indénombrable, car chaque ensemble analytique indénombrable contient $\mathcal{C}$ topologiquement (§ 35, I).

Théorème de M. F. Bernstein [2]). *Il existe dans chaque espace complet séparable et indénombrable un ensemble Z qui—de même que son complémentaire—est totalement imparfait et de puissance du continu.*

Ce théorème résulte directement du lemme suivant, qui appartient à la Théorie générale des ensembles:

Soient R un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$, $\boldsymbol{M}$ une famille de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ de sous-ensembles de R dont chacun est de puissance $\mathfrak{c}$. R renferme alors un ensemble Z qui, de même que $R - Z$, est de puissance $\mathfrak{c}$ et contient au moins un élément de tout ensemble appartenant à la famille $\boldsymbol{M}$.

---

1) M. Neubauer, *Über die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen*, Mon. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 139.

2) Leipz. Ber. 60 (1908), p. 329. Cf. P. Mahlo, ibid. 63 (1911), p. 346 et A. Schönflies, *Entwickelung der Mengenlehre I*, Leipzig 1913, p. 361. Pour la démonstration, cf. la note de M. Sierpiński et de moi, Fund. Math. 8 (1926), p. 193.

Le problème de l'existence des espaces séparables totalement imparfaits remonte à L. Scheeffer, Acta Math. 5 (1884), p. 287.

Nous appuyons la démonstration de ce lemme sur le théorème du „bon ordre": Ω_c désignant le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{c}$, nous imaginons les ensembles-éléments de $\boldsymbol{M}$ rangés en une suite transfinie du type Ω_c:

$$(1) \qquad M_1, M_2, \dots, M_\omega, M_{\omega+1}, \dots$$

à termes différents ou non.

Soit, d'une façon analogue:

$$(2) \qquad x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots$$

une suite du type Ω_c, à termes distincts, composée de tous les éléments de R.

On définit par l'induction transfinie deux suites $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega_c)$, en admettant que 1⁰: p_1 est le premier terme de la suite (2) contenu dans M_1 et q_1 est le premier terme de la suite (2) tel que $p_1 \neq q_1 \in M_1$, 2⁰: S_α désignant pour $\alpha > 1$ l'ensemble de tous les p_ξ et q_ξ avec $\xi < \alpha$, p_α est le premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha$ (un terme de ce genre existe, puisque l'ensemble S_α est de puissance $< \mathfrak{c}$) et, d'une façon analogue, q_α est le premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha - p_\alpha$.

Z est l'ensemble de tous les points p_α avec $\alpha < \Omega_c$.

Remarques. 1) Dans le cas où l'espace R est un intervalle, *l'ensemble Z est non mesurable au sens de Lebesgue.* Car Z, ainsi que le complémentaire de Z, sont de mesure intérieure nulle, comme ensembles totalement imparfaits.

2) La démonstration de l'existence des ensembles indénombrables totalement imparfaits, qui vient d'être exposée, n'est pas *effective*, c. à d. que l'existence en a été démontrée sans *nommer* aucun ensemble Z individuel (on remarquera que les suites (1) et (2) n'ont pas été définies). On n'en connaît aucune démonstration effective (même dans le cas de l'espace des nombres réels). C'est là un des problèmes fondamentaux liés avec la notion de l'effectivité[1]).

II. Rapports avec la propriété de Baire. 1. *Z étant totalement imparfait dans un espace $\mathcal{X}$ complet, séparable et dense en soi, $\mathcal{X} - Z$ n'est de I-re catégorie en aucun point.*

Supposons, en effet, que G soit un ensemble ouvert non vide tel que $G - Z$ est de I-re catégorie. Soit B un $\boldsymbol{F}_\sigma$ de I-re catégorie tel que $G - Z \subset B$. L'ensemble $G - B$ est donc dense dans G (p. 204, IV), donc dense en soi (p. 41, V, 3). Comme ensemble $\boldsymbol{G}_\delta$ dense en soi, $G - B$ est indénombrable (p. 206, V, 3) et contient par conséquent un ensemble parfait non vide (p. 232, II, cor. 4). Mais alors l'ensemble $Z \supset G - B$ n'est pas totalement imparfait.

2. *Dans un espace $\mathcal{X}$ complet séparable et dense en soi chaque ensemble totalement imparfait à propriété de Baire est de I-re catégorie.* Par conséquent,

[1]) Cf. à ce propos les remarques de M. Bernstein, l. cit.

si les ensembles Z et $\mathcal{X} - Z$ sont totalement imparfaits, ils sont dépourvus de la propriété de Baire.

C'est une conséquence directe de 1 et de p. 53, cor. 2.

3. *Dans un espace complet séparable les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *d'être un $\boldsymbol{B}_r$* (c. à d. *un ensemble à propriété de Baire au sens restreint*) *totalement imparfait,*

(ii) *d'être de I-re catégorie sur tout ensemble parfait,*

(iii) *d'être un ensemble dont tout sous-ensemble dense en soi est de I-re catégorie sur lui-même,*

(iv) *d'être un ensemble dont tout sous-ensemble est un $\boldsymbol{B}_r$.*

Démonstrations: (i) → (ii). C'est une conséquence de 2.

(ii) → (iii). Si E jouit de la propriété (ii) et si X est un sous-ensemble dense en soi de E, l'ensemble $E \cdot \overline{X}$ est de I-re catégorie sur $\overline{X}$. L'ensemble $X = EX$ est donc (p. 45, IV, 2) de I-re catégorie sur lui-même.

(iii) → (iv). Car la propriété (iii) implique évidemment la propriété $\boldsymbol{B}_r$ et appartient à chaque sous-ensemble d'un ensemble qui la possède.

(iv) → (i). Car d'après 2 et selon le théorème du N⁰ I, chaque ensemble parfait non vide contient un ensemble dépourvu de la propriété de Baire.

L'existence des ensembles indénombrables jouissant des propriétés (i) — (iv) a été signalée au § 35, IX (p. 265). Nous l'établirons d'une façon plus directe au N⁰ suivant.

III. Espaces λ[1]). Nous appelons ainsi un espace *dont chaque sous-ensemble dénombrable est un $\boldsymbol{G}_\delta$.*

1. *Chaque espace λ satisfait à la condition* (iii)[2]).

Soient, en effet, W un ensemble dense en soi et D un ensemble dénombrable dense dans W, c. à d. $D \subset W \subset \overline{D}$. Comme un $\boldsymbol{F}_\sigma$ frontière dans $\overline{W}$, l'ensemble $\overline{W} - D$ est de I-re catégorie sur $\overline{W}$. Il en est donc de même de la somme $\overline{W} = \overline{W} - D + D$. L'ensemble W est par conséquent de I-re catégorie sur lui-même (p. 45, IV, 2).

2. *Chaque espace complet séparable et indénombrable contient un ensemble λ indénombrable,* donc *une infinité de la puissance $2^{\aleph_1}$ d'ensembles de ce genre* (puisque chaque sous-ensemble d'un ensemble λ est un ensemble λ).

Il suffit d'établir cet énoncé pour l'espace $\mathcal{N}$, puisque chaque espace complet séparable et indénombrable contient $\mathcal{N}$ topologiquement.

[1]) Voir ma note *Sur une famille d'ensembles singuliers,* Fund. Math. 21 (1933), p. 127.

[2]) L'implication inverse n'a pas lieu (si l'on admet l'hypothèse du continu). Voir N. Lusin, Fund. Math. 21 (1933), p. 119.

Or, nous allons démontrer d'abord que *l'espace $\mathcal{N}$ contient une suite transfinie indénombrable d'ensembles G_δ croissants (et distincts)*:

$$(1) \qquad Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\omega \subset Q_{\omega+1} \subset \dots [1]$$

Soit, en effet, $Q_0 = 0$. Pour $\alpha > 0$, supposons que tous les ensembles Q_ξ avec $\xi < \alpha$ soient des G_δ de mesure (lebesguienne) nulle. Donc $\sum_{\xi<\alpha} Q_\xi$ est encore de mesure nulle et comme (d'après un théorème de la théorie de la mesure) chaque ensemble de mesure nulle est contenu dans un G_δ de mesure nulle, il existe un ensemble Q_α qui est un G_δ tel que $Q_\alpha \supset \sum_{\xi<\alpha} Q_\xi$ et $Q_\alpha \neq \sum_{\xi<\alpha} Q_\xi$. On peut évidemment supposer que les ensembles Q_α sont contenus dans $\mathcal{N}$.

L'existence de la suite (1) se trouve ainsi établie. L'ensemble E des points $p_1, p_2, \dots, p_{\omega+1}, p_{\omega+2}, \dots$ tels que $p_{\alpha+1} \in Q_{\alpha+1} - Q_\alpha$ est un espace λ. Soit, en effet, D un sous-ensemble dénombrable de E. Posons $D = (p_{\xi_1}, p_{\xi_2}, \dots, p_{\xi_n}, \dots)$. Soit α un nombre transfini supérieur à tous les indices ξ_n. Par conséquent $D \subset Q_\alpha \cdot E$, d'où $D = Q_\alpha \cdot E \cdot D = E \cdot [Q_\alpha - (Q_\alpha \cdot E - D)]$ et, l'ensemble $Q_\alpha \cdot E$ étant dénombrable (car, pour $\beta > \alpha$, p_β n'appartient pas à Q_α), $Q_\alpha - (Q_\alpha \cdot E - D)$ est un G_δ. Cela prouve que D est un G_δ relativement à E [2]).

Remarque. On est conduit aux espaces λ dans l'étude de *l'ordre de croissance* des suites d'entiers positifs. Notamment, $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ et $\mathfrak{y} = [\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots]$ étant deux nombres irrationnels ou, ce qui revient au même, deux suites d'entiers positifs, posons $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}$, lorsqu'on a $\mathfrak{z}^i < \mathfrak{y}^i$ à partir d'un indice i:

$$\{\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}\} \equiv \sum_n \prod_k \{\mathfrak{z}^{n+k} < \mathfrak{y}^{n+k}\}.$$

Chaque ensemble $\mathfrak{E}$ de suites (considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{N}$), *bien ordonné selon la relation $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}$ et du type Ω* [3]) *est un ensemble λ.*

Soit, en effet, $\mathfrak{D}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_\omega, \mathfrak{z}_{\omega+1}, \dots], \quad \mathfrak{D} = [\mathfrak{z}_{\xi_1}, \mathfrak{z}_{\xi_2}, \dots \mathfrak{z}_{\xi_n}, \dots].$$

---

[1]) Cette proposition est due à M. Zalcwasser. Pour une démonstration qui n'utilise pas la théorie de la mesure voir W. Sierpiński, C. R. Soc. Sc. de Varsovie 1934.

[2]) Ce raisonnement est dû à M. Sierpiński, *Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait*, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, 1933, p. 102.

[3]) L'existence d'une *échelle* de ce genre résulte facilement du théorème de M. Zermelo.

Soient α un nombre supérieur à tous les ξ_n et $\mathfrak{H}$ l'ensemble $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_\alpha)$. L'ensemble $\mathfrak{H}$ contenant $\mathfrak{D}$ et la différence $\mathfrak{H} - \mathfrak{D}$ étant dénombrable, il suffit de démontrer que $\mathfrak{H}$ est un G_δ dans $\mathfrak{E}$, ou encore, que $\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ est un F_σ dans $\mathfrak{E}$.

On a les équivalences évidentes: $\{\mathfrak{z} \in (\mathfrak{E} - \mathfrak{H})\} \equiv \{(\mathfrak{z} \in \mathfrak{E})(\mathfrak{z}_\alpha \prec \mathfrak{z})\}$ et $\{\mathfrak{z}_\alpha \prec \mathfrak{z}\} \equiv \sum_n \prod_k \{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\}$, d'où $\mathfrak{E} - \mathfrak{H} = \mathfrak{E} \cdot \sum_n \prod_k \underset{\mathfrak{z}}{E} \{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\}$.

L'ensemble $\underset{\mathfrak{z}}{E}\{m < \mathfrak{z}^i\} = \underset{\mathfrak{z}}{E}\{m+1 \leqslant \mathfrak{z}^i\}$ étant fermé (pour i et m fixes), il en est de même de $\underset{\mathfrak{z}}{E}\{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\}$. Cela implique aussitôt que $\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ est un F_σ dans $\mathfrak{E}$ [1]).

IV. Transformations. 1. *La propriété d'être totalement imparfait et celle d'être un espace λ sont des invariants de toute transformation biunivoque $y = f(x)$ dont la transformation inverse $x = f^{-1}(y)$ est continue.*

En effet, si l'espace $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ renferme un ensemble C homéomorphe à $\mathcal{C}$, l'espace $\mathcal{X}$ contient l'ensemble $f^{-1}(C)$, qui contient $\mathcal{C}$ topologiquement (p. 227, V).

D'autre part, si $\mathcal{X}$ est un espace λ et P est un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(P)$, comme dénombrable, est un G_δ dans $\mathcal{X}$ et l'ensemble $P = ff^{-1}(P)$ est un G_δ, car la fonction f^{-1} est continue. $\mathcal{Y}$ est donc un espace λ.

2. *$y = f(x)$ étant une fonction a r b i t r a i r e définie sur un espace $\mathcal{X}$ qui est soit totalement imparfait, soit un espace λ, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ l'est également.*

Car la projection parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ transforme I en $\mathcal{X}$ d'une façon biunivoque et continue.

3. *Chaque ensemble Z de puissance $\aleph_1$ situé dans un espace complet séparable $\mathcal{Y}$ est une image biunivoque et continue d'un espace λ contenu dans $\mathcal{N} \times \mathcal{Y}$,* donc, *d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire au sens restreint.*

En effet, conformément à N° III, 2, l'espace $\mathcal{N}$ contient un ensemble E de puissance $\aleph_1$ et qui est un espace λ. Soit $y = f(x)$ une transformation biunivoque de E en Z. L'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ est un ensemble λ (d'après 2) et Z en est une image biunivoque et continue.

---

[1]) C'est au fond la marche du raisonnement qui a servi à M. Lusin pour établir l'existence des ensembles indénombrables à propriété (ii). Voir *Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait*, Fund. Math. II (1921), p. 155—157.

4. *Une fonction* a r b i t r a i r e $y = f(x)$, *définie sur un espace jouissant de la propriété* (iii) *du* N° II, *possède la propriété de Baire au sens restreint.*

Plus encore: *A étant un ensemble arbitraire, l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction partielle $f|A$ est de I-re catégorie sur A* [1].

En effet, il existe dans A un ensemble dénombrable E tel que $A - E$ est dense en soi (p. 108, V). Comme, en outre, D ne contient aucun point isolé de A (p. 67, III), il vient $D \subset (A - E) + E \cdot A'$. L'ensemble $E \cdot A'$, comme formé d'une suite de points d'accumulation, est de I-re catégorie dans A; l'ensemble $A - E$ l'étant également par hypothèse, il en est de même de D.

Remarques. 1. *L'ensemble $I = \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ peut jouir de la propriété de Baire au sens restreint sans que la fonction f en jouisse, même au sens large* [2]. Cela résulte de 2 en vertu de l'hypothèse du continu. Notamment, soient A un ensemble dépourvu de la propriété de Baire dans l'intervalle $\mathcal{J} = 01$, E un espace λ indénombrable, F un sous-ensemble fermé de E et tel que les ensembles F et $E - F$ sont indénombrables et enfin $y = f(x)$ une fonction biunivoque telle que $f(\mathcal{J}) = E$ et que $f(A) = F$.

2. *Ni la propriété de Baire au sens restreint, ni celle d'être un espace λ n'est un invariant des transformations biunivoques et continues.* Cela résulte de 3 en vertu de l'hypothèse du continu. Car A étant un ensemble dépourvu de la propriété de Baire (au sens large, cf. p. 53, IVa), il existe un ensemble λ dont A est une image biunivoque et continue.

V. Autres espaces singuliers. *Espaces* σ. Nous appelons ainsi un espace *dont chaque sous-ensemble borelien est un G_δ* [3].

Evidemment *chaque espace σ est un espace λ; chaque fonction mesurable B définie sur un espace σ est de I-re classe.*

L'existence des espaces σ indénombrables (contenus dans $\mathcal{N}$) résulte de l'hypothèse du continu. La démonstration en est tout-à-fait analogue à celle de l'existence d'un espace λ (N° III). On imagine d'abord, en vertu de l'hypothèse du continu, la famille de tous les ensembles G_δ de mesure nulle rangée en une suite transfinie du type Ω:

$$K_0, K_1, \ldots, K_\omega, K_{\omega+1}, \ldots \tag{1}$$

Parmi les différences $K_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} K_\xi$ il y a une infinité indénombrable de différences non vides. En effet, dans le cas contraire il existerait un in-

[1] Cf. la remarque 3 du § 27, X (p. 191).

[2] Cf. § 28, III, remarque 1 (p. 194). Voir W. Sierpiński, *La propriété de Baire des fonctions et de leurs images*, Fund. Math. 11 (1928), p. 306.

[3] Voir W. Sierpiński, *Sur l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 5 (1924), p. 184 et E. Szpilrajn, *Sur un problème de M. Banach*, Fund. Math. 15 (1930), p. 212.

dice α à partir duquel on aurait $\sum_{\xi<\alpha} K_\xi = \sum_{\xi<\alpha+1} K_\xi = \sum_{\xi<\alpha+2} K_\xi = \ldots$ Comme chaque ensemble G_δ composé d'un point individuel appartient à la suite (1), on obtiendrait $\sum_{\xi<\alpha} K_\xi = \mathcal{N}$, ce qui est impossible, la somme $\sum_{\xi<\alpha} K_\xi$ étant de mesure nulle.

Tout ensemble E qui contient un seul point de chaque ensemble $K_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} K_\xi$ non vide est un ensemble σ indénombrable. Nous allons prouver d'abord que *chaque ensemble H contenu dans E et mesurable au sens de Lebesgue est dénombrable.*

En effet, l'ensemble EK_α étant dénombrable, quel que soit α, il n'existe aucun G_δ indénombrable de mesure nulle qui soit contenu dans E. L'ensemble E est donc de mesure intérieure nulle et par suite H est de mesure nulle. Il existe par conséquent un K_α tel que $H \subset K_\alpha$, d'où $H \subset EK_\alpha$. L'ensemble EK_α étant dénombrable, il en est de même de H.

Ceci établi, soit B un ensemble borelien arbitraire contenu dans l'intervalle $\mathcal{J} = 01$. Il s'agit de prouver que BE est un G_δ relativement à E. Posons $\mathcal{J} - B = U + V$, où U est un F_σ et V est de mesure nulle. Il vient $E - B = UE + VE$. Comme ensemble de mesure nulle, VE est dénombrable, par conséquent $E - B$ est un F_σ dans E et BE y est un G_δ, c. q. f. d.

Il est à remarquer que *l'ensemble E est non mesurable au sens de Lebesgue et jouit cependant de la propriété de Baire au sens restreint* [1] (qui est une conséquence de λ donc de σ).

2) *Espace* ν. Nous appelons ainsi un espace dont *chaque sous-ensemble non-dense est dénombrable* [2].

L'existence des espaces ν indénombrables (contenus dans $\mathcal{N}$) résulte de l'hypothèse du continu.

Imaginons, en effet, les sous-ensembles fermés non-denses de $\mathcal{N}$ rangés en une suite transfinie du type Ω:

$$F_0, F_1, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots$$

[1] C'est d'ailleurs un fait général qu'un ensemble dont chaque sous-ensemble mesurable au sens de Lebesgue est dénombrable jouit de la propriété de Baire au sens restreint. Voir S. Saks, *Sur un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire*, Fund. Math. 11 (1928), p. 277. Cf. N. Lusin, *Sur une question concernant la propriété de Baire*, Fund. Math. 9 (1927), p. 117. Ajoutons que le problème inverse, à savoir, celui de l'existence d'un ensemble mesurable (de mesure 0) dépourvu de la propriété de Baire (même au sens large) se résout facilement sans l'hypothèse du continu.

[2] N. Lusin, C. R. Paris, t. 158 (1914), p. 1259.

Comme espace complet, $\mathcal{N}$ n'est pas de I-re catégorie. Il en résulte (comme dans la démonstration précédente) qu'il existe une infinité indénombrable de différences $F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi$ non vides. *Tout ensemble E contenant un seul point de chacune d'elles est un espace ν indénombrable.* Plus encore: tout sous-ensemble N de E qui est non-dense dans $\mathcal{N}$ est dénombrable. Car $\overline{N}$ étant non-dense dans $\mathcal{N}$, il existe un indice α tel que $F_\alpha = \overline{N}$, d'où $N \subset EF_\alpha$. L'ensemble EF_α étant dénombrable (par définition de E), l'ensemble N l'est également.

Propriétés des espaces ν. 1. *Tout espace ν est totalement imparfait.*

Car l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor contient un sous-ensemble parfait non-dense dans $\mathcal{C}$.

2. *Chaque sous-ensemble à propriété de Baire d'un espace ν est la somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble dénombrable.*

Car il est la somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-re catégorie (p. 51, IV, 2) et ce dernier est dénombrable. Il en résulte que

3. *Chaque fonction jouissant de la propriété de Baire et définie sur un espace ν est de deuxième classe*[1].

4. *$f(x)$ étant une fonction à valeurs réelles, jouissant de la propriété de Baire et définie sur un espace E à propriété ν, l'ensemble $f(E)$ est de mesure lebesguienne nulle: $mf(E) = 0$*[2].

En effet, d'après le théorème p. 195, V, il existe dans E un ensemble Z tel que $mf(Z) = 0$ et que $E - Z$ est de I-re catégorie. $E - Z$ étant dénombrable par hypothèse, il vient $mf(E - Z) = 0$, d'où $mf(E) = 0$.

5. *E étant un espace ν, à chaque suite $\{c_n\}$ de nombres positifs correspond une décomposition $E = E_1 + E_2 + \ldots$ telle que $\delta(E_n) < c_n$*[3].

En effet, $\{p_n\}$ étant une suite dense dans E et E_{2n} étant une sphère ouverte de centre p_n et telle que $\delta(E_{2n}) < c_{2n}$, l'ensemble ouvert $G = E_2 + E_4 + E_6 + \ldots$ est dense dans E. L'ensemble $E - G$ est par conséquent non-dense, donc dénombrable: $E - G = [q_1, q_2, \ldots]$. On pose $E_{2n-1} = (q_n)$.

---

[1]) G. Poprougénko, *Sur un problème de M. Mazurkiewicz*, Fund. Math. 15 (1930), p. 285.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle*, Fund. Math. 11 (1928), p. 302.

[3]) Cf. W. Sierpiński ibid., p. 304. Le problème de l'existence des ensembles indénombrables satisfaisant à la thèse du théorème 5 provient de M. Borel. On ne sait pas l'établir sans l'hypothèse du continu. Voir E. Borel, *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. math. de France 47 (1919), p. 1 et E. Szpilrajn, *Sur une hypothèse de M. Borel*, Fund. Math. 15 (1930), p. 126.