DEUXIÈME CHAPITRE.

Espaces métrisables et séparables.

A. Introduction de la limite, de la distance et des coordonnées (§§ 14—17).

Nous allons ajouter, à présent, aux axiomes I—III deux nouveaux axiomes (§§ 16 et 17). L'espace satisfaisant aux ax. I—V constitue, comme nous l'avons indiqué déjà dans la Préface, le vrai domaine de la Topologie. Il est d'après un théorème du § 17 homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$; c'est bien ce théorème fondamental, qui est un de nos buts les plus proches. Afin d'y parvenir d'une façon méthodique, nous étudierons d'abord deux genres d'espaces: espaces $\mathcal{L}^*$, munis de la notion de limite et espaces métriques, munis de la notion de distance. Les §§ 14 et 15 contiennent plusieurs définitions et théorèmes importants, liés à ces notions. Dès que le théorème fondamental sera établi, tous les théorèmes concernant les espaces $\mathcal{L}^*$, ainsi que les espaces métriques, pourront être considérés comme des théorèmes sur l'espace assujetti aux ax. I—V, puisque dans un espace de ce genre la limite et la distance se laissent introduire de façon que cet espace devienne $\mathcal{L}^*$ et métrique.

§ 14. Espaces $\mathcal{L}^*$ (pourvus de la notion de limite).

I. Définition. Un ensemble d'éléments arbitraires devient un espace $\mathcal{L}^*$, lorsqu'on a fait correspondre à certaines suites (dites *convergentes*) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ d'éléments de cet espace un élément $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ de façon que les conditions suivantes soient réalisées [1]):

[1]) Les espaces abstraits ayant la notion de limite pour terme primitif ont été introduits par M. Fréchet dans sa Thèse, Paris 1906 et Rend. Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), *Sur quelques points du Calcul fonctionnel.* Pour la cond. 3⁰, voir P. Alexandroff et P. Urysohn, C. R. Paris, t. 177 (1923), p. 1274 et P. Urysohn *Sur les classes* ($\mathcal{L}$) *de M. Fréchet*, Ens. Math. 25 (1926), p. 77—83, où les espaces $\mathcal{L}^*$ sont désignés par $\mathcal{L}_t$.

1^0 *si* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$ *et* $k_1 < k_2 < \dots$, *on a* $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = p$

2^0 *si, pour chaque* n, $p_n = p$, *on a* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$

3^0 *si la suite* $p_1, p_2, \dots$ *ne converge pas vers* p, *elle contient une suite partielle* [1]) $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ *dont aucune suite partielle ne converge vers* p.

Nous distinguons par l'astérisque les espaces $\mathcal{L}^*$ des espaces $\mathcal{L}$ de M. Fréchet, qui ne sont assujettis qu'aux conditions 1^0 et 2^0. Ces deux conditions ne caractérisent pas d'une façon suffisante la notion de limite: par exemple, un ensemble composé de deux éléments a et b, où l'on suppose que seules les suites $a, a, a, \dots$ et $b, b, b, \dots$ sont convergentes (la suite $a, b, b, b, \dots$ diverge!) est un espace $\mathcal{L}$. Voir aussi N⁰ II et N⁰ III, ainsi que M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 169.

II. Rapport aux axiomes I—III. X étant un ensemble situé dans un espace $\mathcal{L}^*$, on définit la fermeture $\overline{X}$ de X, en admettant que p appartient à $\overline{X}$, lorsque p est limite d'une suite extraite de X. On voit aussitôt que la condition 1^0 entraîne l'ax. I et la cond. 2^0 l'ax. II (voir d'ailleurs le raisonnement du § 4, II). L'ax. III peut ne pas être rempli, comme le prouve l'exemple de l'ensemble des fonctions, considéré au § 4, V [2]).

Pour que $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, *il faut et il suffit que,* X *désignant l'ensemble des éléments d'une sous-suite arbitraire* $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$, *on ait* $p \in \overline{X}$.

En effet, si $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, on a $p \in \overline{X}$ en vertu de 1^0. Inversement, si la suite donnée ne converge pas vers p, elle contient selon 3^0 une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ dont aucune sous-suite ne converge vers p. On peut supposer, de plus, que la suite $\{p_{k_n}\}$ ne contient pas l'élément p, car en vertu de 2^0 elle ne pourrait le contenir qu'un nombre fini de fois et dans ce dernier cas on la remplacerait par une sous-suite qui ne contient pas p. Or aucune suite (d'éléments différents ou non) $x_1, x_2, \dots$ extraite de X ne converge vers p, car en cas où elle admet une infinité d'éléments différents, elle contient une sous-suite de la suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$, donc une suite qui ne converge pas vers p, et en cas où la suite $x_1, x_2, \dots$

[1]) $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ est une *suite partielle* (ou une *sous-suite*) de la suite $p_1, p_2, \dots$ lorsque $k_1 < k_2 < \dots$

[2]) Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace satisfaisant aux ax. I—III devienne $\mathcal{L}^*$ ont été données par P. Urysohn dans l'ouvrage précité.

ne contient qu'un nombre fini de termes différents, il y en a un qui se répète une infinité de fois; ce terme étant différent de p, la suite ne pourrait converger vers p. Ainsi, en tout cas, p *non*-$\varepsilon\, \overline{X}$.

On prouve facilement que *la convergence, ainsi que la limite d'une suite, ne dépend pas de n premiers termes de cette suite*, c. à d. que l'on peut ajouter ou supprimer ou remplacer un nombre fini de termes, sans que la suite cesse d'être ou devienne convergente, ou bien que sa limite change de valeur. On prouve aussi (en s'appuyant toujours sur l'ax. 3⁰) que, *étant données deux suites telles que* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p = \lim\limits_{n=\infty} q_n$, *la suite* $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ *converge vers* p.

III. Notion de continuité. *Dans les espaces $\mathcal{L}^*$ la condition pour qu'une fonction f soit continue au point x équivaut à la suivante* (dite condition de Heine) [1]):

$$x = \lim_{n=\infty} x_n \textit{ entraîne } f(x) = \lim_{n=\infty} f(x_n).$$

Supposons, en effet, que la fonction soit continue au point x et que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$. Désignons par X l'ensemble des éléments d'une sous-suite arbitraire $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ Nous avons démontré au N⁰ précédent que $x \,\varepsilon\, \overline{X}$. Donc, par définition de la continuité (§ 13, I), $f(x) \,\varepsilon\, \overline{f(X)}$. La suite $f(x_{k_1}), f(x_{k_2}), \ldots$ étant une sous-suite arbitraire de la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots$, cette dernière converge vers $f(x)$.

Supposons, d'autre part, que $x \,\varepsilon\, \overline{X}$. Il existe donc une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $x_n \,\varepsilon\, X$. Si l'on suppose la condition de Heine vérifiée, on a $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$ et comme $f(x_n) \,\varepsilon\, f(X)$, il vient $f(x) \,\varepsilon\, \overline{f(X)}$. La fonction est donc continue au point x.

De là, on conclut facilement que pour que la fonction f soit *bicontinue*, il faut et il suffit que les égalités $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$ soient *équivalentes*.

---

[1]) L'hypothèse que l'espace des valeurs soit un $\mathcal{L}^*$ est essentielle. Si, en effet, un espace est un $\mathcal{L}$ sans être un $\mathcal{L}^*$, il contient une suite $y_0, y_1, \ldots$ qui ne converge pas vers y_0, bien que chaque sous-suite contienne une sous-suite convergente vers y_0. Posons $f(0) = y_0$ et $f(1/n) = y_n$. La fonction f est continue dans le sens adopté au § 13, I, mais ne satisfait pas à la condition de Heine.

En général, si les espaces des arguments et des valeurs sont des espaces $\mathcal{L}$ (mais pas nécessairement $\mathcal{L}^*$), la continuité de f équivaut à la condition suivante: *si* $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$, *il existe une sous-suite* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ *telle que* $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n})$.

IV. Produit cartésien des espaces $\mathcal{L}^*$. Le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est par définition (§ 2, I) l'ensemble des paires ordonnées (x, y) où $x \,\varepsilon\, \mathcal{X}$ et $y \,\varepsilon\, \mathcal{Y}$. On confère à l'ensemble $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ le caractère d'un espace $\mathcal{L}^*$, en convenant que la suite de points $\mathfrak{z}_n = (x_n, y_n)$ converge vers $\mathfrak{z} = (x, y)$, lorsque $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n=\infty} y_n = y$.

D'une façon analogue, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ étant une suite infinie d'espaces $\mathcal{L}^*$, on convient qu'une suite variable $\mathfrak{z}_n = \overset{1}{\mathfrak{z}}_n, \overset{2}{\mathfrak{z}}_n, \ldots$ converge (dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$) vers la suite $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots$, lorsque pour chaque i, on a $\lim\limits_{n=\infty} \overset{i}{\mathfrak{z}}_n = \mathfrak{z}^i$, c. à d. lorsque le i-ème terme de la suite variable tend vers le i-ème terme de la suite limite.

Soit $\mathfrak{z} = f(t)$ une fonction qui fait correspondre à chaque point t d'un espace T un point $\mathfrak{z}$ du produit cartésien $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ (ou, d'une façon moins générale, du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$). Posons $g_i(t) = [f(t)]^i =$ la i-ème coordonnée du point $\mathfrak{z} = f(t)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(t)$ soit continue au point t est que chacune des fonctions $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, soit continue en ce point.

Car, étant donnée une suite $t_1, t_2, \ldots$ convergente vers t, l'égalité $f(t) = \lim\limits_{n=\infty} f(t_n)$ signifie que, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$, l'égalité $[f(t)]^i = \lim\limits_{n=\infty} [f(t_n)]^i$ est remplie.

V. Exemples fondamentaux des produits cartésiens.

1. $\mathcal{J}$ désignant l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathcal{J}^n$, c. à d. le produit cartésien de n facteurs identiques à $\mathcal{J}$, est un cube à n dimensions. $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est l'ensemble de toutes les suites infinies extraites de l'intervalle $\mathcal{J}$ [1]).

2. $\mathcal{X}$ désignant un espace composé de deux éléments, considérons l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{X}^{\aleph_0}$. Chaque point de l'espace $\mathcal{C}$ est donc une suite infinie composée de deux éléments. Désignons ces deux

---

[1]) On prouve facilement que l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est homéomorphe au *„cube fondamental de Hilbert"* („Fundamentalquader"), composé de toutes les suites $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$, où $\mathfrak{z}^{(i)} \leqslant 1/i$ et où la distance de deux suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ est, par définition, égale à $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{z}^{(i)} - \mathfrak{y}^{(i)})^2}$. Cf. D. Hilbert, Gött. Nachr, 1906, p. 200 et 439.

éléments par les chiffres 0 et 2 et faisons correspondre à la suite considérée le nombre réel de l'intervalle 01 dont elle constitue le développement dans le système de numération triadique. Ainsi $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \dots$ étant une suite composée de chiffres 0 et 2 et $x(\mathfrak{z})$ étant le nombre correspondant de l'intervalle 01, on a

$$x(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}^{(1)}}{3} + \frac{\mathfrak{z}^{(2)}}{3^2} + \dots + \frac{\mathfrak{z}^{(i)}}{3^i} + \dots$$

Cette correspondance est, comme on prouve facilement, une homéomorphie entre l'espace $\mathcal{C}$ et l'ensemble de tous les nombres de l'intervalle 01 qui se laissent écrire dans le système de numération triadique sans le chiffre 1. Ce dernier ensemble, appelé *ensemble parfait non-dense de Cantor* [1]), peut donc être identifié — au point de vue topologique — avec l'ensemble $\mathcal{C}$.

3. $\mathcal{X}$ désignant l'ensemble de tous les nombres naturels, considérons l'espace $\mathcal{N} = \mathcal{X}^{\aleph_0}$. Cet espace est homéomorphe à l'*ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle* 01 [2]).

Faisons, en effet, correspondre à chaque suite infinie $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \dots$ de nombres naturels la fraction continue

$$x(\mathfrak{z}) = \frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(1)}} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(2)}} + \dots + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(i)}} + \dots$$

La fonction $x(\mathfrak{z})$ est bicontinue, car, d'après les propriétés élémentaires des fractions continues, pour que l'on ait $x(\mathfrak{z}) = \lim_{n=\infty} x(\mathfrak{z}_n)$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^{(i)} = \mathfrak{z}^{(i)}$, quel que soit i; or cette dernière condition exprime que $\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$.

VI. Espaces séparables. *Un espace est dit séparable* [3]), *lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable.* Si l'espace est un $\mathcal{L}^*$, cela revient à supposer qu'il existe une suite infinie $r_1, r_2, \dots$

[1]) G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 590.

[2]) L'espace $\mathcal{N}$ est dit aussi *„espace 0-dimensionnel de Baire"*, lorsqu'on le métrise d'une manière qu'il devienne un espace complet.

[3]) d'après M. Fréchet, Rend. Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), p. 23. Pour les espaces *localement séparables* (notion due à P. Urysohn, Fund. Math. 9 (1927), p. 119), cf. W. Sierpiński, Fund Math. 21 (1933).

(composée d'éléments différents ou non) telle que chaque point de l'espace soit limite d'une sous-suite de la suite considérée.

Une image continue d'un espace séparable est séparable.

Le produit cartésien de deux espaces séparables est séparable. En effet, si $r_1, r_2, \dots$ est une suite dense dans l'espace $\mathcal{X}$ et $s_1, s_2, \dots$ est une suite dense dans l'espace $\mathcal{Y}$, il résulte du N°IV que la suite $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots$ est dense dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

D'une façon générale, *$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ étant une suite d'espaces séparables, l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ est séparable.*

Soient, en effet, R_i un ensemble dénombrable, dense dans $\mathcal{X}_i$ et r_i un élément fixe extrait de R_i. Soit $\mathfrak{R}$ la famille de toutes les suites $\mathfrak{r}$ telles que: 1° quel que soit i, on a $\mathfrak{r}^i \in R_i$, 2° à partir d'un certain indice m (variant avec $\mathfrak{r}$) on a constamment:

$$\mathfrak{r}^m = r_m, \quad \mathfrak{r}^{m+1} = r_{m+1}, \dots$$

La famille $\mathfrak{R}$ est évidemment dénombrable. Afin de prouver qu'elle est dense dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$, considérons, pour un point donné $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ de cet espace et pour chaque entier i, une suite $r_{i1}, r_{i2}, \dots$ extraite de R_i et convergente vers $\mathfrak{z}^i$. Posons:

$$\mathfrak{r}_1 = r_{11}, r_2, r_3, \dots$$
$$\mathfrak{r}_2 = r_{12}, r_{22}, r_3, r_4, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathfrak{r}_n = r_{1n}, r_{2n}, r_{3n}, \dots r_{nn}, r_{n+1}, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Il vient $\mathfrak{r}_n \in \mathfrak{R}$ et, pour chaque i, $\mathfrak{z}^i = \lim_{n=\infty} \mathfrak{r}_n^i$, donc $\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{r}_n$, ce qui prouve que l'ensemble $\mathfrak{R}$ est dense dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$

Exemple. L'intervalle $\mathcal{J}$ est séparable, puisque l'ensemble des nombres rationnels y est dense. D'après le théorème précédent, *l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est également séparable* (un ensemble dense et dénombrable y est formé notamment de points ayant toutes les coordonnées rationnelles et n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées différentes de zéro).

VII. Rapports aux espaces de Hausdorff. Dans un espace ayant pour terme primitif la notion d'entourage ouvert (§ 7, III) on admet que *le point p est la limite de la suite $p_1, p_2, \ldots$ lorsque, pour chaque entourage U de p, il existe un indice à partir duquel on a $p_n \varepsilon U$.* Les axiomes A — D de M. Hausdorff impliquent les conditions 1^0 — 3^0.

En effet, on voit d'abord qu'une suite ne peut avoir deux limites différentes p et q, car il existe, en vertu de D, deux entourages U et V de p et q sans points communs. Les conditions 1^0 et 2^0 étant évidentes, supposons pour prouver 3^0 que la suite $p_1, p_2, \ldots$ ne converge pas vers p; cela veut dire qu'il existe un entourage U de p et une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ qui est située en dehors de U; par conséquent, aucune suite extraite de celle-ci ne pourrait converger vers p, c. q. f. d.

Dans les espaces de Hausdorff, on définit la fermeture $\overline{X}$ d'un ensemble X comme composée de tous les points p tels que chaque entourage de p contient des points de X (§ 7, III). Nous allons démontrer que cette définition est d'accord avec celle adoptée au § 14, IV, d'après laquelle $p \varepsilon \overline{X}$, lorsque p est un point-limite d'une suite de points extraite de X, c. à d. lorsque, quel que soit l'entourage U de p, tous les points de cette suite à partir d'un certain indice appartiennent à U.

Supposons, en effet, que chaque entourage de p contient des points de X. Soit $\{U_n\}$ la suite d'entourages de p mentionnée dans l'ax. E. D'après B l'ensemble $U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_n$ contient un entourage de p et celui-ci contient par hypothèse un point p_n de X, d'où $p_n \varepsilon X \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$. Soit U un entourage arbitraire de p. D'après l'ax. E, il existe un n_0 tel que $U_{n_0} \subset U$; de sorte que, pour $n > n_0$, on a $p_n \varepsilon U_1 \cdot \ldots \cdot U_n \subset U_{n_0} \subset U$. Donc $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$.

Inversement, si $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ où $p_n \varepsilon X$ et si U est un entourage de p, on a, pour n suffisamment grand, $p_n \varepsilon U$, d'où $UX \neq 0$.

On voit ainsi que *tous les théorèmes concernant l'espace $\mathfrak{L}^*$ sont applicables aux espaces de Hausdorff.*

§ 15. Espaces métriques.

I. Définitions. Un ensemble est dit *espace métrique*, lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple x, y de ses éléments un nombre réel $|x - y|$, dit leur *distance*, assujetti aux conditions:

(i) *l'égalité $|x - y| = 0$ équivaut à l'égalité $x = y$,*
(ii) $|x - y| + |x - z| \geqslant |y - z|$ (loi du triangle) [1]).

En substituant dans (ii) respectivement y et x à z, on en conclut que $|x - y| \geqslant 0$ et que $|x - y| = |y - x|$, de sorte que la distance est une fonction non négative et symétrique par rapport aux deux variables [2]).

Un ensemble est dit *sphère* ouverte (sphère fermée) de centre p et de rayon r, lorsqu'il est composé de tous les points x tels que $|p - x| < r$ (tels que $|p - x| \leqslant r$).

Un espace ayant la fermeture pour notion primitive est dit *métrisable*, s'il est possible d'y définir la distance de façon que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées et que l'ensemble $\overline{X}$ se compose des tous les points p tels que chaque sphère de centre p contienne des points de X.

Remarque. Si l'on remplace la condition (i) par $|x - x| = 0$ (de sorte que la distance entre deux points différents ne soit pas nécessairement $\neq 0$), on peut décomposer l'espace en sous-ensembles disjoints, en rangeant dans un même sous-ensemble tous les points dont la distance deux à deux est 0 (on dit dans ce cas que les points à distance 0 sont *identifiés*). La distance entre deux ensembles X et Y de ce genre est définie comme $|x - y|$, où $x \varepsilon X$ et $y \varepsilon Y$. Le choix des points x et y est indifférent, car la condition $|x - x'| = 0$ implique $|x' - y| \leqslant |x - x'| + |x - y| = |x - y|$.

On vérifie facilement que les sous-ensembles en question, considérés comme des points, constituent un espace métrique.

Exemples. Le cas le plus simple, dont nous avons emprunté les notations, est celui de l'ensemble des nombres réels, où la distance est définie, comme d'habitude, par le module de la différence. D'une façon plus générale, l'espace cartésien à n dimensions est un espace métrique, la distance des points $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ étant égale à $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

---

[1]) La notion est due à M. Fréchet, Rend. Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), p. 17. Le terme „espace métrique" provient de M. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 211. Pour la définition du texte, voir M. Fréchet, *Relations entre les notions de limite et de distance*, Trans. Amer. Math. Soc. 19 (1918), p. 54 et A. Lindenbaum, *Contributions à l'étude de l'espace métrique I*, Fund. Math. 8 (1926), p. 211.

[2]) Pour les espaces munis d'une „distance" non symétrique, voir W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. Journ. of Math. 53 (1931), p. 675.

La définition de la sphère coïncide alors avec celle de la sphère n-dimensionnelle, adoptée en Géométrie.

L'ensemble de toutes les *fonctions bornées* $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, devient un espace métrique, lorsqu'on définit la distance entre deux fonctions par la formule $|f_1 - f_2| = \max |f_1(x) - f_2(x)|$ [1].

L'ensemble des *fonctions de carrés sommables* avec la distance

$$|f_1 - f_2| = \left\{ \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

est un espace métrique, si l'on identifie les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

Un ensemble de puissance arbitraire peut être considéré comme un espace métrique, lorsqu'on y définit la distance comme égale identiquement à 1.

II. Relations entre les espaces métriques et les autres espaces. Un espace métrique peut être considéré comme un espace de Hausdorff (§ 7, III), lorsque *toute sphère ouverte de centre p est admise comme un entourage du point p.* On vérifie facilement les axiomes A—D de M. Hausdorff. L'ax. E est aussi réalisé, car toute sphère ouverte contient une sphère concentrique de rayon rationnel.

On en conclut en vertu de § 14, VII et § 7, III que:

1° *un espace métrique peut être considéré comme un espace* $\mathcal{L}^*$, *en convenant que la formule* $p = \lim_{n=\infty} p_n$ *signifie que* $\lim_{n=\infty} |p - p_n| = 0$, c. à d. que *chaque sphère de centre p contient, à partir d'un certain indice, tous les points* p_n,

2° *un espace métrique satisfait aux axiomes I—III, lorsqu'on convient que la formule* $p \varepsilon \overline{X}$ *exprime que chaque sphère de centre p contient des points de l'ensemble X,*

3° *en admettant les conventions* 1° *et* 2°, *la condition* $p \varepsilon \overline{X}$ *équivaut à l'existence d'une suite* $p_1, p_2, \ldots$ *extraite de X et convergente vers p,*

4° *pour que p soit un point intérieur de X, il faut et il suffit que p soit le centre d'une sphère contenue dans X.*

[1]) M. Fréchet, op. cit., Rend. di Palermo, p. 36. Cette définition de la distance entre les fonctions remonte (d'après M. Fréchet) à Weierstrass. Voir aussi plus loin N° VIII.

III. Diamètre. Continuité. Oscillation. Le *diamètre* d'un ensemble X, en symboles: $\delta(X)$, est la borne supérieure des distances de ses points. Si $\delta(X)$ est fini, l'ensemble X est dit *borné.*

On établit facilement les propositions suivantes:

(1) $\{\delta(X) = 0\} \equiv \{X$ *est vide ou se compose d'un seul point*$\}$

(2) *si* $X \subset Y$, *on a* $\delta(X) \leqslant \delta(Y)$ (3) $\delta(\overline{X}) = \delta(X)$

(4) *si* $XY \neq 0$, *on a* $\delta(X+Y) \leqslant \delta(X) + \delta(Y)$.

Si l'on transforme un espace arbitraire $\mathcal{X}$ en un espace métrique $\mathcal{Y}$, la condition de *continuité* de la fonction $f(x)$ au point p (cf. § 13, II (3)) peut être exprimée de cette façon: *à chaque* $\varepsilon > 0$ *correspond un entourage E de p tel que la condition* $x \varepsilon E$ *entraîne l'inégalité* $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. En admettant que ε est de la forme $1/n$, cela veut dire qu'il existe une suite d'entourages E_n de p tels que $\lim_{n=\infty} \delta[f(E_n)] = 0$. Ainsi, G_n désignant la somme de tous les ensembles ouverts $G \subset \mathcal{X}$ tels que $\delta[f(G)] < 1/n$, l'ensemble $C = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$ constitue *l'ensemble des points de continuité de la fonction f; c'est donc un* G_δ.

Nous allons généraliser cet énoncé, en introduisant la notion d'oscillation (qui permet de „mesurer" la discontinuité). Notamment, étant donnée une fonction $f(x)$ définie aux points x d'un sous-ensemble A de $\mathcal{X}$, on appelle *oscillation de f dans un point p* (qu'il appartienne à A ou non) la borne inférieure des nombres $\delta[f(E)]$ où E désigne un entourage variable du point p. En formule:

$$\omega(p) = \min \delta[f(E)].$$

Ainsi par ex., pour $f(x) = \sin 1/x$, on a $\omega(0) = 2$.

Evidemment, si p n'appartient pas à $\overline{A}$, on a $\omega(p) = 0$, car pour $E = 1 - \overline{A}$ l'ensemble $f(E)$ est vide, donc $\delta[f(E)] = 0$.

En attribuant à G_n le même sens qu'auparavant, on voit aussitôt que G_n est l'ensemble des points où l'oscillation est $< 1/n$. Par conséquent *l'ensemble des points où l'oscillation s'annule est un* G_δ (c'est précisément l'ensemble C). Enfin $A \cdot C$ étant l'ensemble des points de continuité de la fonction f, cet ensemble est un G_δ *relatif à A.*

Il est à remarquer que dans le cas où les deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont métriques, la condition de continuité donnée au début de ce N° peut être exprimée dans sa forme classique: à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que la condition $|x-p| < \delta$ entraîne l'inégalité $|f(x)-f(p)| < \varepsilon$ (la sphère de centre p et de rayon δ remplace ici l'entourage E).

IV. Ecart de deux ensembles. Sphère généralisée.

L'écart des ensembles A et B, en symboles: $\rho(A,B)$, est la borne inférieure des distances $|x-y|$ pour x parcourant A et y parcourant B (les ensembles A et B sont supposés non vides) [1].

On a les formules suivantes:

(1) $\rho(x,y) = |x-y|$ (2) $\rho(\bar{A},\bar{B}) = \rho(A,B)$

(3) $\{\rho(x,A)=0\} \equiv \{x \varepsilon \bar{A}\}$ (4) $\rho(A,C) \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C) + \delta(B)$

(5) *la fonction $\rho(x,A)$ est, pour A fixe, une fonction continue de x.*

Pour prouver la dernière proposition, considérons deux points x et x' tels que $|x-x'| < \varepsilon$. Soit $a \varepsilon A$ et $|x-a| < \rho(x,A)+\varepsilon$. Il vient $\rho(x',A) \leqslant |x'-a| < \rho(x,A) + 2\varepsilon$, d'où la continuité de ρ.

Une *sphère généralisée ouverte de rayon r et de centre A (supposé non vide)* est, par définition, l'ensemble de tous les points x tels que $\rho(x,A) < r$. En remplaçant $<$ par $\leqslant$, on parvient à la définition de la sphère généralisée *fermée*.

La fonction $\rho(x,A)$ étant continue et l'ensemble des nombres réels $< r$ étant ouvert, la sphère généralisée ouverte est en effet un ensemble ouvert (cf. § 13, IV); de même la sphère généralisée fermée est un ensemble fermé. On voit, en outre, que la sphère généralisée ouverte est la somme des sphères ouvertes de rayon r et de centre appartenant à A.

D'après (2) on n'altère pas la sphère, en remplaçant A par $\bar{A}$.

A étant un ensemble fermé et S_n désignant la sphère ouverte de centre A et de rayon $1/n$, on a

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} S_n. \tag{6}$$

[1]) M. Hausdorff désigne l'écart par $\delta(A,B)$ et le diamètre par $d(A)$. Voir *Mengenlehre*, p. 145.

Donc, *chaque ensemble fermé est un G_δ* [1]) et, par raison de symétrie, *chaque ensemble ouvert est un F_σ*.

V. Transformation limitative [2]). *Chaque espace métrique est homéomorphe à un espace borné.*

Définissons, en effet, une „nouvelle distance" par la formule

$$\|x-y\| = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

La distance $\|x-y\|$ satisfait aux axiomes (i) et (ii), qui définissent la notion de l'espace métrique. En effet, l'égalité $\|x-y\|=0$ équivaut à l'égalité $|x-y|=0$. On a en outre:

$$\|x-y\| + \|x-z\| \geqslant \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|x-z|} + \frac{|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|} =$$

$$= \frac{|x-y|+|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{|x-y|+|x-z|}} \geqslant \frac{1}{1+\dfrac{1}{|y-z|}} = \|y-z\|.$$

Les deux espaces métriques, l'un métrisé par la distance $|x-y|$ et l'autre par $\|x-y\|$, sont homéomorphes, c. à d. que l'on a l'équivalence $\{\lim_{n=\infty} |x_n - y| = 0\} \equiv \{\lim_{n=\infty} \|x_n - y\| = 0\}$.

Cela résulte directement du fait que la fonction $u = \dfrac{t}{1+t}$ est bicontinue dans le domaine des nombres non négatifs.

Enfin le diamètre de l'espace est $\leqslant 1$ (relativement à la distance $\|x-y\|$).

VI. Métrisation du produit cartésien.

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces métriques. D'après § 14, IV, le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de ces espaces se compose de tous les couples (x,y) où $x \varepsilon \mathcal{X}$ et $y \varepsilon \mathcal{Y}$, la limite étant définie par la convention que la suite

[1]) C'est une propriété importante des espaces métriques, qui est considérée par certains auteurs comme axiome topologique. Voir „propriété $\mathcal{F}$" chez P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 286.

[2]) Cf. „Schränkungstransformation" chez M. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen I*, Berlin 1921, p. 115; cf. aussi R. Baire, Acta Math. 30 (1906), p. 6.

$\mathfrak{z}_n = (x_n, y_n)$ converge vers $\mathfrak{z} = (x, y)$, lorsque $\lim_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim_{n=\infty} y_n = y$. Le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ peut être métrisé par la formule [1])

$$(1) \qquad |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2}.$$

On voit, en effet, que, pour que $\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| = 0$.

Soit, d'une façon plus générale, $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, un espace métrique de diamètre $\leqslant 1$ (cf. N° V). L'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ se compose de points $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$, le point $\mathfrak{z}_n$ tendant vers $\mathfrak{z}$, lorsque la i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}_n$ tend vers la i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$. On pose

$$(2) \qquad |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i| \text{ [2])}.$$

La distance ainsi définie satisfait aux conditions (i) et (ii), car l'équivalence $\{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = 0\} \equiv \{\mathfrak{z} = \mathfrak{y}\}$ est évidente et la règle du triangle résulte de la formule

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| + |\mathfrak{z} - \mathfrak{w}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i| + |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{w}^i|] \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\mathfrak{y}^i - \mathfrak{w}^i| = |\mathfrak{y} - \mathfrak{w}|.$$

Il s'agit de prouver que, pour que $\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| = 0$, c. à d. que l'on a l'équivalence:

$$\{\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| = 0\} \equiv \{\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| = 0, \text{ quel que soit } i\}.$$

Or, la condition $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| = 0$ entraîne pour chaque i $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| = 0$, car $|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| \leqslant 2^i |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n|$. Supposons que, inversement, $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| = 0$, quel que soit i. Soit, pour un $\epsilon > 0$ donné, m un entier positif tel que $2^{-m} < \epsilon$. Soit j un entier tel que l'on ait $|\mathfrak{z}^1 - \mathfrak{z}_n^1| < \epsilon, \ldots, |\mathfrak{z}^m - \mathfrak{z}_n^m| < \epsilon$, pour tout $n > j$. En tenant compte du fait que $|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| < \delta(\mathcal{X}_i) \leqslant 1$, on en tire l'inégalité $|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2^{-i} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{z}_n^i| + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{-i} < 2\epsilon$, d'où $\lim_{n=\infty} |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_n| = 0$.

La distance $|x - y|$, *considérée comme fonction de la variable* $\mathfrak{z} = (x, y)$, *est continue.* Soit, en effet, $\mathfrak{a} = (a, b)$ un point donné et posons $|\mathfrak{z} - \mathfrak{a}| < \epsilon$. Il vient $|x - a| \leqslant |\mathfrak{z} - \mathfrak{a}| < \epsilon$ et $|y - b| < \epsilon$. Par conséquent

$$|x - y| \leqslant |x - a| + |a - b| + |b - y| < |a - b| + 2\epsilon$$

et

$$|a - b| \leqslant |a - x| + |x - y| + |y - b| < |x - y| + 2\epsilon,$$

donc $\big||x - y| - |a - b|\big| < 2\epsilon$, d'où la conclusion demandée (v. N° III).

VII. Distance de deux ensembles fermés. Espace $2^{\mathcal{X}}$.

Nous désignons par le symbole $2^{\mathcal{X}}$ *la famille de tous les ensembles fermés, bornés et non vides,* situés dans l'espace métrique $\mathcal{X}$. La notion d'écart entre les ensembles ne peut servir à métriser cet „espace": en désignant, par ex., par A l'ensemble composé du nombre 0, par B l'intervalle $1, 2$ et par C l'ensemble composé du nombre 3, on constate que l'écart ne satisfait pas à la loi du triangle (en outre, l'écart s'annule pour tout couple d'ensembles qui ont des points communs). Or, admettons la „métrique" suivante [1]): *la distance de deux ensembles A et B, en symboles:* dist (A, B), *est le plus grand des deux nombres:*

$$\max_{y \in B} \rho(x, B) \quad \textit{et} \quad \max_{x \in A} \rho(y, A).$$

L'ensemble $2^{\mathcal{X}}$ est un *espace métrique* (relativement à la notion de distance ainsi définie). En effet, on voit aussitôt que pour avoir dist $(A, B) = 0$, il faut et il suffit que $A = B$.

Quant à la loi du triangle, on a pour $x \in A$ et $y \in B$ (N° IV (4)):

---

[1]) Il y a bien d'autres définitions de distance qui peuvent être admises. Ainsi par ex. rien ne change au point de vue topologique, si on admet comme la distance des points $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}_1$ le plus grand des deux nombres $|x - x_1|$ et $|y - y_1|$ ou bien la somme de ces nombres.

[2]) Si l'on ne fait pas l'hypothèse que $\delta(\mathcal{X}_i) \leqslant 1$, on pose

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}{1 + |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}.$$

Cf. la formule de M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 82.

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chap. VIII, § 6. Cf. aussi D. Pompéju, Ann. de Toulouse (2) 7 (1905).

$$\rho(x, C) \leqslant |x - y| + \rho(y, C) \leqslant |x - y| + \operatorname{dist}(B, C),$$

d'où $\rho(x, C) \leqslant \min_{y \varepsilon B} |x - y| + \operatorname{dist}(B, C) = \rho(x, B) + \operatorname{dist}(B, C) \leqslant$ $\leqslant \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C)$ et par raison de symétrie, pour $z \varepsilon C$: $\rho(z, A) \leqslant \operatorname{dist}(B, A) + \operatorname{dist}(B, C)$, donc $\operatorname{dist}(A, C) \leqslant \operatorname{dist}(B, A) + \operatorname{dist}(B, C)$.

Observons, en outre, que:

(1) $$|a - b| = \operatorname{dist}[(a), (b)],$$

(2) $$\{\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \epsilon\} = \{A \subset R_\epsilon(B)\} \cdot \{B \subset R_\epsilon(A)\},$$

$R_\epsilon(X)$ désignant la sphère fermée de rayon ϵ et de centre X.

VIII. Espace fonctionnel. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques donnés, considérons, dans la famille des fonctions $y = f(x)$ qui transforment l'espace $\mathcal{X}$ (tout entier) en un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$, les fonctions *bornées*, en entendant par fonction bornée f une fonction telle que l'ensemble des distances $|f(x) - f(x')|$ est borné lorsque x et x' parcourent $\mathcal{X}$. *La famille des fonctions bornées peut être considérée comme un espace métrique lorsque la distance de deux fonctions est définie par la formule*

(⁰) $$|f_1 - f_2| = \max_{x \varepsilon \mathcal{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

En effet, d'abord la distance ainsi définie est toujours finie, car x' étant un point fixe, on a

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant |f_1(x) - f_1(x')| + |f_1(x') - f_2(x')| + |f_2(x') - f_2(x)|.$$

Comme, en outre, la condition $|f_1 - f_2| = 0$ équivaut évidemment à l'égalité $f_1 = f_2$, reste à vérifier la loi du triangle. Or $|f_1 - f_2| + |f_1 - f_3| = \max|f_1(x) - f_2(x)| + \max|f_1(x) - f_3(x)| \geqslant$ $\geqslant \max\{|f_1(x) - f_2(x)| + |f_1(x) - f_3(x)|\} \geqslant \max|f_2(x) - f_3(x)| = |f_2 - f_3|$.

Par définition de la convergence dans les espaces métriques, une suite de fonctions f_n converge vers f dans l'espace fonctionnel considéré, lorsque $\lim |f_n - f| = 0$, c. à d. lorsqu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond un $n(\epsilon)$ tel que l'on ait, pour $n > n(\epsilon)$, $\max_{x \varepsilon \mathcal{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$, donc que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$, quel que soit x.

On voit ainsi que la convergence entendue dans le sens de la formule (⁰) coïncide avec la *convergence uniforme* entendue dans le sens habituel.

IX. Espaces totalement bornés. Un espace est dit *totalement borné*, lorsqu'il se laisse décomposer pour chaque $\epsilon > 0$ en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \epsilon$ [1]).

Pour qu'un espace soit totalement borné, il faut et il suffit qu'à chaque $\epsilon > 0$ *corresponde un ensemble fini* F_ϵ *tel que* $\rho(x, F_\epsilon) < \epsilon$, *quel que soit* x.

En effet, l'espace étant supposé totalement borné, on a

$$1 = A_1^n + \dots + A_{k_n}^n, \quad \delta(A_i^n) < 1/n \quad \text{pour } i \leqslant k_n.$$

Soit p_i^n un point choisi de A_i^n. L'ensemble $F_{1/n}$ composé de points $p_1^n, \dots, p_{k_n}^n$ est l'ensemble demandé (pour $\epsilon > 1/n$).

Inversement, $F_{\epsilon/2}$ étant un ensemble satisfaisant à la condition du théorème, le système des sphères de rayon $\epsilon/2$ et de centre appartenant à $F_{\epsilon/2}$ présente le recouvrement demandé de l'espace.

La condition qui vient d'être établie peut s'exprimer à l'aide de la notion de distance des ensembles (N° VII) comme suit: *l'espace est la limite d'une suite d'ensembles finis* (notamment de la suite $F_1, F_{1/2}, \dots, F_{1/n}, \dots$).

Cela résulte aussi du théorème suivant: $\mathcal{X}$ *étant totalement borné,* $2^{\mathcal{X}}$ *l'est également*. Pour prouver ce dernier théorème, envisageons l'ensemble F_ϵ considéré auparavant; soit $H_{1,\epsilon}, \dots, H_{k,\epsilon}$ le système de tous les sous-ensembles de F_ϵ. A chaque ensemble fermé X faisons correspondre l'ensemble $H_{i,\epsilon}$ des points p de F_ϵ tels que $\rho(p, X) < \epsilon$; il vient $\operatorname{dist}(X, H_{i,\epsilon}) \leqslant \epsilon$.

L'espace $2^{\mathcal{X}}$ est donc totalement borné. Il est aussi *séparable*, puisque d'une façon générale *chaque espace totalement borné est séparable* (pour démontrer le dernier énoncé, on n'a qu'à considérer l'ensemble des points p_i^n, $n = 1, 2, \dots, i \leqslant k_n$, définis auparavant).

Remarques. 1. Dans un espace *métrique arbitraire*, à chaque $\epsilon > 0$, correspond un ensemble *fermé et isolé* (fini ou infini) F_ϵ tel que $\rho(x, F_\epsilon) < \epsilon$, quel que soit x. Rangeons, en effet, tous les points de l'espace en une suite transfinie $p_0, p_1, \dots, p_\alpha, \dots$ Posons $p_{\alpha_0} = p_0$ et d'une façon générale, pour $\gamma > 0$, soit p_{α_γ} le point à indice minimum tel que $|p_{\alpha_\gamma} - p_{\alpha_\xi}| \geqslant \epsilon$, quel que soit $\xi < \gamma$ (bien entendu, si un point p_{α_γ} de ce genre existe). F_ϵ est l'ensemble des p_{α_γ}.

2. Considérons comme l'espace $\mathcal{X}$ la courbe $y = \sin 1/x$, $0 < x \leqslant 1$, la distance de deux points p et q étant définie comme égale au diamètre de l'arc pq. Cet

---

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 108.

espace est évidemment séparable et borné (même complet), mais n'est pas totalement borné. La famille de ses sous-ensembles situés sur l'axe des abscisses est indénombrable et la distance entre deux éléments quelconques de cette famille dépasse l'unité; par conséquent cette famille et, à plus forte raison, *l'espace* $2^{\mathcal{X}}$ *est non séparable.*

Il est remarquable que la courbe $\mathcal{X}$ peut être transformée par homéomorphie (notamment par projection sur l'axe des x) de façon que l'espace $2^{\mathcal{X}}$ devienne séparable.

On voit ainsi que les propriétés topologiques de l'espace $2^{\mathcal{X}}$ ne sont pas nécessairement des propriétés topologiques de l'espace $\mathcal{X}$. Cela tient au fait que la définition de l'espace $2^{\mathcal{X}}$ n'a pas été topologique.

X. Produits cartésiens des espaces totalement bornés.

Soit $\{\mathcal{X}_i\}$ une suite (finie ou infinie) d'espaces totalement bornés et tels que $\delta(\mathcal{X}_i) \leqslant 1$. Nous allons prouver que leur *produit cartésien, métrisé par la formule* (2) *du* N° VI, *est totalement borné.*

Soient $\epsilon > 0$ et i un entier tel que $2^{-i} < \epsilon/2$. Pour chaque $l \leqslant i$, il existe par hypothèse un système fini de points: $r_{l1}, \dots, r_{lk_l}$ tels que chaque point de l'espace $\mathcal{X}_l$ se trouve situé à une distance $< \epsilon/2$ d'un point appartenant à ce système. Soit, pour $n > i$, r_n un point arbitrairement choisi de $\mathcal{X}_n$.

Considérons, pour i fixe, le système fini des suites de la forme

$$\mathfrak{y} = [r_{1j_1}, r_{2j_2}, \dots, r_{ij_i}, r_{i+1}, r_{i+2}, \dots] \qquad \text{où } j_1 \leqslant k_1, \dots, j_i \leqslant k_i.$$

Etant donné un point $\mathfrak{z} = [x_1, x_2, \dots]$ de l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$, il existe, pour $l \leqslant i$, un point r_{lj_l} tel que $|r_{lj_l} - x_l| < \epsilon/2$, d'où

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{z}| = \sum_{l=1}^{i} 2^{-l} |r_{lj_l} - x_l| + \sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n} |r_n - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

L'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ est donc totalement borné.

L'intervalle $\mathcal{J} = 01$ étant manifestement totalement borné, il en est donc de même du cube n-dimensionnel $\mathcal{J}^n$, ainsi que de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.

XI. Transformations continues des espaces métriques en polytopes. Citons d'abord quelques notions qui se rattachent à la Topologie combinatoire.

$p_0, \dots, p_n$ étant un système de points situés dans un espace euclidien, on appelle *simplexe* (géométrique ouvert) $p_0 \dots p_n$ l'ensemble des points p de la forme:

(1) $p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$ où $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$, $0 < \lambda_i$, $i = 0, 1, \dots, n$,

les points p et p_i étant considérés comme des vecteurs [1]).

Les coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ portent le nom des *coordonnées barycentriques* du point p relatives aux points $p_0, \dots, p_n$ [2]). Chaque simplexe de la forme $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ est dit *face* du simplexe $p_0 \dots p_n$. Les faces „0-dimensionnelles", c. à d. les points $p_0, \dots, p_n$ s'appellent *sommets* du simplexe. Evidemment, S désignant le simplexe $p_0 \dots p_n$, $\bar{S}$ est la somme de toutes les faces $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ et se compose parsuite de tous les points p satisfaisant à la condition qui s'obtient de (1), lorsqu'on remplace l'inégalité $0 < \lambda_i$ par $0 \leqslant \lambda_i$. On peut aussi définir $\bar{S}$ comme le plus petit ensemble convexe contenant les points $p_0, \dots, p_n$.

Si l'on a une relation de la forme (1), on dit que p dépend *linéairement* des points $p_0, \dots, p_n$. Un simplexe dont les sommets sont linéairement indépendants les uns des autres est dit *simple*; dans le cas contraire il s'appelle *singulier*. Un simplexe simple S à $n+1$ sommets est dit n-dimensionnel; ainsi, en particulier, si $n = 0$, S se réduit à un seul point, si $n = 1$, le simplexe $p_0 p_1$ est un segment rectiligne sans extrémités, si $n = 2$, $p_0 p_1 p_2$ est l'intérieur d'un triangle etc.

Théorème [3]). *Etant donnés un système de points $p_0, \dots, p_n$ d'un espace euclidien et un espace métrique $\mathcal{X}$ décomposé en $n+1$ ensembles ouverts:*

(2) $$\mathcal{X} = G_0 + \dots + G_n,$$

il existe une fonction continue $y = f(x)$ qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de la fermeture $\bar{S}$ du simplexe $S = p_0 \dots p_n$ de façon que l'on ait, quel que soit le système d'indices $i_0, \dots, i_k$:

(3) $$f[G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} - \sum_{i \neq i_j} G_i] \subset p_{i_0} \dots p_{i_k},$$

---

1) Etant donnés dans l'espace à k dimensions deux vecteurs $p = (x_1, \dots, x_k)$ et $r = (y_1, \dots, y_k)$, la somme $p + r$ est par définition le vecteur $(x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$; λ étant un nombre réel, on pose $\lambda p = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k)$.

2) Le point p est bien le centre de gravité du système des points $p_0, \dots, p_n$, quand le point p_i est porteur de la masse λ_i.

3) Cf. P. Alexandroff, C. R. Paris t. 183 (1926), p. 640, Math. Ann. 98 (1928), p. 635, Ann. of Math. 30 (1928), p. 6, ainsi que ma note *Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), pp. 191—196.

où la sommation s'étend à tous les indices i qui n'appartiennent pas au système $i_0, \dots, i_k$.

Posons $F_i = \mathcal{X} - G_i$. Convenons que, pour $F = 0$, $\rho(x, F) = 1$ quel que soit x. L'égalité $\rho(x, F_i) = 0$ équivaut donc à la formule $x \varepsilon F_i$. En outre, la somme $\rho(x, F_0) + \dots + \rho(x, F_n)$ ne s'annule jamais, car elle ne pourrait s'annuler que si tous ses sommandes s'annulaient, mais alors x n'appartiendrait à aucun G_i, contrairement à (2).

La fonction $\lambda_i(x)$ qui suit est donc finie et continue:

$$\lambda_i(x) = \frac{\rho(x, F_i)}{\rho(x, F_0) + \dots + \rho(x, F_n)}.$$

Or, soit $f(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0 + \dots + \lambda_n(x) \cdot p_n$. L'égalité évidente $\lambda_0(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1$ implique que $f(x)$ est le point de $\bar{S}$ ayant les nombres $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$ pour coordonnées barycentriques. L'espace $\mathcal{X}$ se trouve ainsi transformé d'une manière continue en un sous-ensemble de $\bar{S}$.

Afin d'établir l'inclusion (3), considérons un point x tel qu'on ait $x \varepsilon G_{i_j}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$ et x *non*-ε G_i pour $i \neq i_j$. Il vient x *non*-ε F_{i_j} et $x \varepsilon F_i$, d'où $\rho(x, F_{i_j}) \neq 0$ et $\rho(x, F_i) = 0$, par conséquent $\lambda_{i_j}(x) \neq 0$ et $\lambda_i(x) = 0$, ce qui implique finalement que le point $f(x)$ appartient au simplexe $p_{i_0} \dots p_{i_k}$.

Corollaire. Dans le cas où le simplexe S est simple, l'inclusion (3) *peut être remplacée par l'égalité*

$$G_{i_0} \cdot \dots \cdot G_{i_k} - \sum_{i \neq i_j} G_i = f^{-1}(p_{i_0} \dots p_{i_k}) \; ^{1)}. \tag{4}$$

Car les faces d'un simplexe simple sont deux à deux disjointes.

XII. Nerf d'un système d'ensembles. Etant donnés un système de points linéairement indépendants $p_0, \dots, p_n$ (dans un espace euclidien) et un système d'ensembles arbitraires $G_0, \dots, G_n$, on dit que le complexe formé de tous les simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0} \cdot \dots \cdot G_{i_k} \neq 0$ *représente le nerf du système des ensembles*

[1] Le membre gauche de cette égalité est nommé, d'après G. Boole (en Algèbre de la Logique), „*constituant* de l'univers du discours $\mathcal{X}$ relatif au système $G_0, \dots, G_n$". L'univers du discours se décompose en constituants; les constituants sont disjoints deux à deux.

considérés [1]. Soit P le polytope-somme des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ en question. *La fonction f considérée dans le théorème précédent transforme l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de P*, car en vertu de l'égalité (4) la condition $G_{i_0} \cdot \dots \cdot G_{i_k} = 0$ entraîne $f^{-1}(p_{i_0} \dots p_{i_k}) = 0$, ce qui veut dire qu'aucune valeur de la fonction f n'appartient au simplexe $p_{i_0} \dots p_{i_k}$.

Il est à remarquer que chaque sous-ensemble d'un simplexe simple se laisse transformer d'une façon continue en un polytope-somme de certaines faces du simplexe sans qu'aucun point ne quitte la fermeture de la face à laquelle il appartenait [2]. Par conséquent, si $f(\mathcal{X})$ est ce sous-ensemble et $g(p)$ en désigne la transformation en question, la fonction superposée $h(x) = gf(x)$ satisfait à la condition $h^{-1}(p_{i_0} \dots p_{i_k}) \subset G_{i_0} \cdot \dots \cdot G_{i_k}$.

§ 16. Axiome IV (de séparation).

I. Axiome IV [3]. *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe un ensemble ouvert G tel que $A \subset G$ et $\bar{G} \cdot B = 0$.*

L'espace considéré dans ce § est assujetti aux axiomes I—IV.

II. Systèmes semblables au sens combinatoire. Deux systèmes finis d'ensembles $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_n$ sont dits *semblables au sens combinatoire* [4], lorsqu'on a l'équivalence

$$\{A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k} = 0\} \equiv \{B_{i_1} \cdot \dots \cdot B_{i_k} = 0\},$$

[1] Voir P. Alexandroff, C. R. Paris t. 184 (1927), p. 317. Cf. la notion de „polyèdre réciproque" de H. Poincaré, *Complément à l'analysis situs* § VII, Rendic. di Palermo 13 (1899).

[2] Voir ma note citée, Fund. Math. 20, p. 193.

[3] Cf. H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie I*, Math. Ann. 88 (1923), p. 301. L'axiome IV est aussi appelé de „normalité". M. E. Čech appelle *parfaitement normal* un espace topologique où, outre l'ax. IV, l'axiome suivant est réalisé: chaque ensemble fermé est un G_δ (cf. § 15, IV). En vertu du théorème du N° IV de ce §, les espaces parfaitement normaux présentent une généralisation des espaces métriques. Comme le prouve M. Čech (v. par ex. *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux*, Bull. Acad. Bohème, 1932), un grand nombre de propriétés importantes des espaces métriques restent valables dans les espaces parfaitement normaux.

[4] d'après P. Alexandroff, Annals of Math. 30 (1928), p. 16.

quel que soit le système d'indices ($\leqslant n$); autrement dit, lorsque le même complexe „représente le nerf" des deux systèmes (§ 15, XII).

Théorème [1]. *Etant donné un système fini d'ensembles fermés $F_1, \dots, F_n$, chaque F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est contenu dans un ensemble ouvert G_i tel que le système $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_n$ est semblable au sens combinatoire au système donné.*

Considérons, en effet, tous les produits de la forme $F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_k}$ où $F_1 \cdot F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_k} = 0$. Soit S leur somme. L'ensemble S étant fermé et disjoint de F_1, il existe d'après l'ax. IV un ensemble ouvert G_1 tel que $F_1 \subset G_1$ et $\bar{G}_1 \cdot S = 0$. Nous allons prouver que le système $\bar{G}_1, F_2, \dots, F_n$ est semblable au système $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Considérons à ce but un produit vide dont les facteurs appartiennent au deuxième système; il s'agit de montrer que le produit des facteurs correspondants du premier système est également vide. On peut évidemment se borner au cas où F_1 se trouve parmi ces facteurs. Le produit considéré est alors de la forme $F_1 \cdot F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_k} = 0$. Il en résulte que $F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_k} \subset S$ et comme $\bar{G}_1 \cdot S = 0$, il vient $\bar{G}_1 \cdot F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_k} = 0$.

Ceci établi, procédons par induction. Nous supposons que le système $F_1, \dots, F_n$ est semblable au système $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{k-1}, F_k, \dots, F_n$, où $F_1 \subset G_1, \dots, F_{k-1} \subset G_{k-1}$. Il existe alors, comme nous venons de prouver, un ensemble ouvert G_k tel que $F_k \subset G_k$ et que le système $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{k-1}, F_k, \dots, F_n$ est semblable au système $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{k-1}, \bar{G}_k, F_{k+1}, \dots, F_n$. Ce dernier est donc semblable à $F_1, \dots, F_n$, puisque la propriété d'être semblable est transitive.

Le théorème est ainsi démontré complètement.

Corollaire. Etant donné un système d'ensembles ouverts $G_1, \dots, G_n$ tel que $1 = G_1 + \dots + G_n$, il existe un système d'ensembles ouverts $H_1, \dots, H_n$ tel que $1 = H_1 + \dots + H_n$ et $\bar{H}_i \subset G_i$.

En appliquant le théorème précédent aux ensembles $F_i = 1 - G_i$, on en déduit l'existence des ensembles ouverts V_i tels que $F_i \subset V_i$ et que $\bar{V}_1 \cdot \dots \cdot \bar{V}_n = 0$. Posons $H_i = 1 - \bar{V}_i$. Il vient $\bar{H}_i = \overline{1 - \bar{V}_i} \subset$ $\subset \overline{1 - V_i} = 1 - V_i \subset 1 - F_i = G_i$ et $H_1 + \dots + H_n = 1 - (\bar{V}_1 \cdot \dots \cdot \bar{V}_n) = 1$.

[1]) Cf. W. Hurewicz, Math. Ann. 100 (1928). Ce théorème présente une généralisation de l'ax. IV.

III. Transformation de l'espace en ensemble linéaire.

A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe une fonction $f(x)$ continue, définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier et telle que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad f(x) = 0 \quad pour\ x \in A, \quad f(x) = 1 \quad pour\ x \in B\ [1]).$$

Au préalable, faisons correspondre à chaque fraction de la forme $r = k/2^n$ $(k = 0, 1, \dots, 2^n)$ un ensemble ouvert $G(r)$ de façon que

1° $A \subset G(0)$, $\quad \mathcal{X} - B = G(1)$,

2° *la condition $r < r'$ entraîne $\overline{G(r)} \subset G(r')$.*

Nous procédons par induction suivant l'exposant n. En identifiant $G(0)$ avec l'ensemble G de l'ax. IV, les conditions 1° et 2° se trouvent réalisées pour $n = 0$. Supposons qu'elles le soient encore pour $n - 1$; il s'agit de définir $G(k/2^n)$ pour k impair. Par hypothèse $\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G[(k+1)/2^n]$. Il existe donc, d'après l'ax. IV, un ensemble ouvert, que nous désignons par $G(k/2^n)$, tel que $\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G(k/2^n)$ et $\overline{G(k/2^n)} \subset G[(k+1)/2^n]$.

La fonction $G(r)$ est ainsi définie pour chaque r.

Posons $f(x) = 0$ pour $x \in G(0)$ et $f(x) =$ borne supérieure des r tels que $x \in \mathcal{X} - G(r)$ pour x *non*-$\in G(0)$. D'après 1° on a $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour $x \in B$.

Il reste à prouver que la fonction f est continue, c. à d. (§ 13, II (3)) qu'à chaque point x_0 et à chaque nombre naturel n vient correspondre un ensemble ouvert H contenant x_0 et tel que la condition $x \in H$ entraîne $|f(x_0) - f(x)| < 1/2^n$.

Soit r une fraction (diadique finie) telle que

$$f(x_0) < r < f(x_0) + 1/2^{n+1}.$$

Posons $H = G(r) - \overline{G(r - 1/2^n)}$ [en convenant que $G(s) = 0$ pour $s < 0$ et $G(s) = \mathcal{X}$ pour $s > 1$]. Or on a d'abord $x_0 \in H$. Car l'inégalité $f(x_0) < r$ implique $x_0 \in G(r)$, tandis que l'inégalité $r - 1/2^{n+1} < f(x_0)$ implique $x_0 \in \mathcal{X} - G(r - 1/2^{n+1}) \subset \mathcal{X} - \overline{G(r - 1/2^n)}$. En outre, l'hypothèse $x \in H$ entraîne $x \in G(r)$, d'où $f(x) \leqslant r$; comme elle entraîne aussi $x \in \mathcal{X} - \overline{G(r - 1/2^n)} \subset \mathcal{X} - G(r - 1/2^n)$, il vient $r - 1/2^n \leqslant f(x)$. Donc

$$f(x_0) - 1/2^n < f(x) < f(x_0) + 1/2^n.$$

[1]) P. Urysohn, *Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. 94 (1925), p. 290.

IV. Rapports à l'espace métrique.

Chaque espace métrique satisfait à l'axiome IV.

Nous allons démontrer la proposition plus générale suivante [1]:

(1) *A et B étant deux ensembles arbitraires situés dans un espace métrique, il existe deux ensembles fermés A^* et B^* tels que*

$$1 = A^* + B^*, \quad A \subset A^*, \quad B \subset B^*, \quad A^* \cdot B^* \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

Soient, pour $A \neq 0 \neq B$, A^* l'ensemble des x tels que $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, B)$ et B^* celui des x tel que $\rho(x, B) \leqslant \rho(x, A)$.

Les ensembles A^* et B^* sont fermés, car, la fonction $\rho(x, A)$ étant continue (§ 15, IV (5)), la fonction $\rho(x, B) - \rho(x, A)$ l'est aussi; l'ensemble $\underset{x}{E}\, [\rho(x, B) - \rho(x, A) \geqslant 0]$ est donc fermé (§ 13, IV).

Si $x \varepsilon A$, on a $\rho(x, A) = 0$, donc $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, B)$, d'où $x \varepsilon A^*$. De même $B \subset B^*$. Reste à prouver que $A^* \cdot B^* \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

Supposons que $x \varepsilon A^* \cdot B^*$. Donc $\rho(x, A) = \rho(x, B)$. Si, en outre, $x \varepsilon \bar{A}$, il vient $\rho(x, A) = 0$ et, comme l'égalité $\rho(x, B) = 0$ implique $x \varepsilon \bar{B}$ (§ 15, IV (3)), on a $A^* \cdot B^* \cdot \bar{A} \subset \bar{B}$, d'où $A^* \cdot B^* \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \subset \bar{A} \cdot \bar{B}$. L'inclusion inverse résulte du fait que, si $x \varepsilon \bar{A} \cdot \bar{B}$, on a $\rho(x, A) = 0 = \rho(x, B)$, d'où $x \varepsilon A^* \cdot B^*$.

La proposition (1) entraîne l'axiome IV. En effet, dans l'hypothèse que A et B sont deux ensembles fermés et disjoints, il suffit de poser $G = 1 - B^*$. Il vient $A^* \cdot B^* \cdot (A + B) = 0$, d'où $AB^* = 0 = BA^*$. La première égalité donne $A \subset G$ et la deuxième implique en vertu de la formule $G = 1 - B^* \subset A^*$ que $\bar{G} \cdot B = 0$, puisque $\bar{G} \subset A^* \subset 1 - B$.

Il est à remarquer que dans le cas d'un espace métrique le théorème du N° III se laisse démontrer d'une façon plus directe, en posant [2]:

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}.$$

Ceci est un cas particulier de l'énoncé plus général suivant [3]:

[1]) Cf. L. Vietoris, Fund. Math. 19 (1932), p. 271. La démonstration est due à M. W. Hurewicz.

[2]) P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 294.

[3]) Cf. W. Hurewicz, Mon. f. Math. u. Phys. 37 (1930), p. 202. Comp. aussi le théorème du § 15, XI.

(2) *étant donné dans un espace métrique un système de $n+1$ ensembles fermés (non vides) $F_0, \dots, F_n$ tels que $F_0 \cdot \ldots \cdot F_n = 0$, il existe une transformation continue de cet espace en un sous-ensemble d'un simplexe n-dimensionnel (fermé) telle que l'image de l'i-ème ensemble vienne se placer sur la i-ème face du simplexe.*

On fait, notamment, correspondre à x le point du simplexe dont la i-ème coordonnée barycentrique est égale à $\dfrac{\rho(x, F_i)}{\rho(x, F_0) + \ldots + \rho(x, F_n)}$.

V. Ensembles séparés.

Deux ensembles X et Y sont dits *séparés* [1]) lorsque $\bar{X} \cdot Y = 0 = X \cdot \bar{Y}$.

On a les propositions suivantes:

1. *X et Y étant deux ensembles séparés, 1° l'ensemble $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ est non-dense, 2° les conditions $V \subset X$ et $W \subset Y$ impliquent que V et W sont séparés.*

2. *A et B étant deux ensembles fermés, les ensembles $A - B$ et $B - A$ sont séparés.*

3. *Deux ensembles disjoints qui sont tous les deux fermés ou bien tous les deux ouverts sont séparés.*

4. *X étant séparé de Y et de Z, X est séparé de $Y + Z$.*

5. *Pour que X et Y soient des ensembles séparés, il faut et il suffit qu'ils soient disjoints et fermés dans leur somme.*

6 [2]). *A et B étant deux ensembles séparés* (situés dans un espace métrique), *il existe un ensemble ouvert G tel que $A \subset G$ et $\bar{G} \cdot B = 0$.* On peut de plus supposer que G est situé dans une sphère généralisée de centre A et de rayon aussi petit que l'on veut.

D'une façon plus générale:

7. *$A_1, \dots, A_n$ étant un système d'ensembles séparés deux à deux* (et situés dans un espace métrique), *il existe un système d'ensembles ouverts $G_1, \dots, G_n$ tels que: $A_i \subset G_i$ et $\bar{A}_i \cdot \bar{A}_j = \bar{G}_i \cdot \bar{G}_j$ pour $i \neq j$* (ce qui implique en vertu de 1, 1° que les ensembles G_i sont *disjoints*).

[1]) d'après M. Mazurkiewicz, Fund. Math. 1 (1920), p. 66. Cf. dans le même ordre d'idées l'ouvrage de M. Knaster et de moi, Fund. Math. 2 (1921), p. 206, où l'opérateur $X \cdot \bar{Y} + \bar{X} \cdot Y$, nommé *jonction* de X et Y, est étudié.

[2]) H. Tietze, Math. Ann. 88 (1923), p. 301; P. Alexandroff et P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924), pp. 258—266; P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), pp. 262—295.

Démonstrations: ad 1) On a $\bar{X}\cdot\bar{Y}=\bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot Y+\bar{X}\cdot\bar{Y}-Y=$ $=\bar{X}\cdot\bar{Y}-Y\subset\bar{Y}-Y$ et l'ensemble $\bar{Y}-Y$ est un ensemble frontière (§ 8, IV). On a, en outre, l'inclusion $\bar{V}\cdot\bar{W}\subset\bar{X}\cdot\bar{Y}=0$.

ad 2) $\overline{A-B}\subset\bar{A}=A$, d'où $\overline{A-B}\cdot(B-A)=0$.

ad 3) Si A et B sont fermés, la proposition 3 résulte de 2. Si A et B sont ouverts, on a (§ 5, III): $\bar{A}\cdot B\subset\overline{AB}=0$.

ad 4) $\bar{X}\cdot(Y+Z)=\bar{X}\cdot Y+\bar{X}\cdot Z=0$ et $X\cdot\overline{Y+Z}=X\cdot\bar{Y}+X\cdot\bar{Z}=0$.

ad 5) Si X et Y sont séparés, ils sont à plus forte raison disjoints; en outre, $X=X+\bar{X}\cdot Y=\bar{X}\cdot(X+Y)$, ce qui prouve que X est fermé dans $X+Y$. D'autre part, les conditions $XY=0$ et $\bar{X}\cdot(X+Y)=X$ entraînent $\bar{X}\cdot Y\subset XY=0$.

ad 6) On considère les ensembles A^* et B^* du N⁰ IV (1) et on pose $G=1-B^*$ (voir d'ailleurs la démonstration de IV (1)). Pour établir le reste de la proposition 6, on remplace G par sa partie commune avec la sphère considérée (supposée ouverte).

ad 7) Considérons d'abord le cas où $n=2$ [1]). La proposition 6, appliquée aux ensembles $A=\bar{A}_1-\bar{A}_2$ et $B=\bar{A}_2-\bar{A}_1$ (qui sont séparés selon 2), entraîne l'existence d'un ensemble ouvert G tel que

(i) $\bar{A}_1-\bar{A}_2\subset G$ et (ii) $\bar{G}\cdot\bar{A}_2\subset\bar{A}_1$.

En vertu de la même proposition, appliquée aux ensembles $\bar{A}_2-\bar{G}$ et $\bar{G}-\bar{A}_2$, il existe un ensemble ouvert H tel que

(iii) $\bar{A}_2-\bar{G}\subset H$ et (iv) $\bar{H}\cdot\bar{G}\subset\bar{A}_2$.

Les ensembles A_1 et A_2 étant séparés, on a $A_1=A_1-\bar{A}_2$ et $A_2=A_2-\bar{A}_1$. Donc, d'après (i), $A_1\subset G$ et d'après (ii) et (iii):

$$A_2=A_2-\bar{A}_1\subset A_2-\bar{G}\cdot\bar{A}_2=A_2-\bar{G}\subset H,\ \text{d'où}\ \bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\subset\bar{G}\cdot\bar{H}.$$

L'inclusion inverse résulte de (iv) et (ii): $\bar{H}\cdot\bar{G}\subset\bar{G}\cdot\bar{A}_2\subset\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2$.

Ceci établi, procédons par induction. En supposant le théorème vrai pour $n-1$, il en résulte l'existence des ensembles ouverts $G_1,\dots,G_{n-2},H$ tels que

$$A_1\subset G_1,\ \dots,\ A_{n-2}\subset G_{n-2},\quad A_{n-1}+A_n\subset H,$$

$$\bar{A}_i\cdot\bar{A}_j=\bar{G}_i\cdot\bar{G}_j,\quad \bar{A}_i\cdot\overline{A_{n-1}+A_n}=\bar{G}_i\cdot\bar{H}\quad \text{pour } j<i\leqslant n-2.$$

[1]) Voir K. Menger, Ergebnisse Math. Koll. 1, Wien 1931, p. 16.

D'après ce qui précède, il existe deux ensembles ouverts H_1 et H_2 satisfaisant aux conditions

$$A_{n-1}\subset H_1,\quad A_n\subset H_2,\quad \bar{H}_1\cdot\bar{H}_2=\bar{A}_{n-1}\cdot\bar{A}_n.$$

Or posons $G_{n-1}=H\cdot H_1$ et $G_n=H\cdot H_2$. Le système $G_1,\dots,G_n$ ainsi défini est le système demandé. Car, pour $i\leqslant n-2$ on a $\bar{G}_i\cdot\bar{G}_{n-1}\subset\bar{G}_i\cdot\bar{H}\cdot\bar{H}_1=\bar{A}_i\cdot\overline{A_{n-1}+A_n}\cdot\bar{H}_1\subset\bar{A}_i\cdot\bar{A}_{n-1}+\bar{A}_i\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_1=$ $=\bar{A}_i\cdot\bar{A}_{n-1}+\bar{A}_i\cdot\bar{A}_{n-1}\cdot\bar{A}_n=\bar{A}_i\cdot\bar{A}_{n-1}\subset\bar{G}_i\cdot\bar{G}_{n-1}$, d'où $\bar{A}_i\cdot\bar{A}_{n-1}=\bar{G}_i\cdot\bar{G}_{n-1}$ et $\bar{G}_{n-1}\cdot\bar{G}_n\subset\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2=\bar{A}_{n-1}\cdot\bar{A}_n\subset\bar{G}_{n-1}\cdot\bar{G}_n$, d'où $\bar{A}_{n-1}\cdot\bar{A}_n=\bar{G}_{n-1}\cdot\bar{G}_n$.

VI. Séparation d'ensembles. On dit que *l'ensemble C sépare les ensembles A et B*, lorsque le complémentaire de C se décompose en deux ensembles séparés dont l'un contient A et l'autre B.

Ainsi par ex. *la frontière d'un ensemble ouvert G sépare chaque couple de points dont l'un est situé dans G et l'autre à l'extérieur de G*, c. à d. dans $1-\bar{G}$. Car $1-\mathrm{Fr}(G)=G+(1-\bar{G})$.

D'après l'axiome de séparation, *chaque couple d'ensembles fermés et disjoints A et B peut être séparé par un ensemble fermé*. Car il existe un ensemble ouvert G tel que $A\subset G$ et $\bar{G}\cdot B=0$, d'où $B\subset 1-\bar{G}$. La frontière de G sépare donc A et B.

Dans un espace métrique, en raison de V, 6, *chaque couple d'ensembles séparés peut être séparé par un ensemble fermé*.

§ 17. Axiome V (de la base).

I. Axiome V [1]). *Il existe une suite $R_1, R_2, \dots$ d'ensembles ouverts (non vides) tels que chaque ensemble ouvert (non vide) est une somme de certains termes de cette suite.*

Une suite de ce genre est dite *base de l'espace*.

Conformément à l'axiome V, *si p est un point d'un ensemble ouvert G, il existe un indice n tel que $p\in R_n\subset G$*. En tenant compte de l'axiome IV, cette formule peut être remplacée par

(1) $$p\in R_n,\quad \bar{R}_n\subset G.$$

[1]) Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 263 („das zweite Abzählbarkeitsaxiom").

En effet, d'après l'axiome IV (en y posant $A=p$ et $B=1-G$), il existe un ensemble ouvert H tel que $p \varepsilon H$ et $\overline{H} \subset G$; il existe donc selon l'axiome V un n tel que $p \varepsilon R_n \subset H$, d'où $R_n \subset \overline{H} \subset G$.

Une conséquence immédiate de l'axiome V est le suivant

Théorème de M. Lindelöf[1]). *Chaque famille (indénombrable) d'ensembles ouverts $\{G_\iota\}$ contient une suite (dénombrable) $G_{\iota_1}, G_{\iota_2}, \ldots$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} G_{\iota_n} = \sum_\iota G_\iota$.*

Soit, en effet, $R_{k_1}, R_{k_2}, \ldots$ la suite de tous les ensembles contenus dans des ensembles de la famille $\{G_\iota\}$. A chaque indice k_n vient correspondre (en vertu de l'axiome du choix) un indice ι_n tel que $R_{k_n} \subset G_{\iota_n}$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n} \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_{\iota_n} \subset \sum_\iota G_\iota$.

D'autre part, si $p \varepsilon G_\iota$, il existe un indice j tel que $p \varepsilon R_j \subset G_\iota$. L'indice j appartenant à la suite $k_1, k_2, \ldots$, il vient $p \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n}$ d'où $\sum_\iota G_\iota \subset \sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n}$, c. q. f. d.

Le théorème suivant nous apprend qu'en introduisant l'ax. V on peut en même temps remplacer l'ax. IV par l'axiome de *„régularité"* (p. 65), qui est moins restrictif.

Théorème de M. Tychonoff[2]). *Si un espace régulier satisfait aux axiomes I, II, III et V, il satisfait aussi à l'axiome IV.*

Soient, en effet, A et B deux ensembles fermés disjoints. En vertu de l'ax. de régularité (et de l'ax. du choix), à chaque point a de A correspond un ensemble ouvert G_a tel que $a \varepsilon G_a$ et $\overline{G}_a \cdot B = 0$. Par conséquent $A \subset \sum_{a \varepsilon A} G_a$ et d'après le théorème de M. Lindelöf on peut poser $A \subset G_{a_1} + G_{a_2} + \ldots$

D'une façon analogue, il existe une suite d'ensembles ouverts $\{H_{b_n}\}$ tels que $B \subset H_{b_1} + H_{b_2} + \ldots$ et $A \cdot \overline{H}_{b_n} = 0$.

Posons $U_1 = G_{a_1}$, $V_1 = H_{b_1} - \overline{U}_1$ et d'une façon générale:

$$U_n = G_{a_n} - (\overline{V}_1 + \ldots + \overline{V}_{n-1}), \quad V_n = H_{b_n} - (\overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_n).$$

[1]) C. R. Paris, t. 137 (1903), p. 697. Cf. aussi W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (1) 35 (1903), p. 384.

[2]) *Ueber einen Metrisationssatz von P. Urysohn*, Math. Ann. 95 (1925), pp. 139—142.

Les ensembles ouverts $G = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ et $H = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ contiennent A et B. En effet, comme $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n}$ et $A \cdot \overline{V}_n \subset A \cdot \overline{H}_{b_n} = 0$, il vient $A \subset G$. D'une façon analogue $B \subset H$. Reste à démontrer que $GH = 0$, c. à d. que $U_n \cdot V_m = 0$. Or, si $m \leqslant n-1$, on a (par définition de U_n) l'égalité $U_n \cdot \overline{V}_m = 0$; si, au contraire, $n \leqslant m$, il vient $\overline{U}_n \cdot V_m = 0$. Donc en tout cas $U_n \cdot V_m = 0$.

II. Rapports aux espaces métriques séparables.

Chaque espace métrique séparable satisfait à l'axiome V. De plus, *ε étant un nombre positif donné, on peut supposer que $\delta(R_n) < \varepsilon$.*

En effet, par définition de l'espace séparable, il existe un ensemble dénombrable S dense dans l'espace. Soit $R_1, R_2, \ldots$ la suite de toutes les sphères ouvertes ayant pour centre un point arbitraire de S et pour rayon un nombre rationnel arbitraire (que l'on peut, d'ailleurs, supposer inférieur à $\varepsilon/2$).

Soit G un ensemble ouvert et $p \varepsilon G$. Il existe un $\eta > 0$ tel que

(i) $$|x-p| < \eta \quad \text{entraîne} \quad x \varepsilon G.$$

L'ensemble S étant dense, il existe un point $s \varepsilon S$ et un nombre rationnel ρ tels que

(ii) $$|s-p| < \rho < \eta/2.$$

R_n étant la sphère ouverte de centre s et de rayon ρ, on a d'après (ii): $p \varepsilon R_n$. En outre, si $x \varepsilon R_n$, on a $|x-s| < \rho$, donc selon (ii): $|x-p| \leqslant |x-s| + |s-p| < \eta$, ce qui implique en raison de (i) que $x \varepsilon G$. Ainsi $R_n \subset G$, c. q. f. d.

Remarques. 1) En particulier, dans un espace cartésien, les sphères dont le rayon et les coordonnées du centre sont rationnels constituent une base.

2) *Tout espace satisfaisant à l'ax. V est séparable.* Car, en choisissant un point dans chaque R_n, on obtient un ensemble dense dans l'espace.

3) Selon § 15, II, § 16, IV et § 17, II, *chaque espace métrique séparable satisfait aux axiomes I—V.* Nous allons voir qu'au point de vue topologique il y a *équivalence* entre espace métrique séparable et espace satisfaisant aux ax. I—V. Nous montrerons notamment que ce dernier est toujours *métrisable.*

III. Conséquences de l'axiome V.

1. *Chaque sous-ensemble d'un espace satisfaisant à l'ax. V satisfait également à cet axiome.* En effet, $XR_1, XR_2, \dots$ est une base relative à l'ensemble X, puisque chaque ensemble ouvert dans X est de la forme XG, où G est ouvert (dans l'espace entier).

2. *Chaque espace satisfaisant aux ax. I—V est un espace de Hausdorff, donc un espace $\mathcal{L}^*$.* Plus précisément, si le terme „entourage ouvert du point p (au sens de M. Hausdorff)" signifie „ensemble ouvert contenant p" et si l'égalité $p = \lim p_n$ veut dire que chaque entourage ouvert de p contient tous les p_n à partir d'un indice suffisamment grand, alors les axiomes A — E de M. Hausdorff (§ 7, III), ainsi que les axiomes 1^0—3^0, qui définissent l'espace $\mathcal{L}^*$ (§ 14, I), se trouvent vérifiés.

En effet, les ax. I—III entraînent les ax. A — C (§ 7, III), l'ax. IV entraîne D (en posant dans l'ax. IV: $A = p$, $B = q$, $G = U$ et $1 - G = V$) et l'ax. V entraîne évidemment E. Enfin, chaque espace de Hausdorff est un espace $\mathcal{L}^*$ (§ 14, VII).

Ainsi, tous les théorèmes concernant l'espace $\mathcal{L}^*$ s'appliquent à l'espace satisfaisant aux axiomes I—V. C'est, comme nous verrons, un cas particulier du théorème général qui va suivre.

IV. Métrisation de l'espace et introduction des coordonnées.

*Théorème d'*U r y s o h n [1]. *Chaque espace satisfaisant aux axiomes I—V est topologiquement contenu dans le cube fondamental $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert;* autrement dit [2], il existe une suite de fonctions $f^1(x)$, $f^2(x), \dots$ (les „coordonnées" du point x), définies sur l'espace entier, ayant leurs valeurs situées dans l'intervalle 01 et telles qu'en définissant la distance entre les suites (de nombres réels) $y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots]$ et $z = [z^{(1)}, z^{(2)}, \dots]$ par la formule

$$\text{(i)} \qquad |y - z| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot |y^{(n)} - z^{(n)}|,$$

la fonction $f(x) = [f^1(x), f^2(x), \dots]$ est bicontinue.

[1]) *Zum Metrisationsproblem*, Math. Ann. 94 (1925), p. 310.
[2]) Voir § 14, V et § 15, VI.

Extrayons en effet de la suite $R_1, R_2, \dots$ (qui forme la base de l'espace) tous les couples (R_{k_n}, R_{m_n}) tels que $\overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$. D'après le théorème § 16, III, il existe une fonction continue $f^n(x)$ telle que

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqslant f^n(x) \leqslant 1,\ f^n(x) = 0 \text{ pour } x \,\varepsilon\, \overline{R}_{k_n} \text{ et } f^n(x) = 1 \text{ pour } x \text{ non-}\varepsilon\, R_{m_n}.$$

Chacune des fonctions $f^n(x)$ étant continue, il en est de même de la fonction $f(x) = [f^1(x), f^2(x), \dots]$ (§ 14, IV). Pour prouver que la fonction $f(x)$ est bicontinue, il reste à démontrer (voir § 13, VIII, 3a) que la condition p *non*-$\varepsilon\, \overline{X}$ entraîne $f(p)$ *non*-$\varepsilon\, \overline{f(X)}$.

Or, d'après l'ax. V, il existe un indice m_n tel que $p \,\varepsilon\, R_{m_n} \subset 1 - \overline{X}$ et, en vertu de I (1), il existe un k_n tel que $p \,\varepsilon\, \overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$.

Soit $x \,\varepsilon\, X$. Donc x *non*-$\varepsilon\, R_{m_n}$ et, d'après (ii), $f^n(x) = 1$. D'après la même formule on a $f^n(p) = 0$, d'où selon (i): $|f(x) - f(p)| \geqslant 1/2^n$. Cela veut dire que dans la sphère de centre $f(p)$ et de rayon $1/2^n$ il n'y a aucun point de l'ensemble $f(X)$. Donc $f(p)$ *non*-$\varepsilon\, \overline{f(X)}$.

Corollaire I. L'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ a le rang topologique le plus élevé parmi les espaces satisfaisant aux ax. I—V, ou, ce qui revient au même, parmi les espaces métriques séparables.

Car l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, comme un produit d'espaces métriques séparables, est lui-même métrique séparable (§ 14, VI) et satisfait par conséquent aux ax. I—V (on peut d'ailleurs définir directement la base de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ comme constituée par les ensembles de la forme $R_1 \times \dots \times R_n \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \dots$, où R_i désigne un intervalle variable à extrémités rationnelles et situé dans l'intervalle $\mathcal{I}$).

Il résulte du théorème d'U r y s o h n et du corollaire précédent que tous les théorèmes concernant l'espace métrique séparable sont applicables à l'espace satisfaisant aux ax. I—V. On en conclut aussi que *l'étude des espaces topologiques assujettis aux axiomes I—V n'est rien d'autre (au point de vue topologique) que celle des sous-ensembles de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ ou encore celle des sous-ensembles de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ de Fréchet (puisque $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ et $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ ont évidemment le même rang topologique).*

Corollaire II. Chaque espace métrique séparable est homéomorphe à un espace totalement borné.

Car l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, ainsi que chaque sous-ensemble de cet espace, est totalement borné (§ 15, X).

Corollaire III. Chaque sous-ensemble d'un espace satisfaisant aux axiomes I—V leur satisfait aussi [1]).

Remarques. 1) Il est intéressant de rapprocher le théorème d'Urysohn (et le corollaire I) au théorème suivant de MM. Banach et Mazur [2]): *chaque espace métrique séparable est isométrique à un sous-ensemble de l'espace C de toutes les fonctions réelles continues dans l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$, la distance entre deux fonctions-éléments de cet espace étant définie par la formule $|f_1 - f_2| = \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

Ainsi l'espace C possède également le rang topologique le plus élevé parmi les espaces métriques séparables. Au point de vue topologique il a, envers l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, le désavantage d'être non compact; au point de vue géométrique, il a l'avantage d'avoir non seulement le plus grand rang topologique mais aussi *le plus grand rang géométrique* parmi les espaces métriques séparables.

2) D'après le théorème d'Urysohn l'axiome V constitue une condition *suffisante* pour qu'un espace satisfaisant aux axiomes I—IV soit métrisable. Bien entendu, cette condition n'est pas *nécessaire* (lorsqu'on n'exige pas d'avance que l'espace soit séparable).

Je dois à M. Aronszajn la condition suivante, qui est *nécessaire et suffisante pour qu'un espace satisfaisant aux axiomes I—III soit métrisable* [3]): c'est notamment *l'existence d'une suite infinie de familles* $\boldsymbol{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *composées d'ensembles ouverts tels que:* 1⁰ *quel que soit n, l'espace est une somme des ensembles-éléments de* $\boldsymbol{F}_n$, 2⁰ *étant donnés un point p, deux suites d'ensembles* G_n *et* G_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ *tels que* $p \varepsilon G_n$, $G_n \cdot G_n^* \neq 0$, $G_n \varepsilon \boldsymbol{F}_n$, $G_n^* \varepsilon \boldsymbol{F}_n$, *et un entourage quelconque E de p, il existe un indice k tel que* $G_k + G_k^* \subset E$.

Citons encore, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant de M. Chittenden [4]). Supposons qu'on ait défini dans l'espace une fonction non négative de deux variables (l'„écart") $\varphi(x,y)$ telle que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $[\varphi(x,y) = 0] \equiv [x = y]$ (la loi du triangle n'est pas supposée vérifiée); dans ces hypothèses, s'il existe une fonction $f(t)$ réelle de variable réelle, tendant vers 0 avec t et telle que les inégalités $\varphi(x,y) < t$ et $\varphi(y,z) < t$ entraînent $\varphi(x,z) < f(t)$, l'espace est métrisable (la notion de limite étant définie d'une façon évidente à l'aide de l'écart $\varphi(x,y)$).

---

1) Pour une démonstration plus directe, voir P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 285.

2) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, p. 187. Cf. aussi P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sc. Math. 151 (1927), pp. 1—38.

3) Une condition analogue a été donnée par MM. Alexandroff et Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe* $(\mathcal{L})$ *soit une classe* $(\mathcal{D})$, C. R. Paris t. 177 (1923), p. 1274. Cf. aussi M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 220.

4) *On the equivalence of écart and voisinage*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), p. 161.

B. Problèmes de la puissance (§§ 18, 19).

Nous supposons dans les §§ 18 et 19 que l'espace satisfait aux ax. I—V.

§ 18. Puissance de l'espace. Points de condensation.

I. Puissance de l'espace. *La puissance de l'espace est* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, d'après § 17, II, 2, l'espace est séparable. Il existe par conséquent (§ 14, VI) une suite (finie ou infinie) de points $r_1, r_2, \ldots$ telle que chaque point de l'espace est un point-limite d'une sous-suite de cette suite. La puissance de l'espace ne dépasse donc pas celle de l'ensemble de toutes les suites extraites d'un ensemble dénombrable, c. à d. celle du continu.

II. Partie dense. *Chaque sous-ensemble de l'espace contient une partie dense dénombrable.* En effet, considéré comme espace, ce sous-ensemble satisfait aux ax. I—V (§ 17, IV, corollaire III); il est donc séparable.

III. Points de condensation. *Le point p est dit point de condensation de l'ensemble X, lorsque chaque entourage de p contient une infinité indénombrable de points de X* [1]), autrement dit, lorsque X n'est pas localement dénombrable au point p (§ 7, IV). *L'ensemble des points de condensation de X sera désigné par* $X^{\odot}$.

En vertu de l'ax. V la formule $p \varepsilon X - X^{\odot}$ implique que p est situé dans un ensemble ouvert R_n appartenant à la base de l'espace et tel que l'ensemble XR_n est dénombrable. Il s'ensuit que *l'ensemble* $X - X^{\odot}$ *est dénombrable.* Car, en faisant correspondre à chaque p de $X - X^{\odot}$ un indice $n(p)$ de façon que $XR_{n(p)}$ soit dénombrable, il vient $X - X^{\odot} \subset \sum_p XR_{n(p)}$ et cette dernière somme, comme somme dénombrable d'ensembles dénombrables, est dénombrable (d'après un théorème de la Théorie des ensembles, basé sur l'axiome du choix).

IV. Règles de calcul.

(1) $(X + Y)^{\odot} = X^{\odot} + Y^{\odot}$ (2) $X^{\odot} - Y^{\odot} \subset (X - Y)^{\odot}$

(3) $(\prod_\iota X_\iota)^{\odot} \subset \prod_\iota X_\iota^{\odot}$ (4) $\sum_\iota X_\iota^{\odot} \subset (\sum_\iota X_\iota)^{\odot}$

(5) $X \subset Y$ *implique* $X^{\odot} \subset Y^{\odot}$ (6) $(X - X^{\odot})^{\odot} = 0$ (7) $X^{\odot} \subset X' \subset \overline{X}$

(8) $X^{\odot} = X^{\odot\odot} = X^{\odot\prime} = \overline{X^{\odot}} = (XX^{\odot})^{\odot}$ (9) $XX^{\odot} \subset (XX^{\odot})'$.

---

1) E. Lindelöf, Acta math. 29 (1905), p. 183. Cf. aussi W. H. Young, Quart. Journ. of Math. 35 (1903), p. 103.

Les formules (1)—(5) résultent directement du fait que la somme de deux ensembles dénombrables est dénombrable et qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable (§ 7, V). La formule (6) résulte du N⁰ III (puisqu'un ensemble dénombrable n'admet évidemment aucun point de condensation). Chaque point de condensation étant un point d'accumulation (§ 9, II), on en déduit la formule (7). En vertu de (3) on a $(XX^{\odot})^{\odot} \subset X^{\odot} \cdot X^{\odot\odot} \subset X^{\odot\odot}$; comme, en outre, l'ensemble $X^{\odot}$ est fermé (§ 7, V), on a selon (7): $X^{\odot\odot} \subset X^{\odot\prime} \subset \overline{X^{\odot}} = X^{\odot}$ et la formule (8) se trouve établie, car l'identité $X = XX^{\odot} + X - X^{\odot}$ donne en raison de (1) et (6) $X^{\odot} = (XX^{\odot})^{\odot}$. Enfin, les formules (8) et (7) entraînent (9): $XX^{\odot} \subset X^{\odot} = (XX^{\odot})^{\odot} \subset (XX^{\odot})'$.

V. Ensembles clairsemés.

Tout espace clairsemé est dénombrable.

L'ensemble $1^{\odot}$ étant selon IV (9) dense en soi, l'hypothèse que l'espace est clairsemé implique que $1^{\odot} = 0$, d'où $1 = 1 - 1^{\odot}$ et, cette différence étant d'après N⁰ III dénombrable, le théorème est démontré.

En le rapprochant de § 9, VI, 3, on en déduit le *théorème de Cantor-Bendixson*[1]: *chaque espace se compose de deux ensembles dont l'un est parfait et l'autre dénombrable (et clairsemé).*

VI. Sommes d'ensembles clairsemés. *Tout espace qui est une somme d'une famille monotone*[2] *d'ensembles clairsemés est dénombrable*[3]).

Supposons que $1 = \sum_{\iota} C_{\iota}$ où C_{ι} est clairsemé (l'indice ι parcourant un ensemble de puissance arbitraire) et que 1 soit indénombrable. D'après le théorème précédent, l'espace contient alors un ensemble dense en soi, qui, à son tour, contient (selon II) une partie dense dénombrable $D = [p_1, p_2, \dots]$. L'ensemble D est donc dense en soi.

Faisons correspondre à chaque p_n un indice ι_n tel que $p_n \in C_{\iota_n}$ et posons

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\iota_n}.$$

---

[1]) G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 575; I. Bendixson, Acta math. 2 (1883), p. 415; E. Lindelöf, l. cit.

[2]) Une famille d'ensembles est dite *monotone*, si, quels que soient les ensembles X et Y appartenant à cette famille, on a soit $X \subset Y$, soit $Y \subset X$.

[3]) Théorème de M. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles clairsemés*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 46—49.

Il vient $D \subset S$. L'ensemble S étant dénombrable, comme somme dénombrable d'ensembles dénombrables, il suffit de prouver que $S = 1$.

Or supposons par contre que $q \in 1 - S$. Il existe alors un C_0 tel que $q \in C_0$. Il s'ensuit que C_0 n'est contenu dans aucun des ensembles C_{ι_n}. La famille des ensembles C_{ι} étant monotone, on en conclut que $C_{\iota_n} \subset C_0$, quel que soit n. Donc $S \subset C_0$, d'où $D \subset S \subset C_0$, ce qui est impossible, puisque C_0 est clairsemé et D est dense en soi (non vide).

VII. Points d'ordre $\mathfrak{m}$. L'énoncé du N⁰ III, d'après lequel tout espace indénombrable contient des points de condensation (c. à d. des points d'„ordre indénombrable") peut être précisé comme suit: *si la puissance* $\mathfrak{m} > \aleph_0$ *de l'espace est non confinale avec* ω (c. à d. qu'elle n'est pas somme d'une série dénombrable de nombres cardinaux inférieurs à $\mathfrak{m}$), *il existe dans l'espace un point d'ordre* $\mathfrak{m}$ (point dont chaque entourage est de la puissance $\mathfrak{m}$). On a aussi l'énoncé suivant: *l'espace se compose d'un ensemble clairsemé et d'une suite d'ensembles tels que tous les points d'un même ensemble sont d'un même ordre*[1]).

VIII. Notion d'effectivité. Cette notion est de nature *méta-mathématique*: elle concerne le mode de démonstration des théorèmes d'existence. On dit notamment qu'un théorème d'existence, c. à d. théorème de la forme $\sum_{x} \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est une fonction propositionnelle (voir § 1, III), est démontré d'une façon *effective*, lorsqu'on a *défini* un individu a et on a démontré que a satisfait au théorème considéré, c. à d. que $\varphi(a)$ [2]).

Dans la Topologie fondée sur le système d'ax. I—V *nous allons considérer la base de l'espace comme définie* (ce qui est justifié par le fait que dans l'espace euclidien on sait définir une base: la suite des sphères dont le rayon et les coordonnées du centre sont rationnels). Cela donne lieu à d'autres définitions: on peut en effet définir des différents objets (ensembles, fonctions etc.) à l'aide de la base de l'espace.

Dans les problèmes de la puissance il s'agit, en général, de démontrer qu'un ensemble est de telle ou telle puissance; la démonstration est effective, si l'on *définit* la correspondance en question.

Ainsi, par ex., la démonstration donnée au N⁰ III pour le fait que l'ensemble $X - X^{\odot}$ est dénombrable n'est pas effective: nous n'avons pas défini une suite individuelle contenant tous les points de cet ensemble; nous avons démontré seulement que des suites de ce genre existent.

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties homogènes*, Fund. Math. 1 (1920). Cf. G. Cantor, Acta Math. 7 (1885), p. 118.

[2]) Comp. la notion d'effectivité chez MM. Borel et Lebesgue, ainsi que chez M. F. Bernstein (qui distingue entre „Existenz" et „Herstellung", Leipz. Ber. 60, 1908). Des nombreuses recherches de M. Sierpiński ont été consacrées à ce sujet, voir surtout *Les exemples effectifs et l'axiome du choix*, Fund. Math. 2 (1921). Cf. aussi les remarques sur l'effectivité dans une note de M. Knaster et moi dans Fund. Math. 2, p. 251.

Par contre, il est facile d'établir d'une façon *effective* que *l'ensemble $X-X^1$ est dénombrable*. En effet, si $p \in X-X^1$, il existe un indice n tel que $p=XR_n$ (où R_n est un ensemble appartenant à la base de l'espace). Désignons par $n(p)$ le premier indice de ce genre. A deux points différents correspondent évidemment deux indices différents. Ainsi, les points de l'ensemble $X-X^1$ se trouvent rangés en une suite (finie ou infinie).

Une démonstration effective de la dénombrabilité de l'ensemble $X-X^{\odot}$ sera donnée dans le § suivant.

§ 19. Puissance de diverses familles d'ensembles.

I. Familles d'ensembles ouverts.

1) *La famille de tous les ensembles ouverts est de la puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, chaque ensemble ouvert étant selon l'ax. V une somme de certains ensembles R_n, la puissance de la famille de tous les ensembles ouverts ne peut dépasser celle de la famille de toutes les suites extraites de la base de l'espace.

Chaque ensemble fermé étant le complémentaire d'un ensemble ouvert, *la famille de tous les ensembles fermés est aussi de la puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

2) *Chaque famille d'ensembles ouverts disjoints est (effectivement) dénombrable.*

En effet, G étant un ensemble (non vide) de la famille considérée, il existe d'après l'ax. V un indice n tel que $R_n \subset G$. Soit $n(G)$ le premier indice de ce genre. Les ensembles ouverts en question étant disjoints par hypothèse, à deux ensembles différents correspondent toujours deux indices différents, de sorte que la famille de ces ensembles se trouve rangée en une suite (finie ou infinie).

En particulier, sur la ligne droite chaque famille d'*intervalles* n'empiétant pas les uns sur les autres est dénombrable.

II. Familles monotones bien ordonnées [1].

1) *Chaque famille bien ordonnée d'ensembles ouverts décroissants est (effectivement) dénombrable.*

Soit, en effet, $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_\xi \supset G_{\xi+1} \supset \dots$ une suite transfinie d'ensembles ouverts (différents). Si α n'est pas le dernier

[1]) Voir R. Baire, Thèse, Ann. di Math. (3) 3 (1899), p. 51.

indice, il existe un point $p_\alpha \in G_\alpha - G_{\alpha+1}$; il existe donc un indice n tel que $p_\alpha \in R_n \subset G_\alpha$, donc que

$$R_n \subset G_\alpha \quad \text{et} \quad R_n - G_{\alpha+1} \neq 0. \tag{i}$$

Soit $n(\alpha)$ le plus petit indice qui satisfait à la condition (i).

A deux nombres transfinis différents correspondent deux indices différents, car la condition $\alpha < \beta$ implique $R_{n(\beta)} \subset G_\beta \subset G_{\alpha+1}$, tandis que, selon (i), l'inclusion $R_{n(\alpha)} \subset G_{\alpha+1}$ n'a pas lieu. Ainsi, tous les indices α (sauf, peut-être, le dernier) se trouvent rangés en une suite dénombrable.

2) *Chaque famille bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants est (effectivement) dénombrable.*

Soit $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_\xi \supset F_{\xi+1} \supset \dots$ cette suite. Si α n'est pas le dernier indice, il existe un point $p_\alpha \in F_\alpha - F_{\alpha+1}$; soit $n(\alpha)$ le plus petit indice tel que $R_{n(\alpha)} \cdot F_\alpha \neq 0 = R_{n(\alpha)} \cdot F_{\alpha+1}$. Il vient pour $\alpha < \beta$: $F_\beta \subset F_{\alpha+1}$; l'inégalité $R_{n(\beta)} \cdot F_\beta \neq 0$ entraîne donc $R_{n(\beta)} \cdot F_{\alpha+1} \neq 0$, d'où $n(\alpha) \neq n(\beta)$. L'ensemble des indices α est par conséquent (effectivement) dénombrable.

En tenant compte du fait que les ensembles ouverts sont les complémentaires des ensembles fermés, on parvient à l'énoncé suivant, qui généralise les deux précédents:

3) *Chaque famille bien ordonnée d'ensembles croissants ou décroissants qui sont tous fermés ou bien tous ouverts est (effectivement) dénombrable.*

Remarques. 1. *Chaque ensemble de nombres réels bien ordonnés selon la grandeur est dénombrable.* Car une suite transfinie de nombres réels $x_0 < x_1 < \dots < x_\xi < x_{\xi+1} < \dots$ détermine une famille bien ordonnée d'ensembles fermés croissants $\{F_\xi\}$ où F_ξ est la demi-droite $x \leqslant x_\xi$.

2. La démonstration des énoncés 1) et 2) reste valable, lorsqu'on considère au lieu du bon ordre un *ordre où chaque élément* (sauf le dernier, s'il existe) *admet un élément qui le suit immédiatement.* Ainsi l'énoncé 3) peut être généralisé sur un ordre de ce genre.

Une autre généralisation sera établie dans le N° suivant.

III. Ensembles développables. Un ensemble E est par définition (p. 59) *développable*, s'il est de la forme

$$E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_\xi - F_{\xi+1} + \ldots,$$

les termes de la série (transfinie) étant fermés décroissants.

D'après le théorème II, 2, cette série est *dénombrable* (autrement dit, tous les indices ξ sont inférieurs à un nombre de la première ou deuxième classe).

(1) *Les ensembles développables sont à la fois des* F_σ *et des* G_δ.

En effet, une différence de deux ensembles fermés est un F_σ comme un produit d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert (qui est un F_σ selon § 15, IV). Un ensemble développable, comme formé d'une infinité dénombrable de différences d'ensembles fermés, est donc aussi un F_σ. Il est en outre un G_δ, car le complémentaire d'un ensemble développable, étant lui-même développable (§ 12, VI, 1), est un F_σ.

(1a) *Les ensembles clairsemés sont des* F_σ *et des* G_δ [1], car chaque ensemble clairsemé est développable (§ 12, VI, 4).

Remarques. 1. Les ensembles développables sont des ensembles F_σ et G_δ *effectifs*: nous pouvons, notamment, faire correspondre à chaque ensemble développable une suite bien déterminée d'ensembles fermés dont cet ensemble est la somme (ainsi qu'une suite d'ensembles ouverts dont cet ensemble est le produit).

En effet, si E est développable, on a d'après § 12, V, 3º: $E = \sum_{\xi<\alpha} (A_\xi - B_\xi)$ où les ensembles A_ξ et B_ξ désignent les termes du développement § 12, III, 3º (i).

Or, la suite A_ξ étant selon II, 2 effectivement dénombrable, les indices $\xi < \alpha$ peuvent être imaginés rangés en une suite simple infinie $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (qui n'est pas nécessairement une suite croissante). D'autre part, nous avons fait correspondre (§ 15, IV) à chaque ensemble fermé une suite d'ensembles ouverts dont il est le produit. Il vient ainsi: $B_\xi = \prod_{k=1}^{\infty} G_\xi^k$ et $E = \sum_{n,k=1}^{\infty} \left[A_{\xi_n} - G_{\xi_n}^k\right]$.

La série double se transformant facilement en une série simple, on *définit* ainsi une suite simple infinie d'ensembles fermés dont la somme constitue l'ensemble E. Cela veut dire que E est un F_σ *effectif.*

Le complémentaire d'un ensemble développable étant développable (§ 12, VI, 1), tout ensemble développable est un G_δ effectif.

[1]) Théorème de M. W. H. Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge 1906, p. 65.

2. Le *théorème inverse* à (1) est vrai — comme on le verra au § 33 — dans les espaces complets, mais ne subsiste pas dans des espaces arbitraires. Notamment, dans l'espace des nombres rationnels, tout ensemble qui est simultanément dense et frontière est un F_σ et G_δ (puisque l'espace est dénombrable), mais n'est pas développable, car sa frontière n'est pas non-dense (elle est en effet identique à l'espace entier, cf. § 12, V, 2º).

Passons à présent à la démonstration de l'énoncé suivant, qui constitue une généralisation du théorème Nº II, 3):

(2) *Chaque famille bien ordonnée d'ensembles développables croissants (ou décroissants) est dénombrable.*

En tenant compte du fait que la fonction caractéristique d'un ensemble développable est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé (§ 13, VI), l'énoncé (2) résulte [1]) du théorème plus général suivant, que nous allons démontrer [2]).

Théorème. Chaque famille bien ordonnée de fonctions (à valeurs réelles) ponctuellement discontinues sur tout ensemble fermé: $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_\xi(x) \leqslant f_{\xi+1}(x) \leqslant \ldots$ $(\xi < \Omega)$ [3]), *est dénombrable.*

Il s'agit d'établir l'existence d'un indice α tel qu'on ait, pour chaque x et ξ, $f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x)$.

Soit, pour n fixe, $R_{n,1}, R_{n,2}, \ldots, R_{n,i}, \ldots$ la suite des ensembles appartenant à la base de l'espace et tels qu'il existe un nombre ordinal $\alpha_{n,i}$ satisfaisant à la condition:

$$x \in R_{n,i} \text{ entraîne } f_{\alpha_{n,i}+\xi}(x) - f_{\alpha_{n,i}}(x) < 1/n, \text{ quel que soit } \xi.$$

Posons $R^n = R_{n,1} + R_{n,2} + \ldots$ Soit $\alpha_n > \alpha_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots$ Il vient $f_{\alpha_n+\xi}(x) - f_{\alpha_n}(x) < 1/n$ pour $x \in R^n$. Par conséquent, si l'on pose $\alpha > \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, on a pour $x \in R^1 \cdot R^2 \cdot \ldots$: $f_{\alpha+\xi}(x) - f_\alpha(x) < 1/n$, quel que soit n, d'où $f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x)$. Notre théorème sera donc démontré dès que l'égalité $R^n = 1$ sera établie pour chaque n.

Supposons, par impossible, qu'il existe un n tel que l'ensemble fermé $F = 1 - R^n$ soit non vide. Soit $[a_1, a_2, \ldots]$ un ensemble dénombrable dense dans F. Il existe un γ tel que

[1]) Pour une démonstration plus directe, voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 171. Cf. aussi Z. Zalcwasser, *Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois* F_σ *et* G_δ, Fund. Math. 3 (1922), p. 44.

[2]) Je dois cette démonstration à M. Zalcwasser.

[3]) Ω désigne, comme d'habitude, le plus petit nombre ordinal indénombrable.

(i) $\xi \geqslant \gamma$ entraîne $f_\xi(a_m) = f_\gamma(a_m)$, quel que soit m,

car à chaque m correspond un γ_m tel que $f_\xi(a_m) = f_{\gamma_m}(a_m)$ pour $\xi \geqslant \gamma_m$ (cf. remarque 1 du N⁰ II); il suffit donc que γ soit supérieur à tous les γ_m où $m = 1, 2, \ldots$ On peut admettre en outre que $\gamma > \alpha_n$.

Le point a_m étant situé en dehors de R^n, il existe dans chaque entourage de a_m un point x et un indice $\beta_m > \gamma$ tels que $f_{\beta_m}(x) - f_\gamma(x) \geqslant 1/n$; il existe donc un b_m tel que $|b_m - a_m| < 1/n$ et $f_{\beta_m}(b_m) - f_\gamma(b_m) \geqslant 1/n$. L'inégalité $\gamma > \alpha_n$ implique d'autre part que $f_{\alpha_n}(b_m) \leqslant f_\gamma(b_m)$, donc que $f_{\beta_m}(b_m) - f_{\alpha_n}(b_m) \geqslant 1/n$, d'où $b_m \in F$.

Soit β un nombre supérieur à tous les β_m, $m = 1, 2, \ldots$ Il vient

(ii) $$f_\beta(b_m) - f_\gamma(b_m) \geqslant 1/n, \quad m = 1, 2, \ldots$$

La fonction $f_\beta(x)$ étant ponctuellement discontinue sur chaque ensemble fermé, il existe un point de continuité de la fonction partielle $f_\beta(x|F)$. Soit donc G ($\neq 0$) un ensemble ouvert dans F et tel qu'on ait $|f_\beta(x) - f_\beta(x')| < 1/2n$ pour x et x' appartenant à G. D'une façon analogue, il existe dans G un point de continuité de la fonction $f_\gamma(x|\overline{G})$; soit H ($\neq 0$) un ensemble ouvert dans F tel que $|f_\beta(x) - f_\beta(x')| < 1/2n$ et $|f_\gamma(x) - f_\gamma(x')| < 1/2n$ pour $x \in H$ et $x' \in H$.

Pour m convenablement choisi on peut substituer dans ces inégalités a_m à x et b_m à x'. En vertu de (i), on a $f_\beta(a_m) = f_\gamma(a_m)$; il vient ainsi $|f_\beta(a_m) - f_\beta(b_m)| < 1/2n$ et $|f_\beta(a_m) - f_\gamma(b_m)| < 1/2n$, d'où $|f_\beta(b_m) - f_\gamma(b_m)| < 1/n$, contrairement à (ii).

(2a) *Chaque famille bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants (ou décroissants) est dénombrable* [1].

Car chaque ensemble clairsemé est développable (§ 12, VI, 4).

IV. Dérivé d'ordre α [2]. Le dérivé d'ordre α de X est défini par les conditions: $X^{(1)} = X'$, $X^{(\alpha+1)} = (X^{\alpha})'$ et $X^{(\lambda)} = \prod_{\alpha<\lambda} X^{(\alpha)}$ si λ est un nombre limite.

Le dérivé X' étant fermé et le produit d'ensembles fermés étant fermé, on prouve facilement (par l'induction tranfinie) que

[1]) Dans ma note de Fund. Math. 3 (1922), p. 42, se trouve une démonstration directe de cet énoncé. Une démonstration effective résulte d'ailleurs du théorème § 18, VI de M. Sierpiński (voir sa note citée).

[2]) G. Cantor, Math. Ann. 17 (1880), p. 357.

$X^{(\alpha)}$ est fermé, quel que soit α. En outre, tout ensemble fermé contenant son dérivé, la famille des dérivés est décroissante:

$$X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \ldots \supset X^{(\alpha)} \supset \ldots$$

Par conséquent (selon II, 2), *il n'y a qu'un ensemble dénombrable de dérivés de l'ensemble X qui soient différents;* autrement dit, à partir d'un certain nombre β ($< \Omega$) tous les dérivés sont identiques: $X^{(\beta)} = X^{(\beta+1)} = \ldots$

L'ensemble $X^{(\beta)}$, comme identique à son dérivé, est *parfait*.

En particulier, si l'on pose $X = 1$ et $1^{(0)} = 1$, on a (§ 12, I):

(i) $$1 = \sum_{\alpha<\beta} (1^{(\alpha)} - 1^{(\alpha+1)}) + 1^{(\beta)}.$$

Or, chacun des ensembles $1^{(\alpha)} - 1^{(\alpha+1)}$ étant dénombrable, en tant que composé de points isolés (§ 18, VIII), leur somme dénombrable $\sum_{\alpha<\beta} (1^{(\alpha)} - 1^{(\alpha+1)})$ est encore un ensemble dénombrable.

On retrouve ainsi dans la formule (i) le théorème de Cantor-Bendixson (§ 18, V): *en enlevant de l'espace un ensemble dénombrable, on parvient à un ensemble parfait.*

C'est précisément par cette voie que ce théorème a été démontré pour la première fois. L'avantage de ce raisonnement vis à vis du raisonnement exposé au § précédent est de ne pas faire intervenir l'axiome du choix et de pouvoir énumérer *effectivement* les éléments de chaque ensemble clairsemé: car la suite des dérivés et l'ensemble $X - X'$ sont effectivement dénombrables (§ 18, VIII) [1]).

V. Analyse logique [2]). Les relations entre les propositions suivantes ont été étudiées dans les espaces $\mathcal{L}$:

(1) *toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés croissants est dénombrable,*
(2) *toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants est dénombrable,*
(3) *tout ensemble contient un ensemble dense dénombrable,*
(4) *tout ensemble clairsemé est dénombrable,*
(5) *tout ensemble indénombrable contient un point de condensation.*

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles des points,* Fund. Math. I, pp. 1—6.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits,* Fund. Math. 2 (1921), pp. 179—188, et ma note *Une remarque sur les classes $\mathcal{L}$ de M. Fréchet,* Fund. Math. 3 (1922), pp. 41—43. Voir aussi (pour le cas de l'espace métrique) W. Gross, *Zur Theorie der Mengen in denen ein Distanzbegriff definiert ist,* Wiener Ber. 123 (1914), p. 801.

On prouve que les propositions (4) et (5) sont équivalentes, que (4) entraîne (2) et que (3) entraîne (1). Les implications inverses subsistent dans les espaces $\mathcal{L}$ dans lesquels la fermeture est toujours un ensemble fermé, mais elles peuvent être en défaut dans des espaces $\mathcal{L}$ plus généraux.

VI. Familles de fonctions continues. Soit $f(x)$ une fonction continue qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. L'espace $\mathcal{X}$ étant séparable, il existe une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ telle que chaque point p de $\mathcal{X}$ en est limite d'une sous-suite: $p = \lim x_{k_n}$. Or, la fonction f étant continue, ses valeurs sont déterminées par celles aux points x_n, car $f(p) = \lim f(x_{k_n})$. Autrement dit, si $f(x_n) = g(x_n)$ pour chaque n, les fonctions f et g sont identiques. Il en résulte que la puissance de la famille de toutes les fonctions continues qui transforment l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de l'espace $\mathcal{Y}$ ne peut dépasser la puissance de la famille des suites (dénombrables) extraites de l'espace $\mathcal{Y}$, c. à d. la puissance $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, qui est égale à $\mathfrak{c}$. *La famille considérée est donc de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Ainsi, la famille des sous-ensembles de l'espace $\mathcal{Y}$ qui sont des images continues d'un sous-ensemble fixe de l'espace $\mathcal{X}$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$. Il en résulte que dans un espace ayant la puissance du continu il y a autant des *types topologiques* (§ 13, VIII) que des sous-ensembles, à savoir $2^{\mathfrak{c}}$.

C. Problèmes de la dimension (§§ 20—22).

L'espace est supposé assujetti aux axiomes I — V. On peut donc admettre qu'une distance $|x-y|$ entre les points de cet espace est définie; autrement dit, qu'on est en présence d'un espace métrique séparable.

§ 20. Définitions. Propriétés générales.

I. Définition de la dimension [1]. On assigne à l'espace $\mathcal{X}$ un entier $\geqslant -1$ ou ∞ que l'on appelle *dimension de* $\mathcal{X}$; en symboles: $\dim \mathcal{X}$. Le symbole $\dim_p \mathcal{X}$ désigne la *dimension de* $\mathcal{X}$ *au point* p. Les trois conditions suivantes définissent ces notions par induction:

1) $\dim \mathcal{X} = -1$ *veut dire que l'espace* $\mathcal{X}$ *est vide,*

2) *si* $\mathcal{X} \neq 0$, $\dim \mathcal{X} =$ *borne supérieure de* $\dim_p \mathcal{X}$ *pour* $p \in \mathcal{X}$.

3) $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$ *veut dire qu'il existe des entourages ouverts de* p *aussi petits que l'on veut et dont la frontière est de dimension* $\leqslant n$.

Afin d'éviter l'emploi des notions métriques, on peut formuler la proposition 3) de la façon équivalente suivante:

3') $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$ *veut dire qu'il existe dans chaque entourage de* p *un entourage ouvert de* p *dont la frontière est de dimension* $\leqslant n$.

La dimension de l'espace est ainsi définie d'une façon purement topologique; elle est donc *invariante relativement aux transformations homéomorphes de l'espace.*

Exemples. Par définition, un espace (non vide) est *de dimension* 0, lorsqu'il existe pour chaque point des entourages ouverts aussi petits que l'on veut dont la frontière est vide. Tel est par exemple l'espace des nombres rationnels, chaque intervalle à extrémités irrationnelles ayant dans cet espace la frontière vide. Il en est de même de l'espace des nombres irrationnels et, en général, de chaque *ensemble frontière situé sur la ligne droite.*

L'espace des nombres réels est de dimension $\leqslant 1$, car la frontière d'un intervalle, comme composée de deux points, est de dimension 0. D'une façon analogue, le plan est de dimension $\leqslant 2$ (car la circonférence est de dimension $\leqslant 1$) et, en général, l'espace cartésien à n dimensions (au sens classique) est de dimension $\leqslant n$. La démonstration que la dimension de cet espace est précisément n est moins élémentaire. Nous y reviendrons plus tard.

II. Dimension des sous-ensembles. Etant donnés un ensemble $E\,(\subset \mathcal{X})$ et un point p de E, l'inégalité $\dim_p E \leqslant n+1$ signifie d'après 3) qu'il existe un entourage ouvert de p *relatif à* E, aussi petit que l'on veut et dont la frontière relative à E est de dimension $\leqslant n$; autrement dit, qu'il existe un ensemble ouvert G aussi petit que l'on veut, contenant p et tel que $\dim (E \cdot \overline{EG} - G) \leqslant n$. Car la frontière relative à E de l'ensemble EG est $E \cdot \overline{EG} - EG = E \cdot \overline{EG} - G$.

---

[1] L'idée de la définition de la dimension remonte à H. Poincaré, Revue de métaph. et de mor. 20 (1912) et *Dernières pensées*, p. 65, Paris 1926 (édition posthume). La définition a été ensuite précisée par M. L. E. J. Brouwer, *Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff*, Journ. f. Math. 142 (1913), p. 146 et Proc. Akad. Amsterdam, 26 (1923), p. 795. La théorie de la dimension, basée sur une définition bien rapprochée de celle de Poincaré-Brouwer, a été créée et développée indépendamment par M. K. Menger et P. Urysohn dans plusieurs ouvrages à partir de l'année 1922. Voir surtout K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928 et P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. 7—8 (1925—26).

(1) *la dimension d'un ensemble ne dépasse jamais la dimension de l'espace entier;* en symboles: *si* $p \in E$, *on a* $\dim_p E \leqslant \dim_p \mathcal{X}$.

En raisonnant par induction, on peut, en effet, admettre que cet énoncé est vrai pour l'espace n-dimensionnel et que $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$. Soit donc G un entourage ouvert de p tel que $\dim[\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$. Il s'agit de prouver que la frontière relative à E de l'ensemble EG est de dimension $\leqslant n$. Or, cette frontière relative étant égale à $E \cdot \overline{EG} - G \subset \overline{G} - G = \mathrm{Fr}(G)$, on a par hypothèse la double inégalité $\dim(E \cdot \overline{EG} - G) \leqslant \dim[\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$.

(2) *pour que* $\dim_p E \leqslant n+1$, *il faut et il suffit qu'il existe un entourage ouvert* G *de* p *aussi petit que l'on veut et tel que* $\dim[E \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$.

Supposons, en effet, que $\dim_p E \leqslant n+1$. Soit donc H un ensemble ouvert dans E et tel que $\dim(E\overline{H} - H) \leqslant n$. Les ensembles H et $E-H$ étant séparés (§ 16, V, 3), il existe un ensemble ouvert G tel que $H \subset G$ et $\overline{G} \cdot E - \overline{H} = 0$ (§ 16, V, 6). Par conséquent $E \cdot \overline{G} - G \subset E \cdot \overline{H} - H$, d'où selon (1): $\dim(E \cdot \overline{G} - G) \leqslant \dim(E \cdot \overline{H} - H) \leqslant n$. Comme en outre, selon § 16, V, 6, le diamètre de G diffère aussi peu que l'on veut de celui de H, la nécessité de la condition se trouve établie.

Pour prouver que la condition est suffisante, considérons l'ensemble G en question et posons $H = EG$. Il vient $E \cdot \overline{H} - H = E \cdot \overline{EG} - G \subset E \cdot \overline{G} - G = E \cdot \mathrm{Fr}(G)$, d'où $\dim(E \cdot \overline{H} - H) \leqslant \dim[E \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$, donc $\dim_p E \leqslant n+1$.

Un cas particulier de l'énoncé (2) est le suivant:

(2_0) *pour que* $\dim_p E = 0$, *il faut et il suffit qu'il existe un entourage* G *de* p *aussi petit que l'on veut et tel que* $E \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0$.

III. L'ensemble $E_{(n)}$. *Définition: p appartient à l'ensemble* $E_{(n)}$, *lorsque* $\dim_p(E+p) \leqslant n$, c. à d. lorsqu'il existe un entourage G de p aussi petit que l'on veut et tel que $\dim[E \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-1$.

En particulier, si E constitue l'espace entier, $E_{(n)}$ désigne l'ensemble des points où l'espace est de dimension $\leqslant n$.

L'inclusion $E \subset E_{(n)}$ équivaut à l'inégalité $\dim E \leqslant n$.

D'après II (1) l'inclusion $A \subset B$ entraîne $B_{(n)} \subset A_{(n)}$.

1. *On a* $\dim(E \cdot E_{(n)}) \leqslant n$. En effet, si $p \in E \cdot E_{(n)}$, on a par définition $\dim_p E \leqslant n$, donc, selon II (1), $\dim_p(E \cdot E_{(n)}) \leqslant n$.

D'ailleurs, la dimension de $E_{(n)}$ peut être supérieure à n. Si par exemple E se compose d'un seul point, $E_{(0)}$ est identique à l'espace entier.

2. *L'ensemble* $E_{(n)}$ *est un* G_δ [1]. En effet, on a $p \in E_{(n)}$, lorsqu'il existe, pour chaque k, un ensemble ouvert G contenant p et tel que $\dim[E \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-1$ et $\delta(G) < 1/k$. Désignons par H_k la somme de tous les ensembles G de ce genre. On a donc $E_{(n)} = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots$

3. *Etant donnés un ensemble E et un entier n, il existe une suite* $D_1, D_2, \ldots$ *d'ensembles ouverts tels que* 1^0 $\dim[E \cdot \mathrm{Fr}(D_i)] \leqslant n-1$, 2^0 *les ensembles* $E_{(n)} \cdot D_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *constituent une base pour l'ensemble* $E_{(n)}$, autrement dit, pour chaque point $p \in E_{(n)}$, il existe parmi les ensembles D_i un qui contient p et qui est de diamètre aussi petit que l'on veut, 3^0 *en posant* $S = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(D_i)$, *on a* $E_{(n)} \subset (E-S)_{(0)}$ *et* $\dim[E_{(n)} - S] \leqslant 0$.

En effet, pour k fixe, faisons correspondre à chaque point $p \in E_{(n)}$ un ensemble ouvert $G(p)$ contenant p et tel que $\delta[G(p)] < 1/k$ et $\dim\{E \cdot \mathrm{Fr}[G(p)]\} \leqslant n-1$. D'après le théorème de Lindelöf (p. 102) on peut trouver une suite dénombrable $D_{k,1}, D_{k,2}, \ldots$ d'ensembles $G(p)$ dont la somme soit égale à celle de tous les $G(p)$. En transformant la suite double $\{D_{k,m}\}$ en une suite simple, on obtient la suite $\{D_i\}$ demandée.

Car chaque point p de $E_{(n)}$ étant contenu dans un ensemble $G(p)$ arbitrairement petit, il existe un D_i tel que $p \in D_i \subset G(p)$, d'où la condition 2^0.

La condition 3^0 en est une conséquence en vertu de la formule évidente: $(E-S) \cdot \mathrm{Fr}(D_i) = 0 = (E_{(n)} - S) \cdot \mathrm{Fr}(D_i)$.

On déduit comme cas particulier de l'énoncé précédent que.

4. *Tout espace n-dimensionnel contient une base dénombrable composée d'ensembles ouverts à frontières de dimension* $\leqslant n-1$. *En enlevant de l'espace ces frontières, on obtient un ensemble* 0*-dimensionnel (ou vide).*

5. *La condition* $\dim X \leqslant n$ *entraîne* $E_{(0)} \subset (E+X)_{(n+1)}$.

En effet, si $p \in E_{(0)}$, il existe un entourage G de p tel que $E \cdot \mathrm{Fr}(G) = 0$. Donc $(E+X) \cdot \mathrm{Fr}(G) = X \cdot \mathrm{Fr}(G) \subset X$, d'où $\dim[(E+X) \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$, ce qui prouve que $p \in (E+X)_{(n+1)}$.

---

[1]) Voir K. Menger, *Ueber die Dimension von Punktmengen II Teil*, Mon. f. Math. u. Phys. 34 (1924), p. 141, P. Urysohn, Fund. Math. 8, p. 277 et L. Tumarkin, Fund. Math. 8, p. 360.

§ 21. Espace de dimension 0 [1]).

I. Base de l'espace. Un espace est par définition de dimension 0, lorsque chaque point est situé dans un entourage aussi petit que l'on veut et qui est à la fois fermé et ouvert (ce qui équivaut à l'hypothèse que la frontière de cet entourage est vide). On en déduit le théorème suivant, qui résulte d'ailleurs directement de § 20, III, 4:

Théorème I. Tout espace 0-dimensionnel contient une base dénombrable composée d'ensembles à la fois fermés et ouverts.

On peut supposer, en outre, que *le diamètre de ces ensembles ne dépasse pas un nombre positif donné d'avance.*

Corollaires. Dans un espace 0-dimensionnel: 1) *Chaque ensemble ouvert (en particulier, l'espace tout entier) est somme d'une suite d'ensembles disjoints, à la fois fermés et ouverts (et de diamètre aussi petit que l'on veut);* 2) *chaque ensemble fermé est produit d'une suite d'ensembles à la fois fermés et ouverts.*

Pour prouver le cor. 1, posons conformément au théor. I:

$$G = F_1 + F_2 + \ldots = F_1 + (F_2 - F_1) + (F_3 - F_1 - F_2) + \ldots$$

où G est l'ensemble ouvert donné et $F_1, F_2, \ldots$ sont des ensembles à la fois fermés et ouverts. Le dernier membre de la formule représente la décomposition demandée.

Le cor. 2 est une conséquence immédiate du cor. 1.

Théorème I' [2]). *Dans un espace 0-dimensionnel, chaque ensemble G_δ qui est à la fois dense et frontière est le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur un système régulier d'ensembles $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$ non vides, fermés, ouverts et tels que: 1⁰ $\delta(A_{k_1 \ldots k_n}) < 1/n$, 2⁰ deux ensembles $A_{k_1 \ldots k_n}$ et $A_{l_1 \ldots l_n}$ pourvus des différents systèmes de n indices sont toujours disjoints.*

Soit Q l'ensemble G_δ en question: $Q = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$, où G_n est ouvert et $G_n \supset G_{n+1}$. L'ensemble Q n'étant pas fermé, il existe un indice j_1 tel que G_{j_1} n'est pas fermé. On peut donc poser en vertu du corollaire 1: $G_{j_1} = A_1 + A_2 + \ldots$, $\delta(A_i) < 1$, les ensembles A_i étant fermés, ouverts, disjoints et non vides.

Procédons par induction. Les ensembles $A_{k_1 \ldots k_n}$ supposés définis et assujettis à l'inclusion

(i) $$A_{k_1 \ldots k_n} \subset G_n$$

pour un entier $n \geqslant 1$, les ensembles $A_{k_1 \ldots k_n k_{n+1}}$ seront définis comme il suit:

---

[1]) La plupart des théorèmes de ce § seront généralisés par induction dans le § suivant, où l'on trouvera aussi les renvois bibliographiques.

[2]) Ce théorème interviendra dans l'étude des espaces complets (§ 32).

L'ensemble $A_{k_1 \ldots k_n}$ étant ouvert, il existe un indice $j_{n+1} \geqslant n+1$ tel que l'ensemble $A_{k_1 \ldots k_n} \cdot G_{j_{n+1}}$ n'est pas fermé; car autrement l'ensemble $Q \cdot A_{k_1 \ldots k_n}$ serait fermé, contrairement à l'hypothèse qu'il est dense et frontière dans $A_{k_1 \ldots k_n}$. On peut donc poser comme auparavant: $A_{k_1 \ldots k_n} \cdot G_{j_{n+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n i}$, $\delta(A_{k_1 \ldots k_n i}) < 1/n+1$, les ensembles $A_{k_1 \ldots k_n i}$ étant fermés, ouverts, disjoints et non vides. En outre, on peut remplacer dans (i) n par $n+1$ en vertu de l'inégalité $j_{n+1} \geqslant n+1$, qui implique que $G_{j_{n+1}} \subset G_{n+1}$.

Les ensembles $A_{k_1 \ldots k_n}$ étant ainsi définis pour chaque n, nous allons démontrer que Q coïncide avec le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur ces ensembles.

Soit, d'une part, $p \in Q$. Donc $p \in G_{j_1}$. Il existe par conséquent un indice k_1 tel que $p \in A_{k_1}$. Supposons que $p \in A_{k_1 \ldots k_n}$. Comme en outre $p \in G_{j_{n+1}}$, il existe un k_{n+1} tel que $p \in A_{k_1 \ldots k_n k_{n+1}}$. On parvient ainsi à la formule $p \in A_{k_1} \cdot A_{k_1 k_2} \cdot A_{k_1 k_2 k_3} \cdot \ldots$

D'autre part, si cette dernière formule est vérifiée, l'inclusion (i) implique que $p \in G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots = Q$.

II. Séparation des ensembles fermés. Nous allons montrer que dans les espaces 0-dimensionnels l'axiome de séparation peut être énoncé sous une forme plus avantageuse. Nous établirons à ce but un lemme de la Théorie générale des ensembles.

Lemme. Etant donnés deux produits infinis d'ensembles décroissants $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$ et $B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots$ tels que $AB = 0$, l'ensemble

$$F = A_1 \cdot (1 - B_1) + A_2 \cdot (B_1 - B_2) + \ldots + A_n \cdot (B_{n-1} - B_n) + \ldots$$

remplit les formules: $A \subset F$, $FB = 0$, $1 - F = 1 - A_1 + A_1 B_1 - A_2 B_1 + \ldots$

En effet, si $p \in A$, on a p non-$\in B$. Par conséquent: ou bien p n'appartient à aucun B_n et alors $p \in A_1 \cdot (1 - B_1)$, ou bien il existe un indice n tel que $p \in B_{n-1} - B_n$ et alors $p \in A_n \cdot (B_{n-1} - B_n)$. Donc, en tout cas, $p \in F$, d'où $A \subset F$.

Chacun des sommandes du développement de F étant disjoint du produit $B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots$, on en conclut que $FB = 0$.

Enfin, dans le développement de F en série alternée

$$F = A_1 - A_1 B_1 + A_2 B_1 - A_2 B_2 + \ldots + A_n B_{n-1} - A_n B_n + \ldots$$

les termes sont décroissants et leur produit s'annule; le développement demandé de $1 - F$ en résulte directement (§ 12, I (4a)).

Théorème II. A et B étant deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace de dimension 0, *il existe un ensemble fermé et ouvert F tel que* $A \subset F$ *et* $FB = 0$.

D'après le corollaire 2 on a en effet $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$, où les ensembles A_n sont fermés et ouverts. On peut supposer, en outre, que ces ensembles sont décroissants, car autrement on pourrait les remplacer par leurs produits partiels. Des remarques analogues s'appliquent à l'ensemble $B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots$ L'ensemble F du lemme précédent est alors l'ensemble demandé: il est ouvert comme une somme d'ensembles ouverts, il est fermé, car son complémentaire est une somme d'ensembles ouverts.

Théorème III. Etant donnée une décomposition d'un espace 0*-dimensionnel en un système fini d'ensembles ouverts:* $1 = G_1 + \ldots + G_k$, *il existe un système d'ensembles disjoints, fermés, ouverts et tels que* $1 = F_1 + \ldots + F_k$ *et* $F_i \subset G_i$.

En effet, chaque G_i peut être remplacé par un sous-ensemble fermé H_i de façon que $1 = H_1 + \ldots + H_k$ (d'après le cor. du § 16, II). Appliquons le théorème précédent au couple d'ensembles fermés et disjoints H_i et $(1 - G_i)$. On en déduit l'existence d'un ensemble fermé et ouvert K_i tel que $H_i \subset K_i$ et $K_i \cdot (1 - G_i) = 0$, d'où $1 = K_1 + \ldots + K_k$ et $K_i \subset G_i$. Les ensembles $F_1 = K_1$, $F_2 = K_2 - K_1, \ldots$, $F_k = K_k - (K_1 + \ldots + K_{k-1}), \ldots$ satisfont à la thèse du théorème.

III. Addition des ensembles 0-dimensionnels.

Théorème IV. Si un espace se laisse décomposer en une série (finie ou infinie) d'ensembles fermés: $1 = A_1 + A_2 + \ldots$ *dont tous, sauf peut-être le premier, sont de dimension* 0, *tandis que le premier est de dimension* 0 *dans un point donné p, l'espace entier est de dimension* 0 *au point p.*

Soit S une sphère ouverte de centre p. Il s'agit de construire un ensemble fermé et ouvert G tel que $p \varepsilon G \subset S$.

L'ensemble G sera défini comme la somme d'une série d'ensembles ouverts croissants G_n. Ces derniers seront définis par induction simultanément à des ensembles ouverts croissants H_n, de façon que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$\text{(i)} \quad \overline{G}_n \cdot \overline{H}_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{(ii)} \quad A_n \subset G_n + H_n.$$

L'ensemble A_1 étant de dimension 0 au point p, il existe un ensemble F_1 qui contient ce point et qui est fermé et ouvert relativement à A_1. L'ensemble A_1 étant fermé, les ensembles F_1 et $A_1 - F_1$ sont donc fermés. On peut supposer de plus que F_1 est contenu dans la sphère S, de sorte que les ensembles F_1 et $(A_1 - F_1 + 1 - S)$ soient fermés et disjoints. En appliquant l'axiome de séparation (voir d'ailleurs § 16, II), on en déduit l'existence de deux ensembles ouverts G_1 et H_1 tels que

$$F_1 \subset G_1, \; A_1 - F_1 + 1 - S \subset H_1 \quad \text{et} \quad \overline{G}_1 \cdot \overline{H}_1 = 0.$$

Les conditions (i) et (ii) sont donc satisfaites pour $n = 1$. Supposons qu'elles le soient pour n; nous allons les établir pour $n+1$.

Les ensembles $A_{n+1} \cdot \overline{G}_n$ et $A_{n+1} \cdot \overline{H}_n$ étant fermés et disjoints et A_{n+1} étant de dimension 0, il existe d'après le théorème II un ensemble F_{n+1} fermé et ouvert dans A_{n+1} et tel que: $A_{n+1} \cdot \overline{G}_n \subset F_{n+1}$, $F_{n+1} \cdot \overline{H}_n = 0$. Les ensembles F_{n+1} et $A_{n+1} - F_{n+1}$ étant fermés (puisque $A_{n+1} - F_{n+1}$ est fermé relativement à l'ensemble A_{n+1}, qui est lui-même fermé), les ensembles $(\overline{G}_n + F_{n+1})$ et $(\overline{H}_n + A_{n+1} - F_{n+1})$ sont fermés et disjoints. En vertu de l'axiome de séparation, il existe deux ensembles ouverts G_{n+1} et H_{n+1} tels que:

$$\overline{G}_n + F_{n+1} \subset G_{n+1}, \; \overline{H}_n + A_{n+1} - F_{n+1} \subset H_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{G}_{n+1} \cdot \overline{H}_{n+1} = 0.$$

Les conditions (i) et (ii) se trouvent donc satisfaites pour l'indice $n+1$.

En outre, les ensembles G_n et H_n étant croissants, la condition $G_n \cdot H_n = 0$, qui résulte de (i), entraîne $G_n \cdot H_m = 0$, quels que soient n et m (puisque $G_n \cdot H_{n+k} \subset G_{n+k} \cdot H_{n+k} = 0$). Par conséquent, si l'on pose $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$ et $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$, il vient $GH = 0$. D'autre part, selon (ii), $1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} (G_n + H_n) = G + H$ et on en conclut que $H = 1 - G$. Les ensembles G et H étant ouverts, l'ensemble G est donc à la fois fermé et ouvert.

Reste à prouver que $p \varepsilon G \subset S$. Or par définition de G_1 on a $p \varepsilon F_1 \subset G_1 \subset G$. D'autre part, par définition de H_1 on a $1 - S \subset H_1$, d'où $1 - H_1 \subset S$ et, les ensembles G et H_1 étant disjoints, il vient $G \subset 1 - H_1 \subset S$.

Corollaires. 1. *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles* 0*-dimensionnels fermés* (ou, plus généralement, d'ensembles F_σ 0-dimensionnels) *est un ensemble* 0*-dimensionnel.*

2. *La somme de deux ensembles 0-dimensionnels dont un est à la fois un F_σ et un G_δ est 0-dimensionnelle.*

3. *En ajoutant à un ensemble 0-dimensionnel un seul point, on n'altère pas sa dimension;* en symboles: *si* $\dim A = 0$, *on a* $A_{(0)} = 1$.

4. *G étant un ensemble ouvert, la condition* $\dim (EG) \leqslant 0$ *entraîne* $E_{(0)} = (E - G)_{(0)}$.

Pour prouver le corollaire 1 on n'a qu'à considérer la somme des ensembles en question comme l'espace. Le corollaire 2 en résulte, car les deux ensembles envisagés sont des ensembles F_σ relativement à leur somme. Le corollaire 3 est un cas particulier du corollaire 2. Enfin, pour établir le corollaire 4, posons $p \varepsilon (E - G)_{(0)}$, c. à d. $\dim_p (p + E - G) = 0$. L'ensemble $p + E$ étant considéré comme l'espace et l'ensemble EG étant, dans cet espace, une somme dénombrable d'ensembles fermés de dimension 0, on conclut du théorème IV que l'ensemble $(p + E - G) + EG = p + E$ est de dimension 0 au point p, c. à d. que $p \varepsilon E_{(0)}$, d'où le cor. 4.

Remarques. Le théorème IV serait en défaut, si l'on supposait seulement que $\dim_p A_n = 0$. Divisons, en effet, l'intervalle 01 en une suite d'intervalles convergeant vers 0. Soit A_1 l'ensemble composé du point 0 et des intervalles pairs; soit A_2 l'ensemble composé de 0 et des intervalles impairs. Evidemment $\dim_p A_1 = 0 = \dim_p A_2$, tandis que $\dim_p (A_1 + A_2) = 1$.

On ne peut remplacer non plus l'hypothèse que A_1 est fermé par celle que A_1 est un F_σ, comme le prouve l'exemple suivant: A_2 est une suite de points convergeant vers 0 (= le point p) et $A_1 =$ (l'intervalle $01 - A_2$).

IV. Prolongement des ensembles 0-dimensionnels.

Théorème V. Chaque ensemble 0-dimensionnel est contenu dans un G_δ 0-dimensionnel.

En effet, selon § 20, III, 3, à chaque ensemble E correspond un ensemble S qui est un F_σ tel que $ES = 0$ et $\dim [E_{(0)} - S] \leqslant 0$. Or, si l'on suppose que $\dim E = 0$, on a selon N° III, cor. 3, $E_{(0)} = 1$. $1 - S$ est donc un G_δ 0-dimensionnel qui contient l'ensemble E.

Théorème VI[1]). *Chaque espace 0-dimensionnel est topologiquement contenu dans l'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor.*

L'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor est par définition (§ 14, V, 2) l'ensemble des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ où $\mathfrak{z}^i$ admet une des deux valeurs:

[1]) P. Urysohn, Fund. Math. 7, p. 77.

0 ou 2. Il s'agit de définir une fonction bicontinue $\mathfrak{z}(x)$ dont l'argument parcourt l'espace 0-dimensionnel considéré.

Or, $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots$ étant la base de l'espace composée d'ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés (th. I, p. 120), posons $\mathfrak{z}^i(x) = 2$ lorsque $x \varepsilon R_i$ et $\mathfrak{z}^i(x) = 0$ dans le cas contraire.

La fonction $\mathfrak{z}(x)$ ainsi définie est continue, car (§ 14, IV) la fonction $\mathfrak{z}^i(x)$ est, pour i fixe, continue, comme fonction caractéristique d'un ensemble fermé et ouvert (§ 13, VI). Pour prouver que la fonction $\mathfrak{z}(x)$ est bicontinue, reste à démontrer (§ 13, VIII (3a)) que la condition $p \varepsilon 1 - \overline{X}$ entraîne $\mathfrak{z}(p) \varepsilon \mathcal{C} - \overline{\mathfrak{z}(X)}$.

Or, par définition de la base, il existe un indice i tel que $p \varepsilon R_i \subset 1 - \overline{X} \subset 1 - X$. Donc $\mathfrak{z}^i(p) = 2$, tandis que pour $x \varepsilon X$ on a $\mathfrak{z}^i(x) = 0$; par conséquent $|\mathfrak{z}(p) - \mathfrak{z}(x)| \geqslant 1/3^i$ (nous identifions ici la suite $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \ldots]$ avec le nombre $\frac{\mathfrak{z}^1}{3} + \frac{\mathfrak{z}^2}{3^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{z}^i}{3^i} + \ldots$). Le nombre $\mathfrak{z}(p)$ ne peut donc appartenir à la fermeture de l'ensemble des nombres $\mathfrak{z}(x)$, c. à d. que $\mathfrak{z}(p) \varepsilon \mathcal{C} - \overline{\mathfrak{z}(X)}$.

Corollaire. L'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor a le rang topologique le plus élevé parmi tous les espaces 0-dimensionnels.

Car l'ensemble $\mathcal{C}$ est lui-même 0-dimensionnel, comme sous-ensemble frontière de la ligne droite (voir, § 20, I, exemples).

Remarque. La même propriété appartient aussi à *l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels* (de l'intervalle 01). Car l'ensemble $\mathcal{N}$, comme l'espace de toutes les suites infinies formées de nombres naturels, contient l'ensemble des suites formées de deux nombres 1 et 2, qui est homéomorphe à $\mathcal{C}$. Inversement $\mathcal{N}$, comme ensemble frontière dans un intervalle, est 0-dimensionnel; il est donc contenu topologiquement dans $\mathcal{C}$.

On pourrait dire aussi: l'ensemble $\mathcal{C}$, ainsi que $\mathcal{N}$, ont le rang topologique le plus élevé parmi les ensembles frontières de l'espace des nombres réels.

V. Espaces dénombrables.

Chaque espace de puissance inférieure à celle du continu est 0-dimensionnel.

D'une façon plus générale, *si l'espace est d'ordre inférieur à $\mathfrak{c}$ au point p* (voir § 18, VII), *l'espace est 0-dimensionnel en ce point.*

En effet, parmi les sphères de rayon $< \varepsilon$, décrites du point p, il y en a qui ont la frontière (la „surface") vide (puisque les frontières de deux sphères différentes sont disjointes). Une sphère de ce genre est donc à la fois fermée et ouverte.

Chaque espace dénombrable est topologiquement contenu dans l'ensemble $\mathcal{R}$ des nombres rationnels.

Soit, en effet, A un espace dénombrable. A étant topologiquement contenu dans $\mathcal{C}$, on peut l'imaginer comme sous-ensemble de l'espace des nombres réels.

D'après un théorème classique de la théorie des ensembles ordonnés, les ensembles $A+\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ ont le même type d'ordre, c. à d. qu'il existe une fonction c r o i s s a n t e $f(x)$ qui transforme $A+\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$. Cette fonction est continue, car, étant donnée une suite $x_1 < x_2 < \dots$ qui converge vers x (les points x_n et x étant supposés points de $A+\mathcal{R}$), x est dans l'ensemble $A+\mathcal{R}$ le premier point qui succède à tous les points x_n et, en vertu de la similitude des ensembles $A+\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$, le point $f(x)$ a dans l'ensemble $\mathcal{R}$ la même propriété par rapport à la suite $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... Or, si l'on supposait que $f(x) \neq \lim_{n=\infty} f(x_n)$, il existerait un nombre rationnel à la fois supérieur à tous les $f(x_n)$ et inférieur à $f(x)$, ce qui est évidemment impossible.

Il est ainsi établi que la fonction $f(x)$ est continue. Pour les mêmes raisons la fonction inverse $x=f^{-1}(y)$ est continue; f est donc une homéomorphie qui transforme A en une partie de $\mathcal{R}$.

Ajoutons qu'une méthode analogue permet de prouver facilement que *tous les espaces dénombrables denses en soi constituent un seul type topologique* (c. à d. qu'ils sont homéomorphes) [1]).

§ 22. Espace de dimension *n*.

I. Addition des ensembles.

(+) *La somme d'un ensemble n-dimensionnel et d'un ensemble 0-dimensionnel est de dimension* $\leqslant n+1$.

Autrement dit, les formules $\dim(1-Q)=n$ et $\dim Q=0$ entraînent $\dim 1 \leqslant n+1$.

L'ensemble $Q+p$ étant 0-dimensionnel, quel que soit p (§ 21, III, 3), il existe un entourage G de p aussi petit que l'on veut et tel que $Q\cdot \mathrm{Fr}(G)=0$ (d'après § 20, II, 2_0), c. à d. que $\mathrm{Fr}(G) \subset 1-Q$, d'où $\dim \mathrm{Fr}(G) \leqslant n$. Donc $\dim 1 \leqslant n+1$.

Théorème I [2]). *Si un espace se laisse décomposer en une série (finie ou infinie) d'ensembles fermés n-dimensionnels:* $1=A_1+A_2+\dots$, *il est lui-même de dimension n.*

[1]) W. Sierpiński, Fund. Math. 1 (1920), p. 11 et Wektor 1915.

[2]) Voir W. Hurewicz, *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. 96 (1927), p. 760 et L. Tumarkin, *Ueber die Dimension nicht abgeschlos-*

Le théorème étant vrai pour $n=0$ (§ 21, III, théor. IV), supposons qu'il soit vrai pour $n-1$. Posons $B_1=A_1$ et, en général, $B_k=A_k-(B_1+\dots+B_{k-1})$. Les ensembles B_k sont donc des $\boldsymbol{F}_\sigma$ disjoints et l'on a: $1=B_1+B_2+\dots$, $\dim B_k \leqslant n$.

D'après § 20, III, 3 (en y posant $B_k=E \subset E_{(n)}$ et $S_k=E\cdot S$), il existe un ensemble S_k, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de dimension $\leqslant n-1$ fermés dans B_k, et tel que $\dim(B_k-S_k)\leqslant 0$. Les ensembles fermés dans B_k étant des $\boldsymbol{F}_\sigma$, puisque B_k est un $\boldsymbol{F}_\sigma$, et la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ de dimension $n-1$ étant par hypothèse $(n-1)$-dimensionnelle, on a $\dim S_k \leqslant n-1$, d'où pour la même raison $\dim(S_1+S_2+\dots)\leqslant n-1$.

Les ensembles B_k étant disjoints, il vient:

$$B_i\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(B_i\cdot B_k-S_k)=B_i-S_i.$$

On voit ainsi que l'ensemble B_i-S_i, comme produit d'un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et de $\sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$, est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ dans ce dernier. Donc l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$, considéré comme l'espace, est somme d'une série d'ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ de dimension $\leqslant 0$. Par conséquent $\dim \sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)\leqslant 0$.

L'identité $1=\sum_{k=1}^{\infty}B_k=\sum_{k=1}^{\infty}S_k+\sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$ représente donc l'espace comme une somme d'un ensemble de dimension $\leqslant n-1$ et d'un ensemble de dimension $\leqslant 0$. D'après (+) l'espace est de dimension $\leqslant n$.

Corollaires. 1. *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *n-dimensionnels est n-dimensionnelle.*

2. *La somme de deux ensembles n-dimensionnels dont un est à la fois un* $\boldsymbol{F}_\sigma$ *et un* $\boldsymbol{G}_\delta$ *est n-dimensionnelle.*

3. *En ajoutant à un ensemble (non vide) un seul point on n'altère pas sa dimension.*

sener Mengen, Math. Ann. (1928), p. 641. Pour le cas de l'espace compact, voir K. Menger, Monatsh. 34, p. 147 et P. Urysohn, Fund. Math. 8, p. 316.

4. *Etant donnés un ensemble E et un entier n, il existe un ensemble S qui est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ tel que*

$$\dim ES \leqslant n-1, \quad E_{(n)} \subset (E-S)_{(0)} \quad et \quad \dim [E_{(n)} - S] \leqslant 0.$$

En particulier, *chaque espace n-dimensionnel se compose d'un $\boldsymbol{F}_\sigma$ $(n-1)$-dimensionnel et d'un $\boldsymbol{G}_\delta$ 0-dimensionnel.*

5. *G étant un ensemble ouvert, la condition* $\dim (EG) \leqslant n$ *entraîne* $E_{(n)} = (E-G)_{(n)}$.

6. *Etant donné:* $1 = A_1 + A_2 + \ldots$, *où A_k fermé,* $\dim_p A_1 \leqslant n$, $\dim A_k \leqslant n$ *pour* $k > 1$, *alors* $\dim_p 1 \leqslant n$.

Les cor. 1—3 sont des conséquences faciles du théor. 1 (cf. d'ailleurs la démonstration des corollaires du th. IV, p. 122). En envisageant l'ensemble S du § 20, III, 3 et en considérant l'ensemble ES comme l'espace, on déduit du cor. 1 que $\dim ES \leqslant n-1$.

En particulier, si E désigne l'espace n-dimensionnel tout entier, il vient $E_{(n)} = 1$ et $1 = (1-S)_{(0)}$, d'où $\dim (1-S) = 0$.

Le cor. 4 se trouve ainsi établi. En y substituant respectivement $E-G$ et EG à E, on en déduit l'existence de deux ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$: S et W tels que l'on ait: $\dim (SE-G) \leqslant n-1$, $(E-G)_{(n)} \subset (E-G-S)_{(0)}$, $\dim (WEG) \leqslant n-1$ et $\dim (EG-W) \leqslant 0$, puisque par hypothèse $EG \subset (EG)_{(n)}$. Or, l'ensemble $E-G-S$ s'obtenant de $(E-G-S+EG-W)$ par soustraction de l'ensemble ouvert G, dont le produit avec ce dernier est 0-dimensionnel, on conclut de § 21, III, cor. 4 que $(E-G-S+EG-W)_{(0)} = (E-G-S)_{(0)}$.

Les ensembles $SE-G$ et WEG étant de dimension $\leqslant n-1$ et, en outre, des $\boldsymbol{F}_\sigma$ relativement à E, il résulte du corollaire 1 que leur somme est aussi de dimension $\leqslant n-1$. Par conséquent (§ 20, III, 5): $(E-G-S+EG-W)_{(0)} \subset (E-G-S+EG-W+SE-G+WEG)_{(n)} = E_{(n)}$, donc $(E-G)_{(n)} \subset (E-G-S)_{(0)} \subset E_{(n)}$, d'où le cor. 5.

Pour prouver le cor. 6, posons $E=1$ et $G = 1 - A_1$. D'après le cor. 1 on a $\dim (A_2 + A_3 + \ldots) \leqslant n$, donc $\dim G \leqslant n$. L'hypothèse $p \,\varepsilon\, (1-G)_{(n)}$ implique donc en vertu du cor. 5 que $\dim_p 1 \leqslant n$.

Théorème 2 [1]. *Pour qu'un espace (non vide) soit de dimension $\leqslant n$, il faut et il suffit qu'il soit une somme de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels.*

---

[1]) W. Hurewicz, l. c. p. 761 et L. Tumarkin, l. c. p. 641.

Le théorème étant évident pour $n=0$, supposons qu'il soit vrai pour $n-1$. D'après le cor. 4, un espace n-dimensionnel se compose d'un ensemble 0-dimensionnel et d'un ensemble $(n-1)$-dimensionnel. En décomposant ce dernier en n ensembles 0-dimensionnels, on obtient une décomposition de l'espace en $n+1$ ensembles 0-dimensionnels.

Le fait que la somme de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels est de dimension $\leqslant n$ est une conséquence immédiate de (+).

Corollaire [1]). *Si* $\dim A = n$ *et* $\dim B = m$, *on a* $\dim (A+B) \leqslant n+m+1$.

II. Séparation des ensembles fermés.

Théorème 3 [2]) *(généralisation du th. II). A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, situés dans un espace n-dimensionnel, il existe un ensemble ouvert G tel que*

$$A \subset G, \quad \overline{G} \cdot B = 0 \quad et \quad \dim [\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-1.$$

Soient, conformément à l'axiome de séparation, U et V deux ensembles ouverts tels que: $A \subset U$, $B \subset V$ et $\overline{U} \cdot \overline{V} = 0$. Soit, conformément au cor. 4 du N^0 précédent, Q un ensemble 0-dimensionnel tel que $\dim (1-Q) = n-1$. Les ensembles $Q \cdot \overline{U}$ et $Q \cdot \overline{V}$ étant disjoints et fermés dans Q, il existe selon le th. II (§ 21, II) un ensemble F fermé et ouvert relativement à Q et tel que $Q \cdot \overline{U} \subset F$ et $Q \cdot \overline{V} \cdot F = 0$, d'où $\overline{V} \cdot F = 0$ (puisque $F \subset Q$).

L'inclusion $B \subset V$ entraîne $B \cdot \overline{F} \subset V \cdot \overline{F}$ et l'égalité $\overline{V} \cdot F = 0$ donne $V \cdot \overline{F} = 0$. Or, V étant ouvert, cette égalité implique que $V \cdot \overline{F} = 0$, donc que $B \cdot \overline{F} = 0$. Les ensembles B et F sont donc séparés. Par raison de symétrie il en est de même des ensembles A et $Q-F$. Comme, en outre, les ensembles A et B, ainsi que F et $Q-F$, sont séparés par hypothèse (voir § 16, V, 3), on en conclut (§ 16, V, 4) que $A+F$ et $B+Q-F$ le sont aussi.

Il existe par conséquent (§ 16, V, 6) un ensemble ouvert G tel que $A+F \subset G$ et $\overline{G} \cdot (B+Q-F) = 0$. Donc $A \subset G$ et $\overline{G} \cdot B = 0$.

---

[1]) Ce corollaire peut d'ailleurs être déduit par l'induction complète directement de la définition de la dimension (plus précisément de § 20, II (2)). Voir K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 114.

[2]) W. Hurewicz, l. c. p. 763 et L. Tumarkin, l. c. p. 653. Comp. P. Urysohn, l. c. p. 316.

En outre, $F \subset G$ et $\bar{G} \cdot Q \subset F$, d'où $(\bar{G} - G) \cdot Q = 0$, de sorte que $\mathrm{Fr}(G) = \bar{G} - G \subset 1 - Q$ et $\dim [\mathrm{Fr}(G)] \leqslant \dim (1 - Q) = n - 1$.

En rapprochant le th. 3 de l'ax. de séparation, on voit que ce théorème présente — dans le cas d'un espace n-dimensionnel — une condition plus avantageuse que cet axiome. On a vu que l'ax. de séparation pouvait être formulé aussi comme il suit: chaque couple d'ensembles fermés et disjoints peut être séparé par un ensemble fermé. A cet énoncé correspond le

Corollaire 1. Chaque couple d'ensembles fermés et disjoints situés dans un espace n-dimensionnel peut être séparé par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n - 1$.

Notamment, la frontière de l'ensemble G du th. 3 est un ensemble de dimension $\leqslant n - 1$ qui sépare les ensembles A et B.

Corollaire 2. La condition énoncée dans le th. 3 est nécessaire et suffisante pour que l'espace soit $\leqslant$ *n-dimensionnel.*

La condition est nécessaire en vertu du th. 3. Inversement, en identifiant A avec un point p donné et B avec le complémentaire d'un entourage ouvert de ce point, la condition considérée implique que $\dim_p 1 \leqslant n$.

III. Décomposition d'un espace n-dimensionnel.

Théorème 4 [1] *(généralisation du th. III). Etant donnée une décomposition d'un espace n-dimensionnel en un système fini d'ensembles ouverts:* $1 = G_1 + \dots + G_k$, *il existe un système d'ensembles ouverts* $H_1, \dots, H_k$ *tel que l'on a*

$$\text{(i)} \qquad 1 = H_1 + \dots + H_k, \quad H_i \subset G_i \quad \text{et} \quad H_{i_1} \cdot \ldots \cdot H_{i_{n+2}} = 0$$

pour chaque système de $n+2$ *indices différents:* $i_1, \dots, i_{n+2}$.

Conformément au th. 2 l'espace se compose, en effet, de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels: $1 = Q_1 + \dots + Q_{n+1}$. Chaque Q_j se laisse décomposer (th. III, p. 122, où Q_j est considéré comme l'espace) en k ensembles disjoints, contenus respectivement dans les ensembles G_i

[1]) Dans le Chap. IV nous établirons le théorème inverse: si à chaque décomposition $1 = G_1 + \dots + G_k$ correspond une décomposition $1 = H_1 + \dots + H_k$ satisfaisant aux conditions du th. 4, l'espace est de dimension $\leqslant n$. On y trouvera aussi quelques généralisations du th. 4.

Le th. 4 est dû à M. Menger, voir *Dimensionstheorie*, p. 158; cf. P. Urysohn, l. c. p. 292.

et relativement ouverts dans Q_j. En formules: $Q_j = H_{j1} + \dots + H_{jk}$ et $H_{ji} \subset G_i$.

Les ensembles $H_{j1}, \dots, H_{jk}$, comme disjoints et relativement ouverts dans Q_j, sont deux à deux séparés; il existe donc (d'après § 16, V, 7) un système d'ensembles ouverts et disjoints $V_{j1}, \dots, V_{jk}$ tels que $H_{ji} \subset V_{ji}$. Posons $H_i = (V_{1i} + \dots + V_{n+1,i}) \cdot G_i$. Il vient:

$$1 = \sum_{j=1}^{n+1} Q_j = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k} H_{ji} = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k} H_{ji} \cdot G_i \subset \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n+1} V_{ji} \cdot G_i = \sum_{i=1}^{k} H_i.$$

Enfin, si l'on supposait que $p \in H_{i_1} \cdot \ldots \cdot H_{i_{n+2}}$, il existerait nécessairement un indice $j \leqslant n+1$ et deux indices différents i et i' tels que $p \in V_{ji} \cdot V_{ji'}$. Mais cela contredit l'hypothèse que les ensembles $V_{j1}, \dots, V_{jk}$ sont disjoints.

Remarque. En vertu du corollaire du § 16, II, chaque H_i contient un domaine fermé H_i^* tel que $1 = H_1^* + \dots + H_k^*$. Ainsi, les *ensembles ouverts* H_i peuvent être remplacés dans l'énoncé du théorème 4 par des *domaines fermés.*

Corollaire 1. Etant donnée une décomposition d'un espace n-dimensionnel en un système fini d'ensembles fermés: $1 = F_1 + \dots + F_k$, *il existe pour chaque* $\varepsilon > 0$ *un système de domaines fermés* $H_1, \dots, H_k$ *assujettis aux conditions* (i), *où* G_i *désigne la sphère généralisée ouverte de centre* F_i *et de rayon* ε.

Corollaire 1 généralisé. Etant donnés dans un espace (de dimension arbitraire) un ensemble fermé F de dimension n et une décomposition de l'espace en un système fini d'ensembles fermés: $1 = F_1 + \dots + F_k$, *il existe pour chaque* $\varepsilon > 0$, *un système d'ensembles ouverts tels que:* $1 = Q_1 + \dots + Q_k$, $F \cdot \bar{Q}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \bar{Q}_{i_{n+2}} = 0$ *pour chaque système de* $n+2$ *indices différents et que* Q_i *soit situé dans la sphère généralisée ouverte* G_i *de centre* F_i *et de rayon* ε.

Appliquons, en effet, le corollaire 1 (qui est une conséquence directe du th. 4) à l'ensemble $F = F \cdot F_1 + \dots + F \cdot F_k$, considéré comme l'espace. D'après le théorème du § 16, II, il existe un système d'ensembles ouverts $V_1, \dots, V_k$ tels que $H_i \subset V_i$ et que les systèmes $H_1, \dots, H_k$ et $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k$ soient semblables au sens combinatoire. On a donc $\bar{V}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \bar{V}_{i_{n+2}} = 0$ pour chaque système d'indices différents. On peut, de plus, supposer que $V_i \subset G_i$, car on peut remplacer V_i par $V_i \cdot G_i$.

On a $F = H_1 + \dots + H_k \subset V_1 + \dots + V_k$. Il existe donc, conformément à l'ax. de séparation, un ensemble ouvert K tel que $F \subset K \subset \bar{K} \subset V_1 + \dots + V_k$. Par suite $F_i - (V_1 + \dots + V_k) \subset G_i - \bar{K}$.

Or, posons $Q_i = V_i + G_i - \bar{K}$. Il vient:

$$1 = \sum_{i=1}^{k} F_i = \sum_{i=1}^{k} V_i + \sum_{i=1}^{k} \left[F_i - \sum_{j=1}^{k} V_j \right] \subset \sum_{i=1}^{k} V_i + \sum_{i=1}^{k} (G_i - \bar{K}) = \sum_{i=1}^{k} Q_i.$$

En outre, comme $F \cdot \overline{1 - K} = F - K = 0$, on a $F \cdot \overline{G_i - \bar{K}} = 0$, d'où $F \cdot \bar{Q}_{i_1} \cdot \dots \cdot \bar{Q}_{i_{n+2}} = F \cdot \bar{V}_{i_1} \cdot \dots \cdot \bar{V}_{i_{n+2}} = 0$.

Corollaire 2 [1]). *Etant donné un espace n-dimensionnel totalement borné, à chaque $\varepsilon > 0$ correspond une transformation continue $y = f(x)$ de cet espace en un sous-ensemble d'un polytope à n dimensions* [2]) *et telle que l'on ait $\delta[f^{-1}(y)] < \varepsilon$, quel que soit y.*

En effet, l'espace étant totalement borné, on peut supposer que les ensembles $G_1, \dots, G_k$ du th. 4 soient de diamètre $< \varepsilon$. Or, le „nerf" N du système $H_1, \dots, H_k$ étant (d'après (i)) composé de simplexes de dimension $\leqslant n$ (§ 15, XI), il existe une transformation continue $y = f(x)$ de l'espace en sous-ensemble de la somme des simplexes de N telle que $f^{-1}(p_{i_0} \dots p_{i_m}) \subset H_{i_0} \cdot \dots \cdot H_{i_m}$, quel que soit le simplexe $p_{i_0} \dots p_{i_m}$ dont N est formé (voir § 15, XI et XII); y étant une valeur donnée de la fonction f, posons $y \in p_{i_0} \dots p_{i_m}$. Il vient $\delta[f^{-1}(y)] \leqslant \delta[f^{-1}(p_{i_0} \dots p_{i_m})] \leqslant \delta(H_{i_0}) \leqslant \delta(G_{i_0}) < \varepsilon$.

IV. Prolongement des ensembles *n*-dimensionnels.

Théorème 5 (généralisation du th. V) [3]). *Chaque ensemble n-dimensionnel est contenu dans un $\boldsymbol{G}_\delta$ n-dimensionnel.*

En effet, E étant un ensemble n-dimensionnel, on a $E = Q_1 + \dots + Q_{n+1}$ où les ensembles Q_i sont 0-dimensionnels (th. 2). D'après le th. V (p. 124), l'ensemble Q_i est contenu dans un $\boldsymbol{G}_\delta$ 0-dimensionnel: $Q_i \subset Q_i^*$. On a donc $E \subset Q_1^* + \dots + Q_{n+1}^*$ et cette dernière somme est un $\boldsymbol{G}_\delta$ de dimension n (d'après le même th. 2).

---

[1]) P. Alexandroff, C. R. Paris, t. 183 (1926), p. 640, Math. Ann. 98 (1928), p. 635 et Ann. of Math. 30 (1928), p. 6. Voir aussi ma note de Fund. Math. 20 (1933), p. 193. Les termes „sous-ensemble d'un polytope" peuvent être remplacés par „polytope" (voir § 15, XII).

[2]) La „dimension" est entendue ici dans son sens classique.

[3]) Théorème de M. Tumarkin, l. c. p. 653.

V. Noyau dimensionnel.

Théorème 6 [1]). *Dans un espace n-dimensionnel l'ensemble des points où l'espace est précisément de la dimension n, c. à d. l'ensemble $1 - 1_{(n-1)}$ (dit „noyau dimensionnel") est de dimension $\geqslant n - 1$.*

D'après le cor. 4 du N° I, il existe un ensemble S qui est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ tel que $\dim S \leqslant n - 2$ et $\dim(1_{(n-1)} - S) \leqslant 0$. L'ensemble $1 - 1_{(n-1)}$ étant selon § 20, III, 2 un $\boldsymbol{F}_\sigma$, le cor. 1 du N° I et l'hypothèse $\dim(1 - 1_{(n-1)}) \leqslant n - 2$ entraînent $\dim(1 - 1_{(n-1)} + S) \leqslant n - 2$. Mais alors l'identité $1 = [1 - 1_{(n-1)} + S] + [1_{(n-1)} - S]$ donne $\dim 1 \leqslant n - 1$, car en ajoutant un ensemble 0-dimensionnel, on augmente la dimension d'une unité au plus (cor. du th. 2, p. 129).

On démontre de plus que chaque ensemble (non vide) qui est ouvert dans le noyau est d'une dimension $\geqslant n - 1$ [2]). La fermeture du noyau est en chaque point du noyau de dimension n [3]).

VI. Espaces faiblement *n*-dimensionnels. Un espace n-dimensionnel dont le noyau n'est pas n-dimensionnel (il est alors selon le th. 6 de dimension $n - 1$) est dit *faiblement n-dimensionnel*.

Comme exemple d'un ensemble faiblement 1-dimensionnel considérons l'ensemble des points du plan $(x, f(x))$ où x appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor:

$$x = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_2}} + \dots, \qquad n_1 < n_2 < \dots$$

et

$$f(x) = \frac{(-1)^{n_1}}{2} + \frac{(-1)^{n_2}}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{n_k}}{2^k} + \dots, \qquad f(0) = 0.$$

Le noyau de cet ensemble se compose de points dont l'abscisse est une extrémité droite d'un intervalle contigu [4]). Comme ensemble dénombrable, le noyau est donc 0-dimensionnel.

On prouve [5]) qu'il existe des ensembles faiblement n-dimensionnels, quel que soit n.

---

[1]) Théorème de M. Menger, *Das Hauptproblem über die dimensionelle Struktur der Räume*, Proc. Akad. Amsterdam 30, 1926, p. 141.

[2]) Ibid.

[3]) W. Hurewicz, l. c. p. 762 et L. Tumarkin, l. c. p. 652. Cf. K. Menger, Monatsh. 34, p. 144 et P. Urysohn, l. c. p. 270.

[4]) Voir ma note *Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers*, Mathematica 6 (1932), p. 120. Le premier exemple d'un ensemble qui est de dimension 0 en chaque point, excepté une infinité dénombrable, a été donné par M. Sierpiński, Fund. Math. 2 (1921), pp. 81—95.

[5]) Théorème de M. Mazurkiewicz, *Sur les ensembles de dimension faible*, Fund. Math. 13 (1929), p. 212.

VII. Familles dimensionnantes. La propriété de l'espace d'être de dimension $\leqslant n$ dans un point p est un cas particulier de la propriété suivante: F étant une famille d'ensembles, convenons de dire qu'elle *dimensionne* l'espace dans un point p, si p est situé dans des entourages aussi petits que l'on veut dont la frontière appartient à F [1]).

Dans le cas particulier, où F désigne la famille des ensembles de dimension $\leqslant n-1$, les points où l'espace est dimensionné par F coïncident avec ceux où l'espace est de dimension $\leqslant n$.

Imposons à la famille F les deux propriétés suivantes (qui appartiennent à la famille des ensembles de dimension $\leqslant n-1$): 1⁰ *l'hérédité*, c. à d. que la formule $X \subset Y \varepsilon F$ entraîne $X \varepsilon F$; 2⁰ *la F_σ-additivité*, c. à d. que les conditions: $X_n \varepsilon F$ et X_n fermé dans $S = X_1 + X_2 + \dots$ entraînent $S \varepsilon F$ [2]).

Comme l'a montré M. Hurewicz (dans son ouvrage précité), une grande partie de la théorie de la dimension peut être réduite à l'étude des ensembles 0-dimensionnels et des familles héréditaires F_σ-additives. Ce mode de procéder (qui est plus abstrait que celui du texte) a l'avantage d'être applicable aussi à des problèmes qui n'entrent pas dans le domaine de la théorie de la dimension.

Citons sans démonstration (qui est d'ailleurs tout-à-fait analogue à celle des théorèmes correspondants du § 22) quelques théorèmes fondamentaux sur les familles F héréditaires et F_σ-additives:

1) Pour que l'espace soit dimensionné (en chaque point) par F, il faut et il suffit qu'il se compose d'un ensemble appartenant à F et d'un ensemble de dimension $\leqslant 0$.

2) Pour que l'espace soit dimensionné par F, il faut et il suffit que chaque couple d'ensembles fermés et disjoints se laisse séparer par un ensemble fermé appartenant à F.

---

[1]) M. Menger se place à un point de vue plus général encore: un point est dit un „E-point“, s'il appartient à des entourages aussi petits que l'on veut et qui jouissent de la propriété E. Voir Math. Ann, 95 (1925), p. 281. Le terme suggestif „dimensionner l'espace“, que je dois à M. Knaster, remplace ici la dénomination „Unstetigkeitspunkt“ de M. Hurewicz, employée par cet auteur dans l'ouvrage *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. 96 (1927).

Une propriété analogue (mais non équivalente) à celle d'être un point où l'espace se trouve dimensionné a été étudiée par M. G. T. Whyburn: il s'agit des points p de la forme $p = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots$, où G_n est un entourage de p et $\mathrm{Fr}(G_n) \varepsilon F$. Voir Fund. Math. 16 (1930), p. 169.

[2]) Une famille héréditaire et F_σ-additive est nommée par M. Hurewicz „Normalbereich“.

Les familles qui satisfont aux conditions 1⁰ et 2⁰ et qui, en outre, contiennent tous les ensembles homéomorphes à leurs éléments, ont été étudiées par M. K. Kunugui dans ses recherches sur les relations entre les notions de dimension et de rang topologique („dimension au sens de M. Fréchet“). Voir sa Thèse, *Sur la Théorie du nombre de dimensions*, Paris 1930, p. 41.

3) F et F_1 étant deux familles héréditaires et F_σ-additives, la famille des sommes $X+Y$ où $X \varepsilon F$ et $Y \varepsilon F_1$ est héréditaire et F_σ-additive.

4) La famille des ensembles dimensionnés par F est héréditaire et F_σ-additive.

5) Si l'espace se laisse décomposer en une série dénombrable d'ensembles fermés dont tous, sauf un peut-être, sont dimensionnés par F, tandis que l'ensemble exceptionnel est dimensionné par F au point p, l'espace entier se trouve aussi dimensionné par F au point p.

6) L'ensemble des points où l'espace n'est pas dimensionné par F (le „noyau“ de l'espace) est un F_σ. S'il n'est pas vide, il n'appartient pas à F.

D. Produits cartésiens. Suites d'ensembles (§§ 23—25).

Les espaces considérés dans les §§ 23—25 sont supposés métriques, mais pas nécessairement séparables. L'hypothèse de la séparabilité sera faite explicitement partout où il en est question.

§ 23. Produits cartésiens.

I. Règles de calcul. Le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, que nous allons étudier de plus près dans ce §, a été défini comme l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \varepsilon \mathcal{X}$ et $y \varepsilon \mathcal{Y}$, la convergence de la suite $\mathfrak{z}_n = (x_n, y_n)$ vers le couple (x, y) étant équivalente à la réunion des conditions $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$ (§ 14, IV) [1]). On a vu aussi (§ 15, VI) que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques, la distance dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ peut être définie par la formule

$$\text{(i)} \qquad |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2}.$$

Nous allons établir à présent les règles de calcul suivantes:

$$(1) \qquad \overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

$$(2) \qquad \mathrm{Int}\,(A \times B) = \mathrm{Int}\,(A) \times \mathrm{Int}\,(B)$$

$$(3) \qquad \mathrm{Fr}\,(A \times B) = \mathrm{Fr}\,(A) \times \bar{B} + \bar{A} \times \mathrm{Fr}\,(B)\ ^{2)}$$

---

[1]) On peut aussi considérer la notion de produit cartésien dans un espace *satisfaisant aux axiomes* I—III: on convient à ce but que, $\mathfrak{Z}$ étant un ensemble situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, on a $(x, y) \varepsilon \bar{\mathfrak{Z}}$ lorsque l'inégalité $(A \times B) \cdot \mathfrak{Z} \neq 0$ se présente pour chaque couple d'ensembles ouverts A et B contenant x et y respectivement. Plusieurs théorèmes de ce § sont valables pour le produit cartésien ainsi conçu. Cf. *Enzyklopädie* III, 1, 10, p. 176.

[2]) Cf. K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 246.

$$(4) \qquad (A \times B)' = A' \times \bar{B} + \bar{A} \times B'$$

$$(5) \qquad \delta(A \times B) = \sqrt{[\delta(A)]^2 + [\delta(B)]^2}.$$

ad (1) (*fermeture* du produit). La condition $(x, y) \varepsilon \overline{A \times B}$ équivaut à l'existence de deux suites $x_n \varepsilon A$ et $y_n \varepsilon B$ telles que $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$. Cela revient à dire que $x \varepsilon \bar{A}$ et $y \varepsilon \bar{B}$.

ad (2) (*intérieur* du produit). Par définition de l'intérieur (p. 24) on a $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} - \overline{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - A \times B}$, de sorte qu'en appliquant l'identité (§ 2, II, 5): $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - (A \times B) = (\mathcal{X} - A) \times \mathcal{Y} + \mathcal{X} \times (\mathcal{Y} - B)$, il vient $\mathrm{Int}(A \times B) = [\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - \overline{(\mathcal{X} - A) \times \mathcal{Y}}] \cdot [\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - \overline{\mathcal{X} \times (\mathcal{Y} - B)}] = [\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - \overline{\mathcal{X} - A} \times \overline{\mathcal{Y}}] \cdot [\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - \overline{\mathcal{X}} \times \overline{\mathcal{Y} - B}] = [(\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - A}) \times \mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{X} \times (\mathcal{Y} - \overline{\mathcal{Y} - B})] = [\mathrm{Int}(A) \times \mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{X} \times \mathrm{Int}(B)] = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$ en vertu de § 2, II, 6.

ad (3) (*frontière* du produit). On a d'une façon analogue: $\mathrm{Fr}(A \times B) = \overline{A \times B} \cdot \overline{\mathcal{X} \times \mathcal{Y} - A \times B} = (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot [\overline{\mathcal{X} - A} \times \overline{\mathcal{Y}} + \overline{\mathcal{X}} \times \overline{\mathcal{Y} - B}] = \mathrm{Fr}(A) \times \bar{B} + \bar{A} \times \mathrm{Fr}(B)$.

ad (4) (*dérivé* du produit). On a les équivalences suivantes: $(a, b) \varepsilon (A \times B)' \equiv (a, b) \varepsilon \overline{A \times B - (a, b)} \equiv (a, b) \varepsilon \overline{(A - a) \times B + A \times (B - b)} \equiv (a, b) \varepsilon [\overline{A - a} \times \bar{B} + \bar{A} \times \overline{B - b}] \equiv \{\text{soit } (a \varepsilon \overline{A - a} \text{ et } b \varepsilon \bar{B}), \text{ soit } (a \varepsilon \bar{A} \text{ et } b \varepsilon \overline{B - b})\} \equiv \{\text{soit } (a, b) \varepsilon A' \times \bar{B}, \text{ soit } (a, b) \varepsilon \bar{A} \times B'\}$.

ad (5) (*diamètre* du produit). On a en vertu de la formule (i): $[\delta(A \times B)]^2 = \left[\max \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2}\right]^2 = \max |x - x_1|^2 + \max |y - y_1|^2 = [\delta(A)]^2 + [\delta(B)]^2$, où x et x_1 varient dans A et y et y_1 varient dans B.

II. Invariants de la multiplication cartésienne.

1. *Pour que le produit $A \times B$ (de deux ensembles non vides), soit respectivement fermé, ouvert, dense, il faut et il suffit que les deux ensembles A et B le soient également. Pour qu'un point (a, b) soit un point isolé de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, il faut et il suffit que a soit un point isolé de $\mathcal{X}$ et b de $\mathcal{Y}$.*

Car on a selon (1) et (2) les équivalences suivantes:

$$\{\overline{A \times B} = A \times B\} \equiv \{\bar{A} \times \bar{B} = A \times B\} \equiv \{\bar{A} = A \text{ et } \bar{B} = B\} \text{ (cf. § 2, II, 4a)}$$

$$\{\mathrm{Int}(A \times B) = A \times B\} \equiv \{\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B) = A \times B\} \equiv \{\mathrm{Int}(A) = A \text{ et } \mathrm{Int}(B) = B\}$$

$$\{\overline{A \times B} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \equiv \{\bar{A} \times \bar{B} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\} \equiv \{\bar{A} = \mathcal{X} \text{ et } \bar{B} = \mathcal{Y}\}.$$

La condition que le point (a, b) soit un point isolé de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ signifie que l'ensemble composé de ce point est ouvert. Cela équivaut à dire (comme nous venons de montrer) que les points a et b constituent deux ensembles ouverts, c. à d. que a est isolé dans $\mathcal{X}$ et b dans $\mathcal{Y}$.

2. *Pour que le produit $A \times B$ soit respectivement un ensemble frontière, non-dense, dense en soi, il faut et il suffit qu'un de deux ensembles A ou B le soit également.*

Cela résulte des équivalences suivantes:

$$\{\mathrm{Int}(A \times B) = 0\} \equiv \{\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B) = 0\} \equiv \{\mathrm{Int}(A) = 0 \text{ ou } \mathrm{Int}(B) = 0\}$$

$$\{\mathrm{Int}(\overline{A \times B}) = 0\} \equiv \{\mathrm{Int}(\bar{A} \times \bar{B}) = 0\} \equiv \{\text{soit } \mathrm{Int}(\bar{A}) = 0, \text{ soit } \mathrm{Int}(\bar{B}) = 0\}.$$

Enfin, la dernière partie de 2 résulte de 1, car, pour que le produit $A \times B$ ne contienne aucun point isolé, il faut et il suffit que soit A, soit B n'en contienne aucun.

Il résulte des théorèmes précédents que les propriétés suivantes sont des *invariants* de la multiplication cartésienne: d'être fermé, ouvert, dense, frontière, non-dense, dense en soi. On conclut facilement (du § 2, II, 1a et 2a) qu'il en est de même des propriétés d'être un $\boldsymbol{F_\sigma}$ et d'être un $\boldsymbol{G_\delta}$. Il en est encore de même— comme nous allons voir—des notions d'ensemble clairsemé, d'ensemble de I-re catégorie, de la propriété de Baire.

III. Ensemble $\mathcal{Y}^x$. Désignons, pour abréger, par $\mathcal{Y}^x$ l'ensemble $(x) \times \mathcal{Y}$, c. à d. l'ensemble de tous les points du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ à l'„abscisse" x. Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les axes rectangulaires du plan, $\mathcal{Y}^x$ est donc la droite d'abscisse x, parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$.

L'ensemble $\mathcal{Y}^x$ est évidemment homéomorphe à $\mathcal{Y}$, la projection (voir § 2, III) de $\mathcal{Y}^x$ sur $\mathcal{Y}$ étant une homéomorphie (même plus: une isométrie). Par conséquent, *si un ensemble situé dans $\mathcal{Y}^x$ jouit d'une propriété topologique relativement à $\mathcal{Y}^x$, sa projection sur l'axe $\mathcal{Y}$ jouit de la même propriété relativement à $\mathcal{Y}$.*

IV. Ensembles clairsemés [1]. *Soient Z un ensemble dense en soi situé dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et A la projection de Z sur l'axe $\mathcal{X}$. Si a est un point isolé de A, l'ensemble $Z \cdot \mathcal{Y}^a$ est dense en soi.*

---

[1] Voir la note de M. Ulam et de moi *Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire*, Fund. Math. 19 (1932), p. 248.

Soit, en effet, (a, b) un point arbitraire de $Z \cdot \mathcal{Y}^a$. L'ensemble Z étant dense en soi, on a $(a, b) = \lim (a_n, b_n)$ et $(a, b) \neq (a_n, b_n) \in Z$. Il vient $a = \lim a_n$ et, a étant un point isolé de A, on a pour n suffisamment grand $a_n = a$, d'où $(a_n, b_n) \in Z \cdot \mathcal{Y}^a$. De plus $b_n \neq b$, car autrement on aurait $(a_n, b_n) = (a, b)$. Par conséquent (a, b) est un point d'accumulation de l'ensemble $Z \cdot \mathcal{Y}^a$, c. q. f. d.

Dans les mêmes hypothèses sur A et Z; si A n'est pas dense en soi, la projection de Z sur l'axe $\mathcal{Y}$ contient un ensemble dense en soi (non vide). Car elle contient un ensemble homéomorphe à $Z \cdot \mathcal{Y}^a$ où a est un point isolé de A.

Il en résulte que, *pour que le produit de deux espaces (non vides) soit clairsemé, il faut et il suffit que les deux espaces soient clairsemés.*

Car, si $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$ contient un sous-ensemble dense en soi (non vide), le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ en contient également un (N°II, 2). Inversement, si $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ contient un sous-ensemble dense en soi (non vide) Z, la projection de Z soit sur $\mathcal{X}$, soit sur $\mathcal{Y}$, contient un ensemble dense en soi (non vide).

V. Ensembles de I-re catégorie.

Théorème [1]. *Z étant un ensemble non-dense situé dans le produit des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (dont le deuxième est séparable* [2]*), il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ un ensemble P de I-re catégorie tel que pour chaque point x de $\mathcal{X} - P$ l'ensemble $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ est non-dense dans $\mathcal{Y}^x$.*

Soit $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace séparable $\mathcal{Y}$. Soit E_n l'ensemble des x tels que $x \times R_n \subset \overline{Z \cdot \mathcal{Y}^x}$. Il vient $E_n \times R_n \subset \overline{Z \cdot \mathcal{Y}^x}$.

L'ensemble E_n est non-dense. Car, dans le cas contraire, en désignant par G un ensemble ouvert contenu dans $\overline{E}_n$, on aurait $0 \neq G \times R_n \subset \overline{E}_n \times \overline{R}_n = \overline{E_n \times R_n} \subset \overline{Z \cdot \mathcal{Y}^x} \subset \overline{Z}$, contrairement à l'hypothèse que Z est non-dense. L'ensemble $P = E_1 + E_2 + \ldots$ est donc de I-re catégorie.

[1]) Ibidem, théor. 1. En tenant compte de l'analogie avec les axes rectangulaires du plan, ce théorème peut être énoncé comme suit: un ensemble superficiellement non-dense est linéairement non-dense sur „presque toute" droite parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$.

[2]) Cette hypothèse est essentielle. Voir ibid. p. 248, renvoi [2]).

Supposons par impossible que $x \in \mathcal{X} - P$ et que $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ ne soit pas non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. L'ensemble $\overline{Z \cdot \mathcal{Y}^x}$ contiendrait alors un ensemble ouvert dans $\mathcal{Y}^x$, donc un ensemble $x \times R_n$ (puisque les ensembles $x \times R_n$, $n = 1, 2, \ldots$, constituent une base de $\mathcal{Y}^x$). Or, l'inclusion $x \times R_n \subset \overline{Z \cdot \mathcal{Y}^x}$ implique par définition de E_n que $x \in E_n \subset P$, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 1. Z étant un ensemble de I-re catégorie situé dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), l'ensemble $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ est de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}^x$, abstraction faite d'un ensemble des x de I-re catégorie.

Soit, en effet, $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$ où les ensembles Z_n sont non-denses. Soit (en vertu du théorème précédent) P_n un ensemble de I-re catégorie tel que pour $x \in \mathcal{X} - P_n$ l'ensemble $Z_n \cdot \mathcal{Y}^x$ soit non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. Posons $P = P_1 + P_2 + \ldots$ Or, pour $x \in \mathcal{X} - P$, chacun des ensembles $Z_n \cdot \mathcal{Y}^x$ est non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. Leur somme $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ y est donc de I-re catégorie.

Corollaire 2. Pour que le produit $Z = A \times B$ soit de I-re catégorie dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), il faut et il suffit qu'un des ensembles A ou B soit de I-re catégorie.

En effet, si Z est de I-re catégorie tandis que A ne l'est pas, A contient en vertu du cor. 1 un point x tel que $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ est de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}^x$. Donc B est de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}$, comme projection de $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ sur l'axe $\mathcal{Y}$ (voir N° III).

Ainsi la condition est nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, posons $A = N_1 + N_2 + \ldots$ où N_n sont non-denses. Il vient $A \times B = (N_1 \times B) + (N_2 \times B) + \ldots$ Les ensembles $N_n \times B$ étant non-denses (N°II, 2), $A \times B$ est de I-re catégorie.

VI. Propriété de Baire [1].

Théorème. Z étant un ensemble jouissant de la propriété de Baire relativement au produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), l'ensemble $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $\mathcal{Y}^x$, abstraction faite d'un ensemble des x de I-re catégorie.

En effet, comme jouissant de la propriété de Baire, Z est de la forme $U + V$ où U est de I-re catégorie et V est un $\boldsymbol{G_\delta}$ (§ 11,

[1]) Ibidem, p. 250.

IV, 2). Soit, conformément au cor. 1, P un ensemble de I-re catégorie dans $\mathcal{X}$ et tel que pour $x \in \mathcal{X} - P$ l'ensemble $U \cdot \mathcal{Y}^x$ soit de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}^x$. Or, $V \cdot \mathcal{Y}^x$ étant évidemment un $\boldsymbol{G}_\delta$ relativement à $\mathcal{Y}^x$, l'identité $Z \cdot \mathcal{Y}^x = U \cdot \mathcal{Y}^x + V \cdot \mathcal{Y}^x$ prouve (§ 11, IV, 2) que $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $\mathcal{Y}^x$.

Corollaire. Pour que le produit de deux ensembles jouisse de la propriété de Baire relativement au produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), il faut qu'un des deux ensembles en jouisse et il suffit que les deux en jouissent.

En effet, si l'ensemble $Z = A \times B$ jouit de la propriété de Baire tandis que A n'en jouit pas, A n'est pas de I-re catégorie et il existe d'après le théorème précédent un point x dans A tel que $Z \cdot \mathcal{Y}^x$ jouit de la propriété de Baire dans $\mathcal{Y}^x$, donc (N° III) B en jouit relativement à $\mathcal{Y}$.

Pour prouver la deuxième partie du corollaire, supposons que A et B jouissent de la propriété de Baire, donc que $A = P + Q$ et $B = U + V$ où P et U sont de I-re catégorie et Q et V sont des $\boldsymbol{G}_\delta$. Il vient $A \times B = P \times U + P \times V + Q \times U + Q \times V$. Les trois premiers sommandes étant des ensembles de I-re catégorie (d'après le cor. 2 du N° V) et le quatrième, comme produit de deux $\boldsymbol{G}_\delta$, étant un $\boldsymbol{G}_\delta$ (N° II), $A \times B$ est la somme d'un ensemble de I-re catégorie et d'un $\boldsymbol{G}_\delta$ et jouit par conséquent (§ 11, IV, 2) de la propriété de Baire.

Remarque. L'analogie entre la propriété de Baire et la mesurabilité (dont il était déjà question au § 11, VII) concerne aussi les énoncés établis tout à l'heure. En effet, en remplaçant dans le théorème du N° VI et dans les corollaires des NN° V et VI la notion d'ensemble de I-re catégorie par celle d'ensemble de mesure nulle et la propriété de Baire par la mesurabilité, on parvient à des théorèmes connus de la théorie de la mesure [1].

VII. Multiplication par un axe. En tenant compte des résultats précédents, on vérifie facilement que, *si A est un ensemble respectivement fermé, ouvert, dense, frontière, non-dense, dense en soi, de I-re catégorie, à propriété de Baire* [2] *— l'ensemble $A \times \mathcal{Y}$ l'est également.* En d'autres termes: *étant donnée une fonction propositionnelle $\varphi(x)$, si l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ jouit d'une des propriétés précitées, l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x)$ en jouit également.*

[1] Cf. S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, cette Collection t. 2, p. 261.

[2] Le même problème concernant la propriété de Baire *au sens restreint* (p. 55) reste ouvert, même pour le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{Y} =$ l'ensemble des nombres réels.

En cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les axes du plan et A est un ensemble situé sur l'axe $\mathcal{X}$, l'ensemble $A \times \mathcal{Y}$ s'obtient de A, en traçant une droite parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ par chaque point de A.

VIII. Base de l'espace. *$R_1, R_2, \dots$ étant une base de l'espace $\mathcal{X}$ et $S_1, S_2, \dots$ en étant une de l'espace $\mathcal{Y}$, la suite des produits $R_m \times S_n$ ($m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$) constitue une base de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Soient, en effet, G un ensemble ouvert situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et $(a, b) \in G$. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que la sphère de centre (a, b) et de rayon ε est contenue dans G. Par définition de la base il existe un R_m tel que $a \in R_m$ et $\delta(R_m) < \varepsilon/_2$; de même il existe un S_n tel que $b \in S_n$ et $\delta(S_n) < \varepsilon/_2$. Selon N° I (5) on a donc $\delta(R_m \times S_n) < \varepsilon$, d'où $(a, b) \in (R_m \times S_n) \subset G$, c. q. f. d.

On voit ainsi que *chaque ensemble ouvert situé dans le produit de deux espaces métriques séparables est une somme dénombrable d'ensembles ouverts dont chacun est un produit de deux ensembles ouverts.*

En cas où les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne possèdent pas de base, on ne peut qu'affirmer (en raisonnant comme auparavant) qu'*un sous-ensemble ouvert du produit est une somme (dénombrable ou non) de produits d'ensembles ouverts.*

IX. Dimension du produit [1]. *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques séparables, on a* $\dim(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \leqslant \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}$.

En outre, si $\dim_a \mathcal{X} = 0 = \dim_b \mathcal{Y}$, *on a* $\dim_{(a,b)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = 0$.

Posons $\dim_a \mathcal{X} = m$ et $\dim_b \mathcal{Y} = n$. Il existe donc deux ensembles ouverts R et S tels que

$$a \in R, \quad \delta(R) < \varepsilon/_2, \quad \dim[\mathrm{Fr}(R)] \leqslant m - 1,$$

$$b \in S, \quad \delta(S) < \varepsilon/_2, \quad \dim[\mathrm{Fr}(S)] \leqslant n - 1.$$

D'après N° I (3) et (5) il vient:

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{Fr}(R \times S) = \mathrm{Fr}(R) \times \bar{S} + \bar{R} \times \mathrm{Fr}(S) \quad \text{et} \quad \delta(R \times S) < \varepsilon.$$

[1] K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 246.

En outre, en cas où $m=0=n$, on a $\dim[\mathrm{Fr}(R)]=-1=$ $=\dim[\mathrm{Fr}(S)]$, d'où $\mathrm{Fr}(R)=0=\mathrm{Fr}(S)$, donc $\mathrm{Fr}(R\times S)=0$. Ainsi, $R\times S$ étant un entourage du point (a,b) de diamètre arbitrairement petit et dont la frontière est vide, on a $\dim_{(a,b)}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=0$, ce qui prouve la deuxième partie du théorème.

La première partie en étant une conséquence dans le cas où $\dim\mathcal{X}=0=\dim\mathcal{Y}$, procédons par induction. Admettons que notre théorème soit vrai pour chaque couple d'ensembles X et Y tels que $\dim X+\dim Y<\dim\mathcal{X}+\dim\mathcal{Y}=k$. Comme $\dim[\mathrm{Fr}(R)]+\dim\bar{S}\leqslant$ $\leqslant(m-1)+n\leqslant k-1$, on a par hypothèse $\dim[\mathrm{Fr}(R)\times\bar{S}]\leqslant k-1$ et, d'une façon analogue, $\dim[\bar{R}\times\mathrm{Fr}(S)]\leqslant k-1$. Il en résulte (§ 22, I, cor. 1) que $\dim[\mathrm{Fr}(R)\times\bar{S}+\bar{R}\times\mathrm{Fr}(S)]\leqslant k-1$, d'où en vertu de (i) $\dim_{(a,b)}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant k$. Donc $\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant k$.

Remarques. 1) Dans le théorème précédent *l'inégalité* ne peut pas être remplacée par *l'égalité*. M. L. Pontrjagin[1]) a défini, en effet, deux ensembles 2-dimensionnels dont le produit cartésien est de dimension 3.

Dans le même ordre d'idées, on a le théorème de M. Hurewicz, d'après lequel le produit de n espaces compacts 1-dimensionnels est n-dimensionnel[2]).

2) La deuxième partie du théorème ne se laisse pas généraliser sur $n>0$[3]). Considérons, en effet, le produit de l'ensemble des nombres réels par un ensemble formé du nombre 0 et d'une suite d'intervalles disjoints convergeant vers 0 du côte gauche. La dimension de ce dernier ensemble s'annule au point 0, tandis que le produit est à l'origine des axes de dimension 2.

X. Projection. En faisant correspondre à chaque point (x,y) du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ son „ordonnée" y, on définit une fonction dite *projection parallèle à l'axe* $\mathcal{X}$ (cf. § 2, III). Cette fonction est *continue:* en effet, si la suite (x_n,y_n) converge vers (x,y), la suite y_n converge vers y.

En outre, *la projection d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert.* Soit, en effet, Z un ensemble ouvert dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. On a $Z=Z\cdot\sum\limits_x\mathcal{Y}^x=\sum\limits_x[Z\cdot\mathcal{Y}^x]$ (= somme des intersections avec les

---

1) *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension*, C. R. Paris, t. 190 (1930), p. 1105.

2) *Ueber den sogenannten Produktsatz der Dimensionstheorie*, Math. Ann. 102 (1929), p. 306.

3) Dans cet ordre d'idées, quelques énoncés ont été trouvés par M. Menger, *Bemerkungen über dimensionelle Feinstruktur und Produktsatz*, Prace Mat.-Fiz. 37 (1930), p. 78.

„verticales"). La projection d'une somme étant la somme des projections (cf. § 3, II, 1a), la projection de Z est la somme des projections des ensembles $Z\cdot\mathcal{Y}^x$. Or, $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ étant ouvert dans $\mathcal{Y}^x$, sa projection est ouverte dans $\mathcal{Y}$ (voir N° III). La projection de Z est donc ouverte, comme somme d'ensembles ouverts.

Ceci peut s'énoncer aussi de la façon suivante (cf. § 2, V, 3): *étant donnée une fonction propositionnelle* $\varphi(x,y)$ *telle que l'ensemble* $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ *est ouvert, l'ensemble* $\underset{y}{E}\,\sum\limits_x\varphi(x,y)$ *est également ouvert.*

XI. Image de l'équation $y=f(x)$. Soit $f(x)$ une fonction qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. Considérons l'ensemble I des points (x,y) du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ qui satisfont à l'équation $y=f(x)$. En symboles: $I=\underset{xy}{E}\,[y=f(x)]$.

1) *L'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable et dense en soi, l'hypothèse que l'ensemble $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-I$ est de I-re catégorie au point (x,y) implique que soit $\mathcal{X}$ est de I-re catégorie au point x, soit $\mathcal{Y}$ l'est au point y*[1]).

Conformément à l'hypothèse (et à la remarque finale du N° VIII), il existe deux ensembles G et H ouverts dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, tels que $x\in G$, $y\in H$ et que $(G\times H)-I$ est de I-re catégorie. Si l'on suppose que $\mathcal{X}$ n'est pas de I-re catégorie au point x, l'ensemble G n'est non plus de I-re catégorie; il existe donc, d'après le cor. 1 du N° V, un point a dans G tel que l'ensemble $\mathcal{Y}^a\cdot(G\times H)-I=(a\times H)-I$ est de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}^a$. Or, cet ensemble ne diffère de $(a\times H)$ que par un point au plus: notamment par le point $[a,f(a)]$; ce point étant par hypothèse un point d'accumulation de $\mathcal{Y}^a$, donc un ensemble non-dense dans $\mathcal{Y}^a$, l'ensemble $(a\times H)$ y est de I-re catégorie. Par conséquent (N° III), H est de I-re catégorie dans $\mathcal{Y}$. Cela prouve que $\mathcal{Y}$ est de I-re catégorie au point y.

En particulier, si l'on suppose que les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne sont de I-re catégorie en aucun point (par ex. que ce sont des espaces complets), le complémentaire de I n'est de I-re catégorie en aucun point. *Si, de plus, l'ensemble I jouit de la propriété de Baire* (ce qui a lieu, en général, dans les applications), *il est de I-re caté-*

---

1) Cf. ma note *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. 5 (1924), p. 84 et la note citée de de M. Ulam et de moi, Fund. Math. 19, p. 250.

gorie, comme complémentaire d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire et qui n'est de I-re catégorie en aucun point[1]) (cf. § 11, IV, cor. 2).

2) *Si la fonction f est continue, l'ensemble I est homéomorphe à $\mathcal{X}$.*

En faisant correspondre à x le point $[x, f(x)]$, on définit une fonction biunivoque et continue, puisque la condition $\lim x_n = x$ entraîne $\lim [x_n, f(x_n)] = [x, f(x)]$ et la transformation inverse est continue, car elle est une projection.

3) *Etant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble A de $\mathcal{X}$, si f est continue au point x et le point (x, y) appartient à $\bar{I}$, on a $y = f(x)$. D'une façon plus générale: $\delta(\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x) \leqslant \omega(x)$,* où $\omega(x)$ désigne l'oscillation de la fonction f au point x (donc, si $\omega(x) = 0$, il existe *au plus un* y tel que $(x, y) \in \bar{I}$).

Soient, en effet, (x, y) et (x, y^*) deux points appartenant à $\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x$. Il vient $(x, y) = \lim [x_n, f(x_n)]$ et $(x, y^*) = \lim [x_n^*, f(x_n^*)]$. Il existe par conséquent dans chaque entourage E de x un x_n et un x_n^*, d'où $f(x_n) \in f(E)$ et $f(x_n^*) \in f(E)$. On en conclut que $\delta[f(E)] \geqslant |f(x_n) - f(x_n^*)|$ et que $\omega(x) = \min \delta[f(E)] \geqslant |y - y^*|$, ce qui entraîne l'inégalité à démontrer.

4) *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est dense en soi et la fonction f est ponctuellement discontinue, l'ensemble I est non-dense.*

En effet, si I n'est pas non-dense, $\bar{I}$ contient un ensemble ouvert non vide $G \times H$, où G est ouvert dans $\mathcal{X}$ et H dans $\mathcal{Y}$. Si $x \in G$, l'ensemble $x \times H$, comme ouvert dans $\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x$, ne se réduit pas à un seul point. La fonction f est donc selon 3) discontinue en chaque point de G.

XII. Diagonale. Lorsque les ensembles X et Y sont des sous-ensembles d'un même espace, nous appelons *diagonale du produit* $X \times Y$ l'ensemble des points ayant l'abscisse égale à l'ordonnée: $\underset{xy}{E}(x = y)$.

On voit aussitôt que *la diagonale du produit cartésien $X \times Y$ est homéomorphe à la partie commune $X \cdot Y$ des ensembles X et Y.*

En outre, *la diagonale est un ensemble fermé dans $X \times Y$.*

Dans le cas particulier, où $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, la diagonale est homéomorphe à chacun des axes.

---

[1]) Sans supposer que I jouit de la propriété de Baire, I peut ne pas être de I-re catégorie; cf. Fund. Math. 5, p. 85.

§ 24. Produits cartésiens dénombrables.

I. Généralités. Rappelons[1]) que le produit

$$\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_i \times \ldots$$

est par définition l'ensemble des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \ldots]$ où $\mathfrak{z}^i \in \mathcal{X}_i$.

Le diamètre de chaque espace $\mathcal{X}_i$ étant supposé inférieur à 1 (ce qui ne restreint point la généralité, puisque chaque espace est homéomorphe à un espace borné, cf. § 15, V), la distance dans le produit est définie par la formule $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|$.

On en conclut que la suite $\{\mathfrak{z}_n\}$, où $\mathfrak{z}_n = [\mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots, \mathfrak{z}_n^i, \ldots]$, converge vers $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \ldots]$, lorsqu'on a la convergence „par colonnes", c. à d. que la i-ème coordonnée du point variable tend vers la i-ème coordonnée du point limite. En symboles:

$$\{\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n\} \equiv \prod_i \{\mathfrak{z}^i = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i\}.$$

Il en résulte aussitôt que, pour tout i fixe, le terme $\mathfrak{z}^i$, considéré comme fonction de $\mathfrak{z}$, en est une fonction continue.

Une autre conséquence immédiate est l'homéomorphie des produits $\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} \mathcal{X}_i$ et $(\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n) \times \underset{i=n+1}{\overset{\infty}{P}} \mathcal{X}_i$ (loi „associative").

II. Règles de calcul.

(i) $\overline{\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} A_i} = \underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} (\bar{A}_i)$ (ii) $\delta\left(\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(A_i)}{2^i}$

(iii) *$\mathfrak{z}$ est un point intérieur du produit $\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} A_i$, lorsque pour chaque i $\mathfrak{z}^i$ est un point intérieur de A_i et lorsqu'on a, en outre, $A_k = \mathcal{X}_k$ pour k suffisamment grand.*

ad (i). On a les équivalences suivantes $\left\{\mathfrak{z} \in \underset{i}{P}(\bar{A}_i)\right\} \equiv \left\{\prod_i \mathfrak{z}^i \in \bar{A}_i\right\} \equiv$ $\{$il existe une suite $\mathfrak{z}_n$ telle que $\prod_i [\mathfrak{z}^i = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i]$ et $\prod_{ni} [\mathfrak{z}_n^i \in A_i]$, c. à d. telle que $\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n$ et $\prod_n \left[\mathfrak{z}_n \in \underset{i}{P} A_i\right]\} \equiv \left\{\mathfrak{z} \in \overline{\underset{i}{P}(A_i)}\right\}$.

---

[1]) Voir § 2, § 14, IV et § 15, VI.

ad (ii). On a, pour $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ extraits de $\underset{i}{P}(A_i)$:

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\,\delta(A_i),$$

d'où

$$\delta\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{P}} A_i\right) = \max|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\,\delta(A_i).$$

D'autre part, il existe pour chaque $\epsilon > 0$ deux suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ telles que $|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i| > \delta(A_i) - \epsilon$, d'où

$$\delta\left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{P}} A_i\right) \geqslant |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}| \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}[\delta(A_i) - \epsilon] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\,\delta(A_i) - \epsilon.$$

ad (iii). Si $\mathfrak{z} \,\varepsilon\, \mathrm{Int}\left(\underset{i}{P} A_i\right)$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que, pour $|\mathfrak{y}-\mathfrak{z}| < \epsilon$, on a $\mathfrak{y} \,\varepsilon\, \underset{i}{P} A_i$. Cette inégalité est satisfaite, s'il existe un n tel que $|\mathfrak{y}^i - \mathfrak{z}^i| < \epsilon/_2$ pour $i \leqslant n$ et $2^{-n} < \epsilon/_2$ (pour $i > n$ on ne fait aucune hypothèse sur $\mathfrak{y}^i$). Cela veut dire que chaque sphère de centre $\mathfrak{z}^i$ et de rayon $< \epsilon/_2$ est contenue dans A_i si $i = 1, \dots, n$, et que $A_k = \mathcal{X}_k$ si $k > n$.

Inversement, si l'on suppose que l'on a $A_k = \mathcal{X}_k$ pour $k > n$ et $\mathfrak{z}^i \,\varepsilon\, \mathrm{Int}(A_i)$ pour $i \leqslant n$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que la condition $|\mathfrak{y}^i - \mathfrak{z}^i| < \epsilon$ entraîne $\mathfrak{y}^i \,\varepsilon\, A_i$ pour $i \leqslant n$. Chaque sphère de centre $\mathfrak{z}$ et de rayon $< \epsilon/_{2^n}$ est contenue alors dans $\underset{i}{P} A_i$, d'où $\mathfrak{z} \,\varepsilon\, \mathrm{Int}\left(\underset{i}{P} A_i\right)$.

III. Invariants. 1 [1]. *Pour qu'un produit $\underset{i}{P} A_i$ d'ensembles non vides soit respectivement fermé ou dense, il faut et il suffit que tous les facteurs A_i le soient également. Pour que ce produit soit ouvert, il faut et il suffit que tous les facteurs le soient et que l'on ait $A_i = \mathcal{X}_i$ pour i suffisamment grand.*

On a, en effet, d'après (i) et § 2, II, 4b:

$$\left\{\overline{\underset{i}{P} A_i} = \underset{i}{P} A_i\right\} \equiv \left\{\underset{i}{P} \bar{A}_i = \underset{i}{P} A_i\right\} \equiv \prod_i \{\bar{A}_i = A_i\}$$

$$\left\{\overline{\underset{i}{P} A_i} = \underset{i}{P} \mathcal{X}_i\right\} \equiv \left\{\underset{i}{P} \bar{A}_i = \underset{i}{P} \mathcal{X}_i\right\} \equiv \prod_i \{\bar{A}_i = \mathcal{X}_i\}$$

et la deuxième partie de l'énoncé 1 résulte de (iii).

[1]) Cf. la Thèse citée de M. Kunugui (ch. II, „composition" des espaces).

2. *Le produit $\underset{i}{P} \mathcal{X}_i$ est toujours dense en soi et d'une puissance $\geqslant \mathfrak{c}$* (sauf le cas où pour i suffisamment grand $\mathcal{X}_i$ se réduit à un seul point). Car chaque point $\mathfrak{z}$ est limite de la suite $\{\mathfrak{z}_n\}$ où les coordonnées de $\mathfrak{z}_n$ ne diffèrent de celles de $\mathfrak{z}$ que par la n-ième (si $\mathcal{X}_n$ se réduit au point $\mathfrak{z}^n$, on pose $\mathfrak{z}_n^n = \mathfrak{z}^n$).

3. *Pour que le produit $\underset{i}{P} A_i$ soit un ensemble frontière, il faut et il suffit que ou bien un des facteurs soit un ensemble frontière, ou bien qu'on ait $A_i \neq \mathcal{X}_i$ pour une infinité de valeurs de i.*

C'est une conséquence directe de (iii).

La condition que $\underset{i}{P} A_i$ soit *non-dense* équivaut à celle que l'ensemble $\overline{\underset{i}{P} A_i} = \underset{i}{P} \bar{A}_i$ soit un ensemble frontière, donc que ou bien un des ensembles A_i soit non-dense, ou bien qu'une infinité des A_i ne soient pas denses dans $\mathcal{X}_i$.

Si un des ensembles A_i est de *I-re catégorie*, le produit $\underset{i}{P} A_i$ l'est également. Si tous les ensembles A_i jouissent de la *propriété de Baire*, leur produit en jouit également.

Car, en supposant que $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$, où N_n est non-dense, on a $\underset{i}{P} A_i = \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \times A_2 \times A_3 \times \dots)$, où chaque sommande est non-dense.

Pour prouver la deuxième proposition, on pose (cf. § 2, II, 6a): $\underset{i}{P} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} (\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_{i-1} \times A_i \times \mathcal{X}_{i+1} \times \dots)$ et on tient compte de l'invariance de la propriété de Baire par rapport à l'opération $\prod_{i=1}^{\infty}$ et à la multiplication cartésienne par un axe (voir § 11, III, 3, § 23, VII et la remarque finale du N° I).

Il est à remarquer que le produit dénombrable peut être non-dense (donc de I-re catégorie et à propriété de Baire) sans qu'aucun des facteurs jouisse de la propriété de Baire (ce qui serait impossible dans le cas du produit fini; voir § 23, V et VI): par exemple, $\mathcal{X}_i =$ l'intervalle 01 et $A_i =$ un ensemble dépourvu de la propriété de Baire, situé dans l'intervalle $0, {}^1/_2$.

IV. Base de l'espace. En établissant la proposition II (iii), nous avons montré que chaque point intérieur $\mathfrak{z}$ d'un ensemble $\mathfrak{Z}$ situé dans $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ appartient à un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{Z}$

de la forme $G_1 \times \ldots \times G_n \times \mathfrak{X}_{n+1} \times \mathfrak{X}_{n+2} \times \ldots$ où G_i est ouvert (notamment, si la sphère de centre $\mathfrak{z}$ et de rayon ε est contenue dans $\mathfrak{Z}$ et si l'on assujettit n à la condition $2^{-n} < \varepsilon/2$, on peut prendre comme G_i une sphère ouverte de centre $\mathfrak{z}^i$ et de rayon $\varepsilon/2$).

Donc, si $\mathfrak{X}_i$ a pour base la suite $R_1^i, R_2^i \ldots$, les ensembles de la forme $R_{k_1}^1 \times R_{k_2}^2 \times \ldots \times R_{k_n}^n \times \mathfrak{X}_{n+1} \times \mathfrak{X}_{n+2} \times \ldots$ (avec n variable) constituent une base dénombrable de l'espace $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots$

Une autre conséquence en est que la projection d'un ensemble ouvert sur un axe est un ensemble ouvert qui, sauf pour un nombre fini d'axes, est identique à cet axe.

V. Espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. *L'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ est homéomorphe à $\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$, à $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ et à $(\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$.*

L'homéomorphie de $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ et de $\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ étant évidente (voir N^0 I), considérons d'abord le cas où le point $\mathfrak{w} = (\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ varie dans l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$. On a les équivalences suivantes: $\{\lim_{n=\infty} \mathfrak{w}_n = \mathfrak{w}\} \equiv$

$$\equiv \{\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z} \text{ et } \lim_{n=\infty} \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}\} \equiv \Big\{\prod_i (\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i) \text{ et } \prod_i (\lim_{n=\infty} \mathfrak{y}_n^i = \mathfrak{y}^i)\Big\}.$$

Faisons correspondre à l'élément $\mathfrak{w}$ de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ l'élément $f(\mathfrak{w}) = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{y}^1, \mathfrak{z}^2, \mathfrak{y}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \mathfrak{y}^i, \ldots]$ de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$.

Chaque point de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ est évidemment une des valeurs de cette fonction. En outre, d'après les équivalences qui précèdent, l'égalité $\lim_{n=\infty} \mathfrak{w}_n = \mathfrak{w}$ équivaut à $\lim_{n=\infty} f(\mathfrak{w}_n) = f(\mathfrak{w})$, ce qui veut dire que les espaces $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ et $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ sont homéomorphes.

Nous allons établir à présent l'homéomorphie des espaces $(\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ et $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. Soit π un point variable de l'espace $(\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$. Donc $\pi = [\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^i, \ldots]$ où $\pi^i \varepsilon \mathfrak{X}^{\aleph_0}$. Par conséquent $\pi^i = [\pi^{i,1}, \pi^{i,2}, \ldots, \pi^{i,j}, \ldots]$ où $\pi^{i,j} \varepsilon \mathfrak{X}$.

Rangeons la suite double $\{i, j\}$ en une suite simple, par ex. suivant la grandeur de $i+j$: $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), \ldots$ La fonction $f(\pi) = [\pi^{1,1}, \pi^{1,2}, \pi^{2,1}, \pi^{1,3}, \ldots]$ établit l'homéomorphie demandée, car $\{\lim_{n=\infty} \pi_n = \pi\} \equiv \prod_i \{\lim_{n=\infty} \pi_n^i = \pi^i\} \equiv \prod_{ij} \{\lim_{n=\infty} \pi_n^{i,j} = \pi^{i,j}\} \equiv \{\lim_{n=\infty} f(\pi_n) = f(\pi)\}$.

Remarques. Nous avons vu au § 14, V que chacun des trois espaces: l'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor, l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels et le cube fondamental $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert, sont de la forme $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. On n'altère donc pas leur type topologique, en les élevant à la puissance n ou $\aleph_0$.

Chaque espace 0-dimensionnel (séparable) étant contenu topologiquement dans l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (§ 21, IV) et l'ensemble $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ étant de dimension 0, *le produit dénombrable d'ensembles 0-dimensionnels est 0-dimensionnel.*

VI. Fonctions continues. Nous avons déjà vu (§ 14, IV) que pour qu'un point d'un produit dénombrable varie d'une façon continue, il faut et il suffit que ses coordonnées varient de la sorte. On en conclut que, *étant donnée une suite (finie ou infinie) de fonctions continues $f_i(x)$ qui transforment $\mathfrak{X}_i$ en $\mathfrak{Y}_i$, le produit $\underset{i}{P}\, \mathfrak{X}_i$ se trouve transformé d'une façon continue en $\underset{i}{P}\, \mathfrak{Y}_i$, si on fait correspondre au point $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ de $\underset{i}{P}\, \mathfrak{X}_i$ le point $f(\mathfrak{z}) = [f_1(\mathfrak{z}^1), f_2(\mathfrak{z}^2), \ldots]$ de $\underset{i}{P}\, \mathfrak{Y}_i$.* Car la condition $\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$ entraîne $\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i$, d'où $\lim_{n=\infty} f_i(\mathfrak{z}_n^i) = f_i(\mathfrak{z}^i)$, de sorte que la i-ème coordonnée du point $f(\mathfrak{z}_n)$ tend vers la i-ème coordonnée du point $f(\mathfrak{z})$.

Il en résulte en particulier que, *si l'espace $\mathfrak{Y}$ est une image continue de l'espace $\mathfrak{X}$, l'espace $\mathfrak{Y}^n$ est une image continue de $\mathfrak{X}^n$ et $\mathfrak{Y}^{\aleph_0}$ l'est de $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$.*

Rapproché du N^0 précédent, cet énoncé nous conduit au théorème fondamental suivant:

Théorème [1]. *Le cube n-dimensionnel $\mathcal{J}^n$, ainsi que le cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert, sont des images continues de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor.*

Considérons ce théorème d'abord pour $n=1$. Or, x étant un point de l'ensemble $\mathcal{C}$, on a $x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_m}{3^m} + \ldots$ ($c_m = 0$ ou 2).

En posant $f(x) = \frac{c_1}{2^2} + \frac{c_2}{2^3} + \ldots + \frac{c_m}{2^{m+1}} + \ldots$, on vérifie facilement que la fonction f est continue et que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{J}$.

Ceci étant, on conclut de l'énoncé précédent que les ensembles $\mathcal{J}^n$ et $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ sont des images continues respectivement des ensembles $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{\aleph_0}$, homéomorphes à $\mathcal{C}$ (d'après la remarque du N^0 V).

Corollaire 1. Chaque espace assujetti aux axiomes I — V (donc chaque espace métrique séparable) est une image continue d'un espace 0-dimensionnel (contenu dans l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor).

---

[1]) Cf. H. Lebesgue, Journ. de Math. (6) 1 (1905), p. 210.

Car d'après le théorème d'Urysohn (p. 104) chaque espace de ce genre est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$.

Corollaire 2[1] *(théorème de Peano généralisé). Les cubes $\mathcal{I}^n$ et $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ sont des images continues de l'intervalle $\mathcal{I}$.*

Soit, en effet, $\mathfrak{z} = f(x)$ une fonction continue qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{I}^n$ ou en $\mathcal{I}^{\aleph_0}$. La i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$ est donc une fonction continue de x: $\mathfrak{z}^i = f_i(x)$, dont les arguments appartiennent à $\mathcal{C}$ et les valeurs à $\mathcal{I}$. En la définissant linéairement dans les intervalles contigus à $\mathcal{C}$, la fonction $\mathfrak{z} = f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots]$ se trouve définie pour chaque $x \in \mathcal{I}$. Sa continuité résulte de celle de f_i.

VII. Diagonale. Etant donnée une suite d'ensembles $X_1, X_2, \ldots$ qui sont des sous-ensembles d'un même espace, *la diagonale du produit $X_1 \times X_2 \times \ldots$ est*, par définition, *l'ensemble des points ayant toutes les coordonnées identiques* (c. à d. l'ensemble des suites de la forme $x, x, \ldots, x, \ldots$).

On vérifie facilement que *la diagonale de l'ensemble $\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} X_i$ est fermée dans $\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} X_i$ et homéomorphe à $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.*

VIII. Convergence uniforme. Par définition, une suite de fonctions $\{f_n(t)\}$ est dite *uniformément convergente vers la fonction $f(t)$*, lorsqu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un n_ε tel que l'on ait $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$ pour $n > n_\varepsilon$, quel que soit t.

Supposons que les valeurs de la fonction $f_n(t)$ appartiennent à $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$, notamment que $f_n(t) = [f_n^1(t), f_n^2(t), \ldots]$ où $f_n^i(t) \in \mathcal{X}_i$.

Pour que la suite des fonctions $f_n(t)$ converge uniformément vers la fonction $f(t)$, il faut et il suffit que, quel que soit i, la suite $f_1^i(t), f_2^i(t), \ldots$ converge uniformément vers $f^i(t)$.

La condition est nécessaire, car l'inégalité $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$ entraîne $2^{-i}|f^i(t) - f_n^i(t)| \leqslant |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$.

Elle est aussi suffisante. Soit, pour un ε donné d'avance, m un indice tel que $2^{-m} < \varepsilon$. En vertu de la convergence uniforme des suites $\{f_n^1(t)\}, \ldots, \{f_n^m(t)\}$, il existe un indice n' tel que l'on ait pour tout $n > n'$: $|f^i(t) - f_n^i(t)| < \varepsilon$, quel que soit t et quel que soit $i \leqslant m$. Il vient donc

$$|f(t) - f_n(t)| = \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}|f^i(t) - f_n^i(t)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{-i}|f^i(t) - f_n^i(t)| < \varepsilon + 2^{-m} < 2\varepsilon,$$

ce qui exprime la convergence uniforme de la suite $\{f_n(t)\}$.

[1]) G. Peano, Math. Ann. 36 (1890), p. 157 et H. Lebesgue, l. cit.

IX. Un théorème sur les ensembles G_δ. Désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ l'espace de toutes les suites de nombres réels.

Théorème. Q étant un ensemble G_δ situé dans un espace métrique $\mathcal{X}$, il existe une fonction continue $y = f(x)$ définie sur cet ensemble, dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ et dont l'image $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ est fermée (dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\aleph_0}$).

Par hypothèse $Q = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$ (partie commune d'ensembles ouverts). Posons $F_i = \mathcal{X} - G_i$, $f_i(x) = \dfrac{1}{\rho(x, F_i)}$ pour $x \in G_i$, et faisons correspondre à chaque $x \in Q$ la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$, considérée comme le point $f(x)$ de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$.

La fonction $\rho(x, F_i)$ étant continue (§ 15, IV (5)) et positive pour $x \in G_i$, la fonction $f_i(x)$, et par conséquent (§ 14, IV) la fonction $f(x)$, est continue en chaque point de Q.

Afin de prouver que l'ensemble I est fermé, supposons par impossible que $\lim_{n=\infty} x_n = x$, que $\lim_{n=\infty} f(x_n) = y$ et que le point (x, y) n'appartienne pas à I. Il en résulte que x n'appartient pas à Q, car l'égalité $\lim_{n=\infty} x_n = x$ implique pour $x \in Q$ que $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x)$, d'où $y = f(x)$ et $(x, y) \in I$.

La formule $x \in \mathcal{X} - Q$ établie, il existe un indice i tel que $x \in F_i$, donc que $\rho(x, F_i) = 0$. La continuité de la fonction $\rho(x, F_i)$ entraîne $\lim_{n=\infty} \rho(x_n, F_i) = \rho(x, F_i) = 0$, de sorte que $\lim_{n=\infty} f_i(x_n) = \infty$, contrairement à l'hypothèse que $\lim_{n=\infty} f(x_n) = y$, qui implique que $\lim_{n=\infty} f_i(x_n)$ est un nombre fini, comme „coordonnée" de y.

Corollaire[1]). *Chaque ensemble G_δ situé dans un espace métrique $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un ensemble fermé situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\aleph_0}$.*

[1]) On trouvera une application importante de ce corollaire dans la théorie des espaces complets (§ 29).

Car Q est homéomorphe à I d'après § 23, XI, 2.

Remarque. Dans le cas particulier où l'ensemble Q *est une différence de deux ensembles fermés,* $Q = A - B$, on peut remplacer dans le théorème et dans le corollaire l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ par *l'espace* $\mathcal{E}$ *des nombres réels*[1]). On pose notamment dans ce cas $f(x) = \dfrac{1}{\rho(x, B)}$.

§ 25. Limites inférieure et supérieure.

I. Limite inférieure [2]). *Définition. Le point p appartient à la limite inférieure de la suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$,* en symboles: $p \in \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, A_n$, *lorsque chaque entourage de p admet des points communs avec tous les A_n à partir d'un n suffisamment grand.*

Bien entendu, le terme „entourage" peut être remplacé par „entourage ouvert", ainsi que par „sphère de centre p".

La formule $p \in \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, A_n$ (où $A_n \neq 0$) *équivaut aussi à l'existence d'une suite de points p_n telle que* $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ et $p_n \in A_n$, ou encore *à l'égalité* $\lim\limits_{n=\infty} \rho(p, A_n) = 0$.

En effet, si $p \in \mathrm{Li}\, A_n$ et si S_m désigne la sphère de centre p et de rayon $^1/_m$, il existe un indice k_m tel que l'on a $S_m \cdot A_n \neq 0$ pour $n \geqslant k_m$. De plus, on peut supposer que $k_m > k_{m-1}$. La suite $p_1, p_2, \dots$, où $p_n \in S_m \cdot A_n$ pour $k_m \leqslant n < k_{m+1}$, converge vers p, car $|p_n - p| < {^1/_m}$.

Exemples. Si A_n se réduit à un seul point p_n, on a $\mathrm{Li}\, A_n = \lim p_n$ quand cette dernière limite existe, et $\mathrm{Li}\, A_n = 0$ en cas contraire; car ici $\rho(p, A_n) = |p - p_n|$.

Une suite de rectangles ayant une base commune et dont les hauteurs diminuent indéfiniment a cette base pour limite inférieure.

---

[1]) Cf. la note de M. Sierpiński et de moi *Sur les différences de deux ensembles fermés*, Tôhoku Math. Journ. 20 (1921), p. 23.

[2]) Les notions de limite inférieure et supérieure sont dues à M. Painlevé (Cf. C. R. Paris 148 (1909), p. 1156 et les indications à ce sujet chez M. Zoretti, Journ. de Math. (5), 1 (1905), p. 8). M. Hausdorff les appelle „unterer (oberer) abgeschlossener Limes". Il ne faut pas les confondre avec les „ensembles limites restreint et complet" au sens de la Théorie générale des ensembles: $\sum\limits_n (A_n \cdot A_{n+1} \cdot A_{n+2} \cdot \dots)$ et $\prod\limits_n (A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots)$

II. Calcul. On a les règles suivantes:

1. $\overline{\mathrm{Li}\, A_n} = \mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Li}\, \overline{A_n}$. 2. $A_n \subset B_n$ *entraîne* $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, B_n$.

3. $\mathrm{Li}\, A_n + \mathrm{Li}\, B_n \subset \mathrm{Li}\,(A_n + B_n)$. 3a. $\sum\limits_t \mathrm{Li}\, A_n(t) \subset \mathrm{Li}\left(\sum\limits_t A_n(t)\right)$.

4. $\mathrm{Li}(A_n \cdot B_n) \subset (\mathrm{Li}\, A_n) \cdot (\mathrm{Li}\, B_n)$. 4a. $\mathrm{Li}\left(\prod\limits_t A_n(t)\right) \subset \prod\limits_t \mathrm{Li}\, A_n(t)$.

5. *Si* $k_1 < k_2 < \dots$, $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, A_{k_n}$. 6. *Si* $A_n = A$, $\mathrm{Li}\, A_n = \overline{A}$.

7. *On n'altère pas* $\mathrm{Li}\, A_n$, *en altérant un nombre fini des* A_n.

8. $$\prod_n A_n \subset \sum_n (A_n \cdot A_{n+1} \cdot A_{n+2} \cdot \dots) \subset \mathrm{Li}\, A_n.$$

En effet, si $q \in \overline{\mathrm{Li}\, A_n}$ et G est un entourage ouvert de q, il existe un point $p \in G \cdot \mathrm{Li}\, A_n$. Donc, à partir d'un certain n, on a $G \cdot A_n \neq 0$, d'où $q \in \mathrm{Li}\, A_n$. En outre, H étant ouvert, l'inégalité $H \cdot A_n \neq 0$ équivaut à $H \cdot \overline{A_n} \neq 0$; par suite $\mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Li}\, \overline{A_n}$, d'où la formule 1.

Les formules 2, 5—7 résultent directement de la définition, tandis que 3—4a sont des conséquences de 2 (cf. § 4, III). Enfin, on a $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathrm{Li}\, A_n$, d'où, selon 7, $\prod\limits_{n=m}^{\infty} A_n \subset \mathrm{Li}\, A_n$, ce qui entraîne 8.

III. Limite supérieure. *Définition. Le point p appartient à la limite supérieure de la suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$,* en symboles: $p \in \underset{n=\infty}{\mathrm{Ls}}\, A_n$, *lorsque chaque entourage de p admet des points communs avec une infinité des ensembles A_n.*

On montre par un raisonnement analogue à celui du N°I que cette condition équivaut à *l'existence d'une suite de points p_{k_n} telle que* $k_1 < k_2 < \dots$, $p = \lim p_{k_n}$ *et* $p_{k_n} \in A_{k_n}$, ou, ce qui revient au même, à *l'égalité* $\lim\inf \rho(p, A_n) = 0$.

Exemples. Soient $\{r_n\}$ la suite de tous les points rationnels et A_n l'ensemble composé du point r_n seul; $\mathrm{Ls}\, A_n$ est l'ensemble de tous les nombres réels. Dans l'exemple des rectangles considéré au N°I on a $\mathrm{Ls}\, A_n = \mathrm{Li}\, A_n$.

IV. Calcul. On a les règles suivantes:

1. $\overline{\mathrm{Ls}\, A_n} = \mathrm{Ls}\, A_n = \mathrm{Ls}\, \overline{A_n}$. 2. $A_n \subset B_n$ *entraîne* $\mathrm{Ls}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, B_n$.

3. $\mathrm{Ls}\,(A_n + B_n) = \mathrm{Ls}\, A_n + \mathrm{Ls}\, B_n$. 3a. $\sum\limits_t \mathrm{Ls}\, A_n(t) \subset \mathrm{Ls}\left(\sum\limits_t A_n(t)\right)$.

4. $\mathrm{Ls}\,(A_n \cdot B_n) \subset (\mathrm{Ls}\, A_n) \cdot (\mathrm{Ls}\, B_n)$. 4a. $\mathrm{Ls}\left(\prod\limits_t A_n(t)\right) \subset \prod\limits_t \mathrm{Ls}\, A_n(t)$.

5. *Si* $k_1 < k_2 < \dots$, $\mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Ls}\, A_n$. 6. *Si* $A_n = A$, $\mathrm{Ls}\, A_n = \overline{A}$.

7. *On n'altère pas* $\mathrm{Ls}\, A_n$, *en altérant un nombre fini des* A_n.

8[1]. $$\mathrm{Ls}\, A_n = \prod_n \overline{A_n + A_{n+1} + \dots} \subset \overline{\sum_n A_n}.$$

La formule 1 se démontre comme II, 1. Pour prouver la formule 3 (où Ls ne peut pas être remplacé par Li!) posons $p = \lim p_{k_n}$ et $p_{k_n} \in (A_{k_n} + B_{k_n})$. On a donc pour une infinité d'indices k_n soit constamment $p_{k_n} \in A_{k_n}$, soit constamment $p_{k_n} \in B_{k_n}$. Dans le premier cas $p \in \mathrm{Ls}\, A_n$ et dans le deuxième $p \in \mathrm{Ls}\, B_n$.

Les formules 2—4a sont des conséquences directes de 3. Les formules 5—7 résultent facilement de la définition.

Passons à la formule 8 (on ne connaît pas de formule analogue pour $\mathrm{Li}\, A_n$). Soit $p \in \mathrm{Ls}\, A_n$. Donc $p = \lim p_{k_n}$ et $p_{k_n} \in A_{k_n}$. Comme $k_n \geqslant n$, il vient $p_{k_n} \in A_i + A_{i+1} + \dots$ pour $n > i$. Par conséquent $p \in \overline{A_i + A_{i+1} + \dots}$, quel que soit i.

Inversement, si p n'appartient pas à $\mathrm{Ls}\, A_n$, il existe un entourage G de p et un indice m tel que l'on a $GA_n = 0$ pour $n \geqslant m$. Par conséquent p n'appartient pas à $\overline{A_m + A_{m+1} + \dots}$

V. Relations entre Li et Ls. On a la formule

1. $$\mathrm{Li}\, A_n = \prod \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \sum \mathrm{Li}\, A_{k_n} = \mathrm{Ls}\, A_n,$$

où $\prod$ et $\sum$ s'étendent sur toutes les suites $\{k_n\}$ croissantes.

Car, d'une part, d'après II, 5 et IV, 5:

$$\mathrm{Li}\, A_n \subset \prod \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \prod \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \quad \text{et} \quad \sum \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \sum \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Ls}\, A_n$$

et d'autre part: 1° si p *non*-$\in \mathrm{Li}\, A_n$, il existe un entourage G de p et une suite $k_1 < k_2 < \dots$ tels que l'on a $GA_{k_n} = 0$ pour chaque n; par conséquent p *non*-$\in \mathrm{Ls}\, A_{k_n}$; 2° si $p \in \mathrm{Ls}\, A_n$, il existe une suite p_{k_n} telle que $p_{k_n} \in A_{k_n}$ et $p = \lim p_{k_n}$; par conséquent $p \in \mathrm{Li}\, A_{k_n}$.

2. $$\mathrm{Li}\, A_n - \mathrm{Ls}\, B_n \subset \mathrm{Li}\, (A_n - B_n).$$

En effet, soit $p \in (\mathrm{Li}\, A_n - \mathrm{Ls}\, B_n)$. Donc $p = \lim p_n$, $p_n \in A_n$ et, comme p *non*-$\in \mathrm{Ls}\, B_n$, on a p_n *non*-$\in B_n$ à partir d'un n suffisamment grand. Donc $p_n \in (A_n - B_n)$ et par suite $p \in \mathrm{Li}\, (A_n - B_n)$.

---

1) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 237 (4).

VI. Limite. *La suite d'ensembles* $\{A_n\}$ *est dite convergente vers l'ensemble* A, en symboles: $A = \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, A_n$ [1]), *lorsque* $\underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, A_n = \underset{n=\infty}{\mathrm{Ls}}\, A_n$.

Dans le cas particulier où l'ensemble A_n se réduit à un seul point p_n, la suite A_n est convergente, soit lorsque $\lim p_n$ existe (et alors l'ensemble $\mathrm{Lim}\, A_n$ se compose du point $\lim p_n$ seul), soit lorsque la suite p_n ne contient aucune sous-suite convergente (et alors $\mathrm{Lim}\, A_n = 0$).

On a les règles de calcul suivantes (dans 1—5 les suites A_n et B_n sont supposées convergentes):

1. $\overline{\mathrm{Lim}\, A_n} = \mathrm{Lim}\, A_n = \mathrm{Lim}\, \overline{A_n}$.

2. $A_n \subset B_n$ *entraîne* $\mathrm{Lim}\, A_n \subset \mathrm{Lim}\, B_n$.

2a. *Les conditions* $p_n \in A_n$ *et* $p = \lim p_n$ *entraînent* $p \in \mathrm{Lim}\, A_n$.

3. $\mathrm{Lim}\, (A_n + B_n) = \mathrm{Lim}\, A_n + \mathrm{Lim}\, B_n$.

4. *Si* $k_1 < k_2 < \dots$, $\mathrm{Lim}\, A_{k_n} = \mathrm{Lim}\, A_n$. 5. *Si* $A_n = A$, $\mathrm{Lim}\, A_n = \overline{A}$.

6. *On n'altère pas la limite (ni la convergence) d'une suite, en altérant un nombre fini de ses termes.*

7. *Si* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, *on a* $\mathrm{Lim}\, A_n = \overline{\sum_n A_n}$.

8. *Si* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, *on a* $\mathrm{Lim}\, A_n = \prod_n \overline{A_n}$.

Les règles 1, 2, 5 et 6 résultent directement des règles correspondantes des NN° II et IV. La règle 2a se déduit de 2. Les règles 3 et 4 résultent des formules:

$$\mathrm{Ls}\, (A_n + B_n) = \mathrm{Ls}\, A_n + \mathrm{Ls}\, B_n = \mathrm{Li}\, A_n + \mathrm{Li}\, B_n \subset \mathrm{Li}\, (A_n + B_n) \subset \mathrm{Ls}\, (A_n + B_n),$$

$$\mathrm{Lim}\, A_n = \mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Ls}\, A_n = \mathrm{Lim}\, A_n.$$

L'hypothèse de la proposition 7 implique que $A_n = A_n \cdot A_{n+1} \cdot \dots$, d'où $\sum_n A_n = \sum_n (A_n \cdot A_{n+1} \cdot \dots)$ et selon II, 8 et IV, 8

$$\overline{\sum_n A_n} \subset \mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, A_n \subset \overline{\sum_n A_n}.$$

---

1) qu'il ne faut pas confondre avec $\underset{n=\infty}{\mathrm{Limes}}\, A_n$ au sens de la Théorie générale des ensembles, voir § 13, VI, 8 et p. 152, renvoi 2).

D'une façon analogue, l'hypothèse de la proposition 8 implique que $A_n = A_n + A_{n+1} + \ldots$ et il vient

$$\prod_n \overline{A}_n \subset \text{Li}\, \overline{A}_n = \text{Li}\, A_n \subset \text{Ls}\, A_n = \prod_n \overline{A}_n.$$

VII. Relativisation. E étant un ensemble donné, la limite inférieure relative à E d'une suite de sous-ensembles A_n de E est l'ensemble de tous les points p de E tels que, G désignant un ensemble ouvert quelconque contenant p, on a l'inégalité $GEA_n \neq 0$ pour tous les n suffisamment grands. On en conclut aussitôt que la limite inférieure relative à E coïncide avec l'ensemble $E \cdot \text{Li}\, A_n$.

D'une façon analogue, la limite supérieure relative à E coïncide avec $E \cdot \text{Ls}\, A_n$ et la limite relative à E avec $E \cdot \text{Lim}\, A_n$.

VIII [1]). Théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé.

Chaque suite d'ensembles contient une sous-suite convergente [2]).

Soient $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace et $A_1, A_2, \ldots$ la suite d'ensembles donnée. Définissons les ensembles $\{A_i^n\}$ de la façon suivante: 1) $A_i^1 = A_i$, quel que soit i, 2) s'il existe pour un $n > 1$ une suite $k_1 < k_2 < \ldots$ telle que $R_n \cdot \underset{i=\infty}{\text{Ls}}\, A_{k_i}^{n-1} = 0$, posons $A_i^n = A_{k_i}^{n-1}$ (le choix de la suite $\{k_i\}$ est arbitraire), 3) si aucune suite de ce genre n'existe, soit $A_i^n = A_i^{n-1}$.

Nous allons montrer que la suite $D_n = A_n^n$ est convergente.

Supposons, par contre, que $\text{Ls}\, D_n \neq \text{Li}\, D_n$. D'après V, 1, il existe alors une sous-suite D_{j_n} telle que $\text{Ls}\, D_{j_n} \neq \text{Ls}\, D_n$. Les deux derniers ensembles étant fermés, il existe un R_m tel que

(i) $\quad R_m \cdot \text{Ls}\, D_{j_n} = 0, \qquad$ (ii) $\quad R_m \cdot \text{Ls}\, D_n \neq 0.$

La suite $\{D_{j_n}\}$ est une sous-suite de la suite $\{D_n\}$ et celle-ci est, à partir du $(m-1)$-ième terme, une sous-suite de la suite $\{A_i^{m-1}\}$, où $i = 1, 2, \ldots$ On en conclut en vertu de (i) que le cas 2) de la définition est réalisé lorsqu'on y remplace n par m. Par conséquent $R_m \cdot \underset{i=\infty}{\text{Ls}}\, A_i^m = 0$. La suite $\{D_n\}$ étant (abstraction faite de ses m premiers termes) une sous-suite de $\{A_i^m\}$, $i = 1, 2, \ldots$, il en résulte que $R_m \cdot \text{Ls}\, D_n = 0$, contrairement à (ii).

[1]) Dans ce N° l'espace est supposé séparable.

[2]) dont la limite est vide ou non. Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 148, C. Zarankiewicz, Fund. Math. 9 (1927), p. 124, P. Urysohn, Verhandl. Akad. Amsterdam 13 (1927), p. 29. Cf. aussi T. Ważewski, Ann. Soc. Pol. Math. 2 (1923), p. 72 et Fund. Math. 4 (1923), p. 229; R. G. Lubben, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1928), p. 668.

Corollaire 1. On a $\text{Li}\, A_n = \prod' \text{Lim}\, A_{k_n}$ *et* $\text{Ls}\, A_n = \sum' \text{Lim}\, A_{k_n}$, *où* $\prod'$ *et* $\sum'$ *s'étendent à toutes les sous-suites* A_{k_n} *convergentes.*

Pour établir la première égalité, il suffit en vertu de V, 1 de démontrer que, si p *non*-$\varepsilon\, \text{Li}\, A_n$, il existe une suite convergente A_{k_n} telle que p *non*-$\varepsilon\, \text{Lim}\, A_{k_n}$. Or il existe par hypothèse un entourage G du point p et une suite A_{j_n} tels que $A_{j_n} \cdot G = 0$. A_{k_n} désigne une sous-suite convergente de A_{j_n}.

Passons à la deuxième égalité. D'après V, 1 on a l'inclusion $\sum' \text{Lim}\, A_{k_n} \subset \text{Ls}\, A_n$. D'autre part, si $p \,\varepsilon\, \text{Ls}\, A_n$, il existe une sous-suite A_{k_n} telle que $p \,\varepsilon\, \text{Li}\, A_{k_n}$, donc, comme nous venons de voir, une suite convergente $A_{k_{j_n}}$ telle que $p \,\varepsilon\, \underset{n=\infty}{\text{Lim}}\, A_{k_{j_n}} \subset \sum' \text{Lim}\, A_{k_n}$.

Corollaire 2. Si la suite $\{A_n\}$ *ne converge pas vers* A, *elle contient une sous-suite qui converge vers un ensemble différent de* A.

En effet, si l'on a $\text{Lim}\, A_{k_n} = A$ pour chaque sous-suite A_{k_n} convergente, il vient (cor. 1): $\text{Li}\, A_n = A = \text{Ls}\, A_n$, d'où $\text{Lim}\, A_n = A$.

IX. Famille E des sous-ensembles fermés non vides de l'espace $\mathcal{X}$.

Cette famille est un espace $\mathcal{L}^*$, *la notion de limite étant entendue dans le sens de la définition du* N° VI *(l'espace* $\mathcal{X}$ *est supposé séparable).*

En effet, d'après VI, 4 et 5, les conditions 1° et 2° du § 14, I, sont vérifiées. La condition 3° résulte du corollaire 2, qui précède. Car, $\{A_n\}$ étant une suite qui ne converge pas vers A, il existe une sous-suite $\{A_{k_n}\}$ qui converge vers un ensemble (vide ou non) différent de A. Donc aucune sous-suite de celle-ci ne peut converger vers A.

Remarque. Dans l'espace **E** l'axiome III peut être en défaut.

Considérons, en effet, l'exemple suivant: l'espace $\mathcal{X}$ se compose: 1) du nombre 0, 2) des nombres $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ où $n = 2, 3, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1}$, 3) du nombre 1, 4) des nombres $1 + \frac{1}{n}$. Soit $\boldsymbol{A}$ la famille de tous les couples $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k},\, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Chaque nombre de la forme $1 + \frac{1}{n}$ constitue alors un ensemble-élément de $\overline{\boldsymbol{A}}$. Par conséquent, l'ensemble composé du nombre 1 appartient à $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$, tandis qu'il n'appartient pas à $\overline{\boldsymbol{A}}$. Ainsi $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \neq \overline{\boldsymbol{A}}$.

X. Rapports à l'espace $2^{\mathcal{X}}$. Il importe de remarquer que l'espace E est entièrement différent de l'espace $2^{\mathcal{X}}$, métrisé par la „distance" des ensembles (voir § 15, VII); le deuxième est toujours métrique, tandis que le premier peut ne pas l'être; le premier est, comme nous le verrons, séparable, tandis que le deuxième ne l'est pas toujours (voir § 15, IX, remarque 2).

Théorème [1]). *E est une image biunivoque et continue de $2^{\mathcal{X}}$ (l'espace $\mathcal{X}$ est supposé borné).*

Soit, en effet, $\lim_{n=\infty} \mathrm{dist}(A_n, A) = 0$. A chaque $\varepsilon > 0$ correspond donc un $n(\varepsilon)$ tel que $\mathrm{dist}(A_n, A) < \varepsilon$ pour tout $n > n(\varepsilon)$; en d'autres termes:

(1) pour chaque $x \varepsilon A$ on a $\rho(A_n, x) < \varepsilon$, quel que soit $n > n(\varepsilon)$,

(2) il existe une suite ε_n tendant vers 0 telle que $\rho(y, A) < \varepsilon_n$, quel que soit $y \varepsilon A_n$.

Il s'agit de prouver que $\mathrm{Lim}\, A_n = A$, c. à d. que 1º $A \subset \mathrm{Li}\, A_n$ et 2º $\mathrm{Ls}\, A_n \subset A$.

1. Soient $x \varepsilon A$ et G un entourage de x. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit il vient d'après (1): $G \cdot A_n \neq 0$, quel que soit $n > n(\varepsilon)$. Donc $x \varepsilon \mathrm{Li}\, A_n$.

2. Soit, d'autre part, $x \varepsilon \mathrm{Ls}\, A_n$. Donc $x = \lim_{n=\infty} y_{k_n}$ où $y_{k_n} \varepsilon A_{k_n}$. D'après (2), il existe un point $a_{k_n} \varepsilon A$ tel que $|y_{k_n} - a_{k_n}| < \varepsilon_n$. Comme $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, il vient $x = \lim_{n=\infty} a_{k_n}$, d'où $x \varepsilon A$.

Corollaire. L'espace E, ainsi que chaque sous-ensemble de cet espace, est séparable (l'espace $\mathcal{X}$ est supposé séparable).

En effet, $\mathcal{X}$ étant métrique séparable, soit $\mathcal{X}_1$ un espace totalement borné homéomorphe à $\mathcal{X}$ (§ 17, IV, cor. 2). Comme espace défini d'une façon topologique, E est homéomorphe à E_1 (en désignant ainsi l'espace correspondant à $\mathcal{X}_1$). Or, $\mathcal{X}_1$ étant totalement borné, $2^{\mathcal{X}_1}$ est séparable (p. 91). L'espace E_1, donc aussi E, étant une image continue de $2^{\mathcal{X}_1}$, chaque sous-ensemble de E, comme image continue d'un ensemble séparable, est séparable (voir § 14, VI), c. q. f. d.

La notion de point d'accumulation, ainsi que celle de point de condensation, étant des invariants des transformations biunivoques et continues (effectuées sur des espaces $\mathcal{L}^*$), le théorème de ce Nº implique que A étant un sous-ensemble indénombrable de E, chaque élément de A, sauf une infinité dénombrable en est un élément de condensation [2]) et, en outre, que A contient un ensemble dense en soi. Par conséquent, chaque ensemble A clairsemé est dénombrable (voir § 18, III et V).

---

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 149.

[2]) Cf. C. Zarankiewicz, Fund. Math. 11 (1928), p. 129.

E. Ensembles boreliens. Fonctions mesurables B (§§ 26—28).

L'espace considéré dans les §§ 26—28 est supposé métrique.

§ 26. Ensembles boreliens.

I. Equivalences. Nous avons défini au § 5, VI la famille des ensembles boreliens comme la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ assujettie aux conditions:

1. *chaque ensemble fermé appartient à $\boldsymbol{F}$,*
2. *si $X \varepsilon \boldsymbol{F}$, on a $(1 - X) \varepsilon \boldsymbol{F}$,*
3. *si $X_n \varepsilon \boldsymbol{F}$, on a $(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots) \varepsilon \boldsymbol{F}$,*

où la condition 3 pouvait être remplacée par la suivante:

3'. *si $X_n \varepsilon \boldsymbol{F}$, on a $(X_1 + X_2 + \ldots) \varepsilon \boldsymbol{F}$.*

Nous avons démontré, d'autre part, que dans chaque espace métrique tout ensemble fermé est un $\boldsymbol{G}_\delta$ et que, par conséquent, tout ensemble ouvert est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (§ 15, IV). En s'appuyant sur ces faits, nous établirons à présent le théorème suivant [1]): *la famille des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions* 1, 3 *et* 3'.

Désignons cette dernière famille par $\boldsymbol{F}^*$. Il s'agit de prouver que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^*$.

Comme nous venons d'observer, la famille $\boldsymbol{F}$ satisfait aux conditions 1, 3 et 3', de sorte que $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}$.

Afin d'établir l'inclusion inverse, désignons par $\boldsymbol{F}^0$ la famille des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}^*$. La famille $\boldsymbol{F}^0$ satisfait à la condition 1, car le complémentaire d'un ensemble fermé est, comme ensemble ouvert, une somme d'une suite d'ensembles fermés; il appartient donc à $\boldsymbol{F}^*$. En outre, en appliquant les formules de de Morgan, on voit aussitôt que $\boldsymbol{F}^0$ satisfait aussi aux conditions 3 et 3'. Donc $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}^0$, ce qui veut dire que chaque ensemble appartenant à $\boldsymbol{F}^*$ est le complémentaire d'un ensemble qui appartient aussi à $\boldsymbol{F}^*$. Il en résulte que la famille $\boldsymbol{F}^*$ satisfait à la condition 2. Donc $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{F}^*$.

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables (B)*, Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 29. Pour une généralisation appartenant à la Théorie générale des ensembles, voir du même auteur, *Les ensembles boreliens abstraits*, Ann. Soc. Polonaise de Math. 6 (1927), p. 51.

II. Classification des ensembles boreliens. On prouve par un simple raisonnement de la Théorie des ensembles [1]) que la famille des ensembles boreliens (donc la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ satisfaisant aux conditions 1, 3 et 3') est la somme d'une suite transfinie (du type Ω) des familles:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1 + ... + \boldsymbol{F}_\alpha + ...$$

telles que 1° $\boldsymbol{F}_0$ est la famille des ensembles fermés, 2° les ensembles de la famille $\boldsymbol{F}_\alpha$ sont des produits ou des sommes de suites dénombrables d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}_\xi$ avec $\xi < \alpha$, suivant que α est pair ou impair (les nombres limites étant considérés comme pairs).

En remplaçant dans la condition I, 1 le terme „fermé" par „ouvert" (cf. p. 23), on parvient à la classification suivante:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_0 + \boldsymbol{G}_1 + ... + \boldsymbol{G}_\alpha + ...$$

où 1° $\boldsymbol{G}_0$ est la famille des ensembles ouverts, 2° les ensembles de la famille $\boldsymbol{G}_\alpha$ sont des sommes ou des produits de suites dénombrables d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{G}_\xi$ avec $\xi < \alpha$, suivant que α est pair ou impair.

III. Propriétés des classes $\boldsymbol{F}_\alpha$ et $\boldsymbol{G}_\alpha$. Les familles $\boldsymbol{F}_\alpha$ avec indice pair, ainsi que les familles $\boldsymbol{G}_\alpha$ avec indice impair, sont *multiplicatives* au sens dénombrable, c. à d. qu'étant donnée une suite d'ensembles appartenant à une telle famille, leur produit appartient encore à la même famille. Les ensembles appartenant à une famille de ce genre seront dits de *classe α multiplicative*. D'une façon analogue, les familles $\boldsymbol{F}_\alpha$ munies d'indice impair, ainsi que les familles $\boldsymbol{G}_\alpha$ munies d'indice pair, sont *additives* et constituent la *classe α additive*. On voit ainsi que la classe α multiplicative (additive) est constituée par les produits (sommes) d'ensembles de classes $< \alpha$ [2]).

---

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 85. Voir aussi W. H. Young Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 260.

[2]) Pour α fini, les ensembles de classe α multiplicative (additive) coïncident avec les ensembles F (ensembles O) de classe α au sens de M. Lebesgue. Cf. aussi W. Sierpiński, *Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin*, Fund. Math. 19 (1932), p. 257.

Les classes à indices finis sont désignées comme suit:

$$\boldsymbol{F}_\sigma, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta}, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta\sigma}, ..., \quad \boldsymbol{G}_\delta, \boldsymbol{G}_{\delta\sigma}, \boldsymbol{G}_{\delta\sigma\delta}, ...$$

Les propriétés suivantes des ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$ (cf. § 5, V) s'étendent par induction aux classes à indices arbitraires.

Le *complémentaire* d'un ensemble de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$. La *somme* et le *produit d'un nombre fini* d'ensembles appartenant à une même classe appartient à cette classe. Tout ensemble de classe α additive est la somme d'une suite *croissante* d'ensembles à indices $\xi < \alpha$; tout ensemble de classe α multiplicative est le produit d'une suite *décroissante* d'ensembles à indices $\xi < \alpha$. Pour qu'un ensemble soit de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$) *relativement* à un ensemble E, il faut et il suffit qu'il constitue la partie commune de E et d'un ensemble de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$). Etant donnée une fonction continue $f(x)$ définie sur un espace $\mathcal{X}$, si Y est de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$), *l'ensemble $f^{-1}(Y)$* l'est également (cf. § 13, IV).

Ajoutons que tout ensemble borelien de classe α est un ensemble de chaque classe ($\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$) à *indice supérieur*. Cela résulte par induction du fait que chaque ensemble ouvert est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et que chaque ensemble fermé est un $\boldsymbol{G}_\delta$.

Le *produit cartésien* de deux ensembles de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$) est de la même classe. Car il en est ainsi dans le cas des ensembles ouverts et des ensembles fermés et on a (§ 2, II):

$$\Big(\sum_n A_n\Big) \times \Big(\sum_m B_m\Big) = \sum_{nm} (A_n \times B_m) \quad \text{et} \quad \Big(\prod_n A_n\Big) \times \Big(\prod_m B_m\Big) = \prod_{nm} (A_n \times B_m).$$

En particulier, on n'altère pas la classe d'un ensemble en le *multipliant* (au sens cartésien) *par un axe*. De là, en vertu de la formule $\underset{i}{P} A_i = \prod_i (\mathcal{X}_1 \times ... \times \mathcal{X}_{i-1} \times A_i \times \mathcal{X}_{i+1} \times ...)$, on conclut qu'un *produit cartésien dénombrable* d'ensembles de classe α multiplicative est encore de classe α multiplicative (cependant le théorème analogue concernant les classes additives ne serait pas vrai, même pour la classe des ensembles ouverts; cf. § 24, III).

En général, le produit cartésien dénombrable d'ensembles boreliens est borelien.

Dans un espace séparable la famille des ensembles ouverts (ainsi que celle des ensembles fermés) est de *puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$ (§ 19, I). Le même énoncé est donc vrai pour chaque classe borelienne. La famille des ensembles boreliens étant partagée en $\aleph_1$ classes, on en conclut que cette famille est de la puissance $\leqslant \mathfrak{c}\cdot\aleph_1 = \mathfrak{c}$ Par conséquent, *dans chaque espace séparable de puissance du continu il existe des ensembles non boreliens* (le problème de nommer effectivement un ensemble non borelien dans l'espace des nombres réels sera traité au § 34).

IV. Ensembles boreliens ambigus. Un ensemble est dit *ambigu de classe* α, lorsqu'il est à la fois un $\boldsymbol{F}_\alpha$ et un $\boldsymbol{G}_\alpha$. Ainsi par ex. un ensemble est ambigu de classe 0, lorsqu'il est à la fois fermé et ouvert; il est ambigu de classe 1, lorsqu'il est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et un $\boldsymbol{G}_\delta$. Un ensemble borelien de classe α est ambigu de classe $\alpha+1$.

Evidemment, le complémentaire d'un ensemble ambigu est ambigu (de la même classe). Il en résulte que les ensembles ambigus d'une classe α constituent un *corps*, c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles ambigus de classe α est un ensemble ambigu de classe α.

V. Décomposition en ensembles disjoints.

1) *Tout ensemble de classe $\alpha > 0$ additive est la somme d'une série d'ensembles disjoints ambigus de classe α.*

En effet, étant donné $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$, il vient

$$(^0)\quad A = A_1 + [A_2 - A_1] + \ldots + [A_n - (A_1 + \ldots + A_{n-1})] + \ldots$$

et, chaque A_n étant supposé de classe $<\alpha$ multiplicative, donc ambigu de classe α, les termes de la série $(^0)$ sont des ensembles disjoints ambigus de classe α.

2) *Tout ensemble de classe $\alpha > 1$ additive est la somme d'une série d'ensembles disjoints de classes $<\alpha$ multiplicatives* [1]).

Considérons la décomposition $(^0)$. Chaque ensemble A_n étant supposé de classe multiplicative $<\alpha$, il en est encore de même de la somme $A_1 + \ldots + A_{n-1}$. Cela veut dire que l'ensemble $1-(A_1 + \ldots + A_{n-1})$ est de classe additive $<\alpha$. Cet ensemble est donc en vertu de 1) de la forme $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i^n$ où B_i^n sont des ensembles disjoints ambigus de classes $<\alpha$ (car $\alpha>1$). La formule

1) Théorème de M. Lusin; voir W. Sierpiński, *Sur une classification des ensembles mesurables* (*B*), Fund. Math. 10 (1927), p. 324.

$A = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_n\cdot B_i^n$ représente la décomposition demandée, puisque $A_n\cdot B_i^n$ est de classe $<\alpha$ multiplicative.

3) *La famille des ensembles boreliens est la plus petite famille qui contient:* (i) *tous les ensembles ouverts,* (ii) *les produits de ses éléments,* (iii) *les sommes disjointes de ses éléments.*

Soit $\boldsymbol{H}$ une famille satisfaisant aux conditions (i)—(iii). Nous allons montrer par induction que chaque ensemble borelien appartient à $\boldsymbol{H}$. Or en vertu de (i) et (ii) chaque $\boldsymbol{G}_\delta$ et d'après 2) chaque $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$ appartient à $\boldsymbol{H}$. Donc chaque $\boldsymbol{F}_\sigma$ appartient à $\boldsymbol{H}$.

Soit à présent $\alpha>1$ et admettons que chaque ensemble de classe $<\alpha$ appartienne à $\boldsymbol{H}$. Donc, conformément à (ii), les ensembles de classe α multiplicative appartiennent à $\boldsymbol{H}$ et, en raison de 2) et (iii), il en est encore de même de chaque ensemble de classe α additive. Par conséquent, tous les ensembles boreliens de classe α appartiennent à $\boldsymbol{H}$, c. q. f. d.

Remarques. Si l'espace est de dimension 0, l'énoncé 1) est vrai aussi pour $\alpha=0$, c. à d. qu'un ensemble ouvert est alors la somme d'une série d'ensembles disjoints qui sont à la fois fermés et ouverts (§ 21, I, cor. 1). Il en résulte que l'énoncé 2) est valable pour $\alpha=1$, c. à d. que dans un espace 0-dimensionnel tout $\boldsymbol{F}_\sigma$ est la somme d'une série d'ensembles fermés disjoints. Ce dernier énoncé n'est pas valable dans les espaces de dimension >0: par ex. l'intervalle ouvert ne se laisse pas décomposer en une suite d'ensembles fermés et disjoints.

VI. Séries alternées d'ensembles boreliens. 1. Soit

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_\xi \supset A_{\xi+1} \supset \ldots \supset A_\gamma$$

une suite transfinie dénombrable d'ensembles ambigus de classe α et telle que $A_\lambda = \prod\limits_{\xi<\lambda} A_\xi$, si λ est un nombre limite ou bien si $\lambda=\gamma$. Dans ces conditions, *l'ensemble*

$$S = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots + A_{\omega+1} - A_{\omega+2} + \ldots$$

est ambigu de classe α.

On a, en effet (§ 12, I (4)):

$$1 - S = 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_\omega - A_{\omega+1} + \ldots + A_\gamma.$$

Or, chaque différence $A_\xi - A_{\xi+1}$ étant un ensemble ambigu de classe α, donc de classe α additive, les ensembles S et $1-S$, comme sommes dénombrables d'ensembles de ce genre, sont également de classe α additive. Donc S est ambigu de classe α.

2. *Etant donnée une suite $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ d'ensembles ambigus de classe α tels que $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n})$ est ambigu de classe α* (c'est un cas particulier de l'énoncé 1).

3. *La somme d'une série alternée (dénombrable) d'ensembles boreliens décroissants de classe α multiplicative*

$$B = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \dots + B_{\omega+1} - B_{\omega+2} + \dots$$

est un ensemble ambigu de classe $\alpha + 1$ [1].

Car en posant $B_\lambda = \prod_{\xi < \lambda} B_\xi$ pour λ limite et en tenant compte du fait que le produit dénombrable des B_ξ est de classe α multiplicative, donc ambigu de classe $\alpha + 1$, on conclut de l'énoncé 1 que B est un ensemble ambigu de classe $\alpha + 1$.

VII. Théorème de séparation [2]. *A et B étant deux ensembles disjoints de classe $\alpha > 0$ multiplicative, il existe un ensemble E ambigu de classe α tel que $A \subset E$ et $EB = 0$.*

Posons $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ et $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ où A_n et B_n sont des ensembles décroissants de classes $< \alpha$ additives, donc ambigus de classe α. Soit

$$E = A_1 \cdot (1 - B_1) + A_2 \cdot (B_1 - B_2) + \dots + A_n \cdot (B_{n-1} - B_n) + \dots$$

D'après le lemme du § 21, II, on a $A \subset E$ et $EB = 0$. En outre, d'après N° VI, 2, l'ensemble E est ambigu de classe α comme somme d'une série alternée d'ensembles décroissants ambigus de classe α et dont le produit est vide.

Remarques. Le théorème de séparation peut être énoncé aussi de la façon suivante (cf. la note précitée de M. Sierpiński):

[1] Le théorème inverse est vrai dans les espaces complets (voir § 33).

[2] Théorème de M. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 1—5. On y trouve plusieurs applications du théorème de séparation à la Théorie des fonctions.

étant donnés deux ensembles $A \subset C$ de classe $\alpha > 0$ dont le premier est de classe multiplicative et le deuxième de classe additive, il existe un ensemble E ambigu de classe α tel que $A \subset E \subset C$. Pour établir l'équivalence de ces deux énoncés, on pose $C = 1 - B$.

Dans l'espace 0-*dimensionnel* le théorème est vrai aussi pour $\alpha = 0$. Voir p. 122, th. II.

VIII. Ensembles relativement ambigus. 1. *A étant un ensemble de classe $\alpha > 0$ multiplicative et B un ensemble ambigu de classe α relativement à A, l'ensemble B est de la forme $B = AC$ où C est ambigu de classe α* (dans l'espace tout entier).

En effet, l'hypothèse que B est ambigu de classe α par rapport à A veut dire que B et $A - B$ sont de classe α multiplicative par rapport à A. Or, A étant lui-même de classe α multiplicative, B et $A - B$ sont deux ensembles de classe α multiplicative (dans l'espace). Selon le théorème de séparation (N° VII), il existe un ensemble C ambigu de classe α tel que $B \subset C$ et $C \cdot (A - B) = 0$, d'où $B = AB \subset AC$ et $CA \subset B$, donc $B = AC$.

En vue des applications ultérieures nous allons démontrer que:

2. *Etant donnés un ensemble A et un système d'ensembles $\{B_{i_1 \dots i_n}\}$ ambigus de classe α par rapport à A et tels que l'on a toujours $B_{i_1 \dots i_n} \cdot B_{j_1 \dots j_k} = 0$ pour $(i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_k)$ et $k \leqslant n$, il existe un système d'ensembles $\{C_{i_1 \dots i_n}\}$ ambigus de classe α par rapport à la somme $A_n = \sum C_{i_1 \dots i_n}$* (où la sommation s'étend à tous les systèmes de n indices) *et tels que A_n est ambigu de classe $\alpha + 1$, $AC_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$, $C_{i_1 \dots i_n} \cdot C_{j_1 \dots j_k} = 0$ et que $C_{i_1 \dots i_n} = 0$, si $B_{i_1 \dots i_n} = 0$.*

De plus, *si A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative et si l'on a $A = \sum B_{i_1 \dots i_n}$ pour chaque n, A_n coïncide avec l'espace tout entier.*

Il existe par hypothèse un système d'ensembles $\{D_{i_1 \dots i_n}\}$ de classe α additive (même ambigus de classe α, lorsque A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative) tels que $AD_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$ et que $D_{i_1 \dots i_n} = 0$, si $B_{i_1 \dots i_n} = 0$. Désignons par V_n la somme de tous les produits de la forme $D_{i_1 \dots i_n} \cdot D_{j_1 \dots j_k}$ et posons $C_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n$. L'ensemble $A_n = \sum D_{i_1 \dots i_n} - V_n$ est ambigu de classe $\alpha + 1$ comme différence de deux ensembles de classe α additive. L'égalité $A_n \cdot D_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n = C_{i_1 \dots i_n}$ implique que $C_{i_1 \dots i_n}$ est de classe α additive par rapport à A_n, d'où en vertu de l'égalité $C_{i_1 \dots i_n} \cdot C_{j_1 \dots j_n} = D_{i_1 \dots i_n} \cdot D_{j_1 \dots j_n} - V_n = 0$ on conclut que $C_{i_1 \dots i_n}$ est ambigu de classe α par rapport à A_n. On a enfin $AC_{i_1 \dots i_n} = AD_{i_1 \dots i_n} - AV_n = B_{i_1 \dots i_n}$, car l'égalité $AD_{i_1 \dots i_n} \cdot D_{j_1 \dots j_k} = B_{i_1 \dots i_n} \cdot B_{j_1 \dots j_k} = 0$ donne $AV_n = 0$.

Si l'on suppose que $A = \sum B_{i_1 \dots i_n}$, il vient $B_{i_1 \dots i_n} = \sum_k B_{i_1 \dots i_n k} \subset \sum_k D_{i_1 \dots i_n k}$ et il existe (N⁰ VII) un ensemble $E_{i_1 \dots i_n}$ ambigu de classe α tel que $B_{i_1 \dots i_n} \subset E_{i_1 \dots i_n} \subset \sum_k D_{i_1 \dots i_n k}$. On définit les ensembles $C_{i_1 \dots i_n}$ (où $n \geqslant 0$) par induction, en convenant que 1) $C =$ l'espace tout entier, $B = A$, 2) $i_1 \dots i_n$ étant un système donné et l étant le plus petit indice tel que $B_{i_1 \dots i_n l} \neq 0$, on a $C_{i_1 \dots i_n l} = C_{i_1 \dots i_n} \cdot D_{i_1 \dots i_n l} + C_{i_1 \dots i_n} - E_{i_1 \dots i_n}$, 3) pour $k > l$ $C_{i_1 \dots i_n k} = C_{i_1 \dots i_n} \cdot D_{i_1 \dots i_n k} - (C_{i_1 \dots i_n l} + \dots + C_{i_1 \dots i_n (k-1)})$.

Remarque. Les énoncés 1 et 2 sont valables dans *l'espace de dimension* 0 aussi pour $\alpha = 0$. Cf. la remarque finale du N⁰ VII.

IX. Ensemble limite des ensembles ambigus. *A étant un ensemble ambigu de classe $\alpha > 1$, il existe une suite d'ensembles A_n ambigus de classes $< \alpha$ tels que*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cdot A_{n+1} \cdot \dots) = \prod_{n=0}^{\infty} (A_n + A_{n+1} + \dots),$$

c. à d. que $A = \operatorname{Limes}_{n=\infty} A_n$ au sens de la Théorie générale des ensembles (cf. N⁰ 13, VI, 8).

Dans les espaces 0-*dimensionnels le théorème est valable aussi pour* $\alpha = 1$.

On a par hypothèse

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} K_n, \quad 1 - A = \sum_{n=0}^{\infty} L_n, \quad K_n \subset K_{n+1} \quad \left(\text{d'où } K_n = \prod_{i=0}^{\infty} K_{n+i}\right)$$
$$\text{et } L_n \subset L_{n+1} \quad \left(\text{d'où } 1 - L_i = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - L_{n+i})\right),$$

les ensembles K_n et L_n étant de classes $< \alpha$ multiplicatives.

D'après le théorème de séparation (N⁰ VII) il existe une suite d'ensembles A_n ambigus de classes $< \alpha$ et tels que $K_n \subset A_n \subset 1 - L_n$. La double égalité à démontrer résulte de la formule (cf. p. 9):

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} K_n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{\infty} K_{n+i} \subset \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{\infty} A_{n+i} \subset \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+i} \subset$$
$$\subset \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - L_{n+i}) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - L_i) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} L_i = A.$$

X. Ensembles localement boreliens. D'après la définition générale de la localisation des propriétés (p. 29), un ensemble A est dit de classe α au point p, lorsqu'il existe un entourage E de p tel que AE est un ensemble borelien de classe α. Le terme „entourage" peut être remplacé par „entourage ouvert", excepté dans le cas où il s'agit de la classe 0 multiplicative (cas d'ensemble localement fermé, voir p. 65), car AE étant de classe α et G désignant l'intérieur de E, l'ensemble AG est encore de classe α (sauf le cas exceptionnel indiqué). On peut enfin remplacer dans le cas de l'espace séparable les entourages ouverts par les ensembles ouverts appartenant à la base $R_1, R_2, \dots$ de l'espace.

Dans un espace séparable, l'ensemble B des points de A où A est localement de classe α additive (ou bien de classe multiplicative > 0) est encore de la même classe [1].

1. Soit, en effet, $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots$ la suite de tous les ensembles (appartenant à la base) tels que AR_{n_k} est de classe α additive. L'ensemble $B = \sum_k AR_{n_k}$ est donc de classe α additive.

2. Supposons à présent que AR_{n_k} soit de classe $\alpha > 0$ multiplicative et posons en vertu de l'identité $XY = X - (X - Y)$:

$$B = \sum_k AR_{n_k} = A \cdot \sum_k R_{n_k} = \sum_k R_{n_k} - \left[\sum_k R_{n_k} - A\right] = \sum_k R_{n_k} - \sum_k [R_{n_k} - AR_{n_k}].$$

L'ensemble $R_{n_k} - AR_{n_k}$ étant de classe α additive, il en est de même de $\sum_k [R_{n_k} - AR_{n_k}]$, d'où la conclusion demandée.

Il en résulte que *si, dans un espace séparable, A est en chacun de ses points de classe α additive (ou bien de classe multiplicative > 0), A est un ensemble de la même classe.*

Remarque [2]. L'hypothèse de la *séparabilité* de l'espace est *essentielle*. Considérons, en effet, l'espace formé de tous les points (x, α), où $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant \alpha < \Omega$, la distance des points (x, α) et (x', α') étant définie comme égale à $|x - x'|$ pour $\alpha = \alpha'$ et à 1 pour $\alpha \neq \alpha'$ (ainsi l'espace est le produit cartésien de l'intervalle et de l'ensemble des nombres transfinis $< \Omega$). Soit I_α „l'intervalle" (x, α) où $0 \leqslant x \leqslant 1$, et B_α un ensemble borelien $\subset I_\alpha$, qui n'est pas de classe α. L'ensemble $S = \sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha$ est localement borelien, puisque les intervalles I_α sont ouverts dans l'espace, mais il n'est pas borelien, puisque s'il était de classe α, l'ensemble $S \cdot I_\alpha = B_\alpha$ le serait également.

[1]) Cf. K. Zarankiewicz, *O zbiorach lokalnie mierzalnych* (*B*), Wiadomości Matematyczne 30 (1928), p. 115.

[2]) Cette remarque est due à M. Szpilrajn, Fund. Math. 21 (1933), p. 112.

XI. Evaluation des classes à l'aide des symboles logiques [1]).

Nous dirons qu'*une fonction propositionnelle* $\varphi(x)$ *est de classe* F_α (de classe G_α), lorsque l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ est de classe F_α (de classe G_α). En tenant compte des formules établies dans l'Introduction (§ 1, IV et § 2, V—VI), on démontre les propositions suivantes:

1) $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions propositionnelles de classe F_α (de classe G_α), les fonctions $\varphi(x)+\psi(x)$ et $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ le sont également. Car on a $\underset{x}{E}\,[\varphi(x)+\psi(x)]=\underset{x}{E}\,\varphi(x)+\underset{x}{E}\,\psi(x)$ et $\underset{x}{E}\,[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\underset{x}{E}\,\varphi(x)\cdot\underset{x}{E}\,\psi(x)$ et la classe borelienne est invariante relativement à la multiplication et à l'addition des ensembles.

D'une façon plus générale:

1a) Soit $\varphi(x_1,\dots,x_n)\equiv\psi(x_{k_1},\dots,x_{k_j})+\chi(x_{l_1},\dots,x_{l_m})$, les indices $k_1,\dots,k_j$ et $l_1,\dots,l_m$ étant supposés $\leqslant n$ (par exemple $\varphi(x,y,z)\equiv\psi(x,y)+\chi(y,z)$). Si les fonctions ψ et χ sont de classe F_α (de classe G_α), φ l'est également (et il en est de même du produit $\psi\cdot\chi$).

En effet, $\underset{x_1\dots x_n}{E}\,\varphi(x_1,\dots,x_n)=\underset{x_1\dots x_n}{E}\psi(x_{k_1},\dots,x_{k_j})+\underset{x_1\dots x_n}{E}\,\chi(x_{l_1},\dots,x_{l_m})$ et, l'ensemble $\underset{x_{k_1}\dots x_{k_j}}{E}\,\psi(x_{k_1},\dots,x_{k_j})$ étant de classe F_α, l'ensemble $\underset{x_1\dots x_n}{E}\,\psi(x_{k_1},\dots,x_{k_j})$ l'est également, car il s'en obtient en le multipliant par des axes (voir N° III).

On voit ainsi qu'*en effectuant avec des fonctions propositionnelles données de classe* F_α *(de classe* G_α*) un nombre fini d'additions et de multiplications logiques, on parvient toujours à une fonction propositionnelle de classe* F_α *(de classe* G_α*).*

2) Si la fonction propositionnelle $\varphi(x)$ est de classe F_α, sa négation est de classe G_α.

Car l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi'(x)$ est le complémentaire de $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$.

[1]) Voir la note de M. Tarski et de moi *Les opérations logiques et les ensembles projectifs* et ma note *Evaluation de la classe borelienne ou projective à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. 17 (1931).

3) Si les fonctions propositionnelles $\varphi_n(x)$, $n=1,2,\dots$ sont des classes $<\alpha$, la fonction $\sum_n\varphi_n(x)$ est de classe α additive et la fonction $\prod_n\varphi_n(x)$ est de classe α multiplicative.

Car $\underset{x}{E}\sum_n\varphi_n(x)=\sum_n\underset{x}{E}\,\varphi_n(x)$ et $\underset{x}{E}\prod_n\varphi_n(x)=\prod_n\underset{x}{E}\,\varphi_n(x)$, les opérateurs $\sum$ et $\prod$ étant entendus au sens logique dans les membres gauches et au sens mathématique dans les membres droits de ces égalités (cf. § 2, V, 1 et 2).

En particulier, si toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont d'une classe F_α avec α pair, la fonction $\sum_n\varphi_n(x)$ est de la classe $F_{\alpha\sigma}$ et la fonction $\prod_n\varphi_n(x)$ est de la classe F_α. D'une façon analogue, si les fonctions $\varphi_{n,m}(x)$ sont d'une classe F_α, la fonction $\prod_m\sum_n\varphi_{n,m}(x)$ est de la classe $F_{\alpha\sigma\delta}$, etc.

On voit ainsi que *les règles* 1)—3) *permettent d'évaluer la classe borelienne d'un ensemble, si l'on sait définir cet ensemble à l'aide d'une fonction propositionnelle qui s'obtient d'un système de fonctions propositionnelles dont les classes sont connues en effectuant les opérations logiques:* $+,\cdot,{}',\sum_n,\prod_n$, *un nombre fini de fois.*

4) *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction propositionnelle de classe* F_α *(de classe* G_α*) et si* $x=f(t)$ *est une fonction continue, la fonction propositionnelle* $\varphi[f(t)]$ *est aussi de classe* F_α *(de classe* G_α*).*

Posons, en effet, $A=\underset{x}{E}\,\varphi(x)$. Il vient (voir § 3, I):

$$\underset{t}{E}\,\varphi[f(t)]=\underset{t}{E}\,\{f(t)\,\varepsilon\,\underset{x}{E}\,\varphi(x)\}=\underset{t}{E}\,\{f(t)\,\varepsilon\,A\}=f^{-1}(A)$$

et, l'ensemble A étant de classe F_α (de classe G_α), il en est de même (voir N° III) de l'ensemble $f^{-1}(A)$.

XII. Applications. Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique arbitraire.

1. Considérons *la famille* Φ *de toutes les suites extraites de cet espace qui satisfont à la condition de convergence de Cauchy* (on dit qu'une suite $\xi^1,\xi^2,\dots$ satisfait à la condition de Cauchy, si à chaque $\varepsilon>0$ correspond un indice m tel que l'on ait $|\xi^{m+i}-\xi^m|\leqslant\varepsilon$, quel que soit i). Nous allons prouver que *la famille* Φ *constitue un ensemble* $F_{\sigma\delta}$ *dans l'espace* $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.

On a, par définition:

$$\{\xi\,\varepsilon\,\Phi\}\equiv\prod_k\sum_m\prod_i|\xi^{m+i}-\xi^m|\leqslant\frac{1}{k}.$$

Or, la fonction propositionnelle $\varphi_{k,m,i}(\xi) \equiv \left\{ |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$ est de classe F_0 (pour k, m et i fixes). En effet, en tenant compte du fait que la distance est une fonction continue de deux variables et que ξ^n est une fonction continue de ξ (cf. § 24, I), l'ensemble $\underset{\xi}{E}\left\{ |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$ est fermé.

En appliquant la règle 3), on en conclut que la fonction $\prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est également de classe F_0, que $\sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est de classe F_σ et finalement que $\prod_k \sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est de classe $F_{\sigma\delta}$. Cela veut dire que l'ensemble Φ est un $F_{\sigma\delta}$, c. q. f. d.

Il en résulte en vertu de la règle 4) que, *$f_n(t)$ étant une suite de fonctions continues (définies sur un espace T), l'ensemble C de points t pour lesquels la condition de Cauchy est réalisée est un $F_{\sigma\delta}$* [1]. Car, en désignant par $\xi(t)$ la suite $[f_1(t), f_2(t), \ldots]$, on obtient $\{t \varepsilon C\} \equiv \prod_k \sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}[\xi(t)]$.

2. *La famille ϑ des suites denses en soi constitue un ensemble G_δ dans l'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.* Car la suite $\xi = [\xi^1, \xi^2, \ldots]$ est dite dense en soi, lorsqu'il existe pour tout n un $\xi^m \neq \xi^n$ aussi près que l'on veut de ξ^n; en symboles:

$$[\xi \varepsilon \vartheta] \equiv \prod_{nk} \sum_m \left\{ 0 < |\xi^n - \xi^m| < \frac{1}{k} \right\}.$$

La fonction propositionnelle entre crochets $\{ \}$ étant évidemment de la classe G_0 (pour n, m et k fixes), on n'altère pas sa classe en ajoutant l'opérateur $\sum_m$. La fonction $[\xi \varepsilon \vartheta]$ est donc de la classe G_δ.

3. *Décomposition de l'ensemble des nombres irrationnels en $\aleph_1$ sous-ensembles* [2]. Soit $r_1, r_2, \ldots$ la suite de tous les nombres rationnels. Faisons correspondre à chaque nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ (de l'intervalle 01), considéré comme une suite infinie de nombres naturels $[\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ (cf. § 14, V), l'ensemble $Z_\mathfrak{z}$ composé de nombres $r_{\mathfrak{z}^1}, r_{\mathfrak{z}^2}, \ldots$ Ordonnons ces nombres selon leur grandeur; si $Z_\mathfrak{z}$ est bien ordonné, désignons par $\tau(\mathfrak{z})$ son type d'ordre; s'il ne l'est pas, posons $\tau(\mathfrak{z}) = -1$.

Nous allons prouver que *l'ensemble $A_\alpha = \underset{\mathfrak{z}}{E}[0 < \tau(\mathfrak{z}) < \alpha]$, où $2 \leqslant \alpha < \Omega$, est de classe G_α.*

---

[1] Cf. § 2, VI, 2. Si $\mathcal{X}$ est complet, C est l'ensemble des points de convergence de la suite $\{f_n(t)\}$.

[2] Voir H. Lebesgue, op. cit. p. 213, N. Lusin et W. Sierpiński, C. R. Paris, t. 175 (1922), p. 357, où se trouve une décomposition en $\aleph_1$ ensembles boreliens, non vides et disjoints.

Désignons à ce but par $\tau_n(\mathfrak{z})$ le type d'ordre de l'ensemble des nombres rationnels $r_{\mathfrak{z}^i}$ inférieurs à $r_{\mathfrak{z}^n}$ (si cet ensemble est bien ordonné, sinon nous écrirons $\tau_n(\mathfrak{z}) = -1$) et posons $A_{\alpha,n} = \underset{\mathfrak{z}}{E}[0 \leqslant \tau_n(\mathfrak{z}) < \alpha]$. Considérons deux cas: 1° α est de la forme $\beta + 1$, 2° α est un nombre limite.

Dans le premier cas, on voit aussitôt que la condition pour que l'on ait $\mathfrak{z} \varepsilon A_\alpha$ est que, pour chaque n, les éléments de $Z_\mathfrak{z}$ qui précèdent $r_{\mathfrak{z}^n}$ constituent un ensemble bien ordonné d'un type d'ordre $< \beta$. On a ainsi l'équivalence: $\{\mathfrak{z} \varepsilon A_\alpha\} \equiv \prod_n \{0 \leqslant \tau_n(\mathfrak{z}) < \beta\}$, d'où $A_\alpha = \prod_n A_{\beta,n}$.

D'une façon analogue $\{\mathfrak{z} \varepsilon A_{\alpha,n}\} \equiv \prod_k \{(r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k}) + [0 \leqslant \tau_k(\mathfrak{z}) < \beta]\}$.

Dans le deuxième cas, où α est un nombre limite: $\alpha = \lambda$, il vient $\{\mathfrak{z} \varepsilon A_\lambda\} \equiv \sum_{\xi < \lambda} \{0 < \tau(\mathfrak{z}) < \xi\}$, d'où $A_\lambda = \sum_{\xi < \lambda} A_\xi$ et $\{\mathfrak{z} \varepsilon A_{\lambda,n}\} \equiv \sum_{\xi < \lambda} \{0 \leqslant \tau_n(\mathfrak{z}) < \xi\}$, d'où $A_{\lambda,n} = \sum_{\xi < \lambda} A_{\xi,n}$.

Enfin, on vérifie directement que $A_{1,n} = \underset{\mathfrak{z}}{E} \prod_k (r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k})$ et $A_2 = \underset{\mathfrak{z}}{E} \prod_{k,n} (\mathfrak{z}^n = \mathfrak{z}^k)$. Le dernier ensemble est manifestement fermé; le premier l'est aussi, car $r_{\mathfrak{z}^n}$ étant une fonction continue de $\mathfrak{z}$, l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}}{E}[r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k}]$ est fermé et il en est de même de l'ensemble $\prod_k \underset{\mathfrak{z}}{E}\{r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k}\} = A_{1,n}$.

La fonction propositionnelle $\varphi_{n,k}(\mathfrak{z}) \equiv \{r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k}\}$ étant, comme nous venons de montrer, de la classe F_0, la fonction $\prod_k \{(r_{\mathfrak{z}^n} \leqslant r_{\mathfrak{z}^k}) + [0 \leqslant \tau_k(\mathfrak{z}) < i]\}$ l'est également, si l'on suppose que l'ensemble $A_{i,k}$ est fermé. On prouve ainsi par l'induction finie (suivant l'indice i) que pour chaque i naturel $A_{i,n}$ est fermé (donc de classe G_i). On en conclut que A_i est aussi fermé.

Supposons, d'autre part, que pour chaque $\xi < \lambda$ les ensembles A_ξ et $A_{\xi,n}$ soient de classe G_ξ. Comme $A_{\lambda,n} = \sum_{\xi<\lambda} A_{\xi,n}$, l'ensemble $A_{\lambda,n}$ est de classe G_λ. En posant $\lambda = \beta$, on voit facilement que $A_{\lambda+1,n}$ est de classe $G_{\lambda+1}$ (puisque cet ensemble est défini à l'aide d'une fonction propositionnelle de classe $G_{\lambda+1}$). En raisonnant comme auparavant, on prouve par l'induction finie que, pour chaque i, l'ensemble $A_{\lambda+i,n}$ est de classe $G_{\lambda+1}$, donc de classe $G_{\lambda+i}$. De même $A_{\lambda+i}$ est de classe $G_{\lambda+1}$, donc de classe $G_{\lambda+i}$.

On parvient ainsi à la conclusion que, quel que soit $\alpha < \Omega$, l'ensemble A_α est de classe G_α (d'ailleurs A_i est fermé, A_ω est un F_σ, $A_{\omega\cdot 2}$ est un $F_{\sigma\delta\sigma}$ etc.).

D'après un théorème élémentaire de la théorie des ensembles ordonnés, à chaque nombre $0 < \alpha < \Omega$ correspond un ensemble du type α composé exclusivement de nombres rationnels. Il existe, par conséquent, un nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ tel que $\tau(\mathfrak{z}) = \alpha$; ce nombre n'appartient donc qu'à des ensembles A_ξ avec $\xi > \alpha$. On voit ainsi que si l'on supprime dans l'ensemble des nombres irrationnels les nombres $\mathfrak{z}$ tels que $Z_\mathfrak{z}$ n'est pas bien ordonné, le reste est une somme des ensembles boreliens (différents) A_α, $\alpha < \Omega$.

XIII. Fonctions universelles[1]. Etant donnée une famille $\boldsymbol{F}$ d'ensembles, on appelle *fonction universelle relativement à $\boldsymbol{F}$* toute fonction $F(t)$ qui fait correspondre au paramètre t (parcourant un espace T) un ensemble de la famille $\boldsymbol{F}$ de façon que chaque ensemble-élément de $\boldsymbol{F}$ corresponde au moins à une valeur de t. En symboles:

$$\{X \varepsilon \boldsymbol{F}\} = \sum_t [X = F(t)].$$

Dans la suite, nous allons supposer que l'espace $\mathcal{X}$ (dont les éléments de $\boldsymbol{F}$ sont des sous-ensembles) est métrique séparable. Posons $T = \mathcal{N}$ (l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle 01)[2]. Si $\boldsymbol{F}$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, il existe évidemment une fonction universelle relative à $\boldsymbol{F}$ (puisque l'ensemble $\mathcal{N}$ est de la puissance $\mathfrak{c}$). On peut donc substituer à $\boldsymbol{F}$ la classe borelienne $\boldsymbol{F}_\alpha$ ou $\boldsymbol{G}_\alpha$. Or, nous allons démontrer[3] qu'*à chaque α correspond une fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ universelle relativement à la classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ et telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\,[x \varepsilon G_\alpha(\mathfrak{z})]$, situé dans le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, soit un $\boldsymbol{G}_\alpha$.*

Nous nous servirons des notations suivantes. Comme d'habitude, nous allons considérer le nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ comme une suite de nombres naturels $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$ (donnée par ex. par le développement de $\mathfrak{z}$ en fraction continue). L'espace $\mathcal{N}$ étant homéomorphe à $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (§ 24, V), on peut faire correspondre à chaque $\mathfrak{z}$ une suite de nombres

---

[1] Notion étudiée surtout par M. Lusin. Voir W. Sierpiński, Fund. Math. 14 (1929), p. 82.

[2] Au lieu d'admettre que le paramètre t parcourt l'intervalle 01 *tout entier* (comme on l'admet d'habitude) nous en avons restreint les valeurs aux nombres irrationnels, pour éviter certains inconvénients liés à la discontinuité de la fonction „n-ième chiffre du développement diadique de x"; si l'on considère le nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ comme une suite de nombres naturels, le n-ième terme de cette suite est une fonction continue de $\mathfrak{z}$ (cf. § 14, V).

On pourrait se servir aussi bien de l'ensemble non-dense de Cantor, qui est également une $\aleph_0$-ème puissance d'un ensemble.

[3] Le raisonnement qui va suivre est dû au fond à M. Lebesgue, op. cit., p. 209.

irrationnels $\mathfrak{z}_{(1)}, \mathfrak{z}_{(2)}, \ldots$ de façon que, pour n fixe, $\mathfrak{z}_{(n)}$ soit une fonction continue de $\mathfrak{z}$ et qu'en outre chaque suite de nombres irrationnels corresponde à une valeur de $\mathfrak{z}$ (on peut poser, par ex. $\mathfrak{z}_{(n)} = [\mathfrak{z}^{(2^{n-1})}, \ldots, \mathfrak{z}^{(2^{n-1}+k.2^n)}, \ldots]$).

Faisons correspondre à chaque nombre transfini limite λ $(< \Omega)$ une suite $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ convergente vers λ (l'existence d'une telle suite résulte de l'axiome du choix).

Désignons enfin par $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace (contenant l'ensemble vide).

Fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$. Nous posons: 1) $G_0(\mathfrak{z}) = \sum_n R_{\mathfrak{z}^n}$, 2) $G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \prod_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$ ou $\sum_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$, suivant que α est pair ou impair, 3) $G_\lambda(\mathfrak{z}) = \sum_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)})$, si λ est un nombre limite.

Il s'agit de montrer que: (i) l'ensemble $G_\alpha(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$, (ii) si X est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$, il existe un $\mathfrak{z} \varepsilon \mathcal{N}$ tel que $X = G_\alpha(\mathfrak{z})$, (iii) l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}\,[x \varepsilon G_\alpha(\mathfrak{z})]$ est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$.

ad (i). Procédons par induction. Pour $\alpha = 0$, l'ensemble $G_0(\mathfrak{z})$, comme une somme d'ensembles ouverts, est ouvert, quel que soit $\mathfrak{z}$. Si $G_\alpha(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ pour chaque $\mathfrak{z}$, $G_{\alpha+1}(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_{\alpha+1}$ comme produit ou somme d'une suite d'ensembles de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$. Enfin, si λ est un nombre limite et si pour chaque λ_n l'ensemble $G_{\lambda_n}(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_{\lambda_n}$, quel que soit $\mathfrak{z}$, l'ensemble $G_\lambda(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_\lambda$ comme une somme d'ensembles de classes $< \lambda$. La proposition (i) est ainsi établie.

ad (ii). Soit d'abord X un ensemble de classe $\boldsymbol{G}_0$, c. à d. un ensemble ouvert. Par définition de la base, X est de la forme $X = \sum_n R_{k_n}$. Soit $\mathfrak{z}$ un nombre irrationnel tel que $\mathfrak{z}^1 = k_1$, $\mathfrak{z}^2 = k_2, \ldots$ Il vient $G_0(\mathfrak{z}) = \sum_n R_{\mathfrak{z}^n} = \sum_n R_{k_n} = X$. La condition (ii) est donc réalisée pour $\alpha = 0$. Supposons à présent qu'elle soit réalisée pour α; nous l'établirons pour $\alpha + 1$. Soit donc X un ensemble de classe $\boldsymbol{G}_{\alpha+1}$. On a $X = \prod_n X_n$ ou $X = \sum_n X_n$ (suivant que α est pair ou impair), où X_n est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$. Par hypothèse, il existe une suite de nombres irrationnels $\{\mathfrak{z}_n\}$ tels que $X_n = \boldsymbol{G}_\alpha(\mathfrak{z}_n)$. Par définition de la fonction $\mathfrak{z}_{(n)}$ il existe une valeur de $\mathfrak{z}$ telle que l'on ait $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_{(n)}$, quel que soit n. Il vient, suivant que α est pair ou impair, $G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \prod\limits_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)}) = X$ ou bien $G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \sum\limits_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)}) = X$.

Supposons enfin que $\lambda = \lim \lambda_n$, et que pour chaque λ_n la proposition (ii) soit vraie. X étant un ensemble de classe $\boldsymbol{G}_\lambda$, on a $X = \sum\limits_n X_n$ où X_n est d'une classe $\boldsymbol{G}_{\alpha_n}$ avec $\alpha_n < \lambda$. La suite $\{\lambda_n\}$ étant convergente vers λ, il existe pour chaque n un k_n tel que $\alpha_n \leqslant \lambda_{k_n}$. Par conséquent X_n est de classe $\boldsymbol{G}_{\lambda_{k_n}}$. Il existe donc un nombre irrationnel $\mathfrak{z}_{k_n}$ tel que $X_n = G_{\lambda_{k_n}}(\mathfrak{z}_{k_n})$. Si i est un indice différent de tous les k_n, soit $\mathfrak{z}_i$ un nombre irrationnel tel que $G_{\lambda_i}(\mathfrak{z}_i) = 0$. Ainsi $X = \sum\limits_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_n)$. Soit, comme auparavant, $\mathfrak{z}$ un nombre irrationnel tel que $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_{(n)}$. Il vient $X = \sum\limits_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)}) = G_\lambda(\mathfrak{z})$.

ad (iii). Remarquons d'abord que l'ensemble $\underset{x,n}{E}(x \in R_n)$ est ouvert dans le produit $\mathcal{X} \times$ (l'ensemble des nombres naturels). Autrement dit, la fonction propositionnelle (de deux variables) $x \in R_n$ est de classe $\boldsymbol{G}_0$. La fonction $\mathfrak{z}^n$ étant, pour n fixe, continue, on en conclut en vertu de N° XI, 4, que la fonction propositionnelle $x \in R_{\mathfrak{z}^n}$ est aussi de classe $\boldsymbol{G}_0$. Il en est encore de même de la fonction propositionnelle $\sum\limits_n{}'(x \in R_{\mathfrak{z}^n})$, qui équivaut à $x \in \sum\limits_n R_{\mathfrak{z}^n}$ (voir § 1, V). La fonction propositionnelle $x \in G_0(\mathfrak{z})$ est par conséquent de classe $\boldsymbol{G}_0$ et l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_0(\mathfrak{z})]$ est ouvert. D'une façon analogue, si la fonction propositionnelle $x \in G_\alpha(\mathfrak{z})$ est de classe α, il en est de même de $x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$ pour n fixe, puisque $\mathfrak{z}_{(n)}$ est une fonction continue de $\mathfrak{z}$. La fonction propositionnelle $\prod\limits_n [x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})]$ est donc (pour α pair) de classe $G_{\alpha+1}$ et comme $\prod\limits_n [x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})] \equiv \{x \in \prod\limits_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})\} \equiv \{x \in G_{\alpha+1}(\mathfrak{z})\}$, on en conclut que la condition (iii) est vérifiée pour $\alpha+1$. Enfin, si pour chaque n la fonction propositionnelle $x \in G_{\lambda_n}(\mathfrak{z})$ est de classe $\boldsymbol{G}_{\lambda_n}$, la fonction $\sum\limits_n [x \in G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)})]$ est de classe $\boldsymbol{G}_\lambda$. On en conclut comme auparavant que $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_\lambda(\mathfrak{z})]$ est de classe $\boldsymbol{G}_\lambda$.

Un théorème analogue concerne les classes $\boldsymbol{F}_\alpha$: il existe pour chaque α une fonction universelle $F_\alpha(\mathfrak{z})$ telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in F_\alpha(\mathfrak{z})]$ est de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$. Notamment: $F_\alpha(\mathfrak{z}) = \mathcal{X} - G_\alpha(\mathfrak{z})$.

XIV. Existence des ensembles de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ qui ne sont pas de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$. Nous en établirons l'existence dans l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels [1]). Posons $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ et considérons l'ensemble

$$Z_\alpha = \underset{\mathfrak{z}}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z})],$$

qui est la projection sur l'axe $\mathcal{N}$ de la partie de l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z}')]$ située sur la *diagonale* de l'espace $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, c. à d. sur l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}(\mathfrak{z} = \mathfrak{z}')$ (cf. p. 144). L'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z}')]$ étant de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$, l'ensemble projeté est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ relativement à la diagonale et, la projection de la diagonale sur l'axe étant une homéomorphie, l'ensemble Z_α est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ (dans $\mathcal{N}$).

Reste à prouver que Z_α n'est pas de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$. Si l'on suppose le contraire, l'ensemble $\mathcal{N} - Z_\alpha$ est un $\boldsymbol{G}_\alpha$, de sorte que, la fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ étant universelle, il existerait un $\mathfrak{z}_0$ tel que $\mathcal{N} - Z_\alpha = G_\alpha(\mathfrak{z}_0)$. Mais cela implique une contradiction, car on a par définition de Z_α l'équivalence $\{\mathfrak{z}_0 \in G_\alpha(\mathfrak{z}_0)\} \equiv \{\mathfrak{z}_0 \in Z_\alpha\}$, tandis que par définition de $\mathfrak{z}_0$: $\{\mathfrak{z}_0 \in G_\alpha(\mathfrak{z}_0)\} \equiv \{\mathfrak{z}_0 \in (\mathcal{N} - Z_\alpha)\}$.

Remarque. La deuxième partie de ce raisonnement est, en réalité, une démonstration du théorème suivant de la Théorie générale des ensembles.

Théorème de la diagonale [2]). Etant donnée une fonction $F(t)$ qui fait correspondre à chaque élément d'un ensemble T un sous-ensemble de T, l'ensemble $\underset{t}{E}[t \in T - F(t)]$ n'est pas une valeur de cette fonction.

XV. Problème d'effectivité [3]). Le démonstration que nous avons donnée au N° XIV de l'existence d'un ensemble de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$ qui n'est pas de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ *n'est pas effective*, c. à d. que nous n'avons pas *défini* une fonction qui fasse correspondre à chaque α un ensemble jouissant de la propriété en

[1]) Pour $\alpha \leqslant 3$ on peut l'établir d'une façon plus directe: voir R. Baire, *Sur la représentation des fonctions discontinues*, Acta math. 30 (1905) et 32 (1909), ainsi que N. Lusin *Ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 97, exemple dû à M-lle Keldych.

[2]) Ce théorème remonte à G. Cantor: cf. sa démonstration de l'inégalité $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$.

[3]) Voir ma note *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire*, C. R. Paris, t. 176 (1923), p. 229. Cf. aussi W. Sierpiński, *Un exemple effectif d'un ensemble mesurable (B) de classe α*, Fund. Math. 6 (1924), p. 39.

question. En analysant le raisonnement du N⁰ XIII, on voit que l'absence de l'effectivité provient du fait que nous n'avons pas défini une fonction qui fasse correspondre à chaque nombre limite λ une suite convergente de nombres $<\lambda$; nous n'en avons, en effet, qu'affirmé *l'existence*, sans déterminer aucune suite individuelle de ce genre. Une telle définition n'est pas d'ailleurs connue.

On voit ainsi que pour résoudre effectivement le problème de l'existence des ensembles qui sont des G_α sans être des F_α, on aura à changer la condition 3) de la définition de $G_\alpha(\mathfrak{z})$. Nous nous servirons à ce but de la fonction $\tau(\mathfrak{z})$, définie au N⁰ XII, 3, qui jouit de deux propriétés importantes: 1⁰ elle fait correspondre à chaque nombre $\mathfrak{z}$ un nombre transfini (ou -1) de façon à épuiser tous les nombres $\alpha < \Omega$, 2⁰ la fonction propositionnelle $\varphi_\alpha(\mathfrak{z}) \equiv \{0 < \tau(\mathfrak{z}) < \alpha\}$ est de classe G_α.

Or, admettons que la fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ soit définie par les conditions 1), 2) et la suivante, qui remplacera la condition 3):

3′) $$\{x \varepsilon G_\lambda(\mathfrak{z})\} \equiv \sum_n \sum_{\xi<\lambda} [0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi] \cdot [x \varepsilon G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})].$$

Il s'agit d'établir les conditions (i)—(iii) du N⁰ XIII pour $\alpha = \lambda$, ces conditions étant supposées vérifiées pour $\xi < \lambda$.

ad (i). Pour chaque $\mathfrak{z}$ l'ensemble $G_\lambda(\mathfrak{z})$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classes G_ξ où $\xi < \lambda$. Donc $G_\lambda(\mathfrak{z})$ est de classe G_λ.

ad (ii). Tout ensemble X de classe G_λ est de la forme $X = \sum\limits_n X_n$, où X_n est de classe G_{ξ_n} et $0 < \xi_n < \lambda$. A chaque ξ_n correspond un nombre irrationnel $\mathfrak{y}_n$ tel que $\tau(\mathfrak{y}_n) = \xi_n$. En outre, la fonction $G_{\xi_n}(\mathfrak{z})$ étant universelle, il existe un $\mathfrak{w}_n$ tel que $X_n = G_{\xi_n}(\mathfrak{w}_n)$. Or, il existe par définition de la fonction $\mathfrak{z}_{(n)}$ une valeur de $\mathfrak{z}$ telle que $\mathfrak{z}_{(2n)} = \mathfrak{y}_n$ et $\mathfrak{z}_{(2n+1)} = \mathfrak{w}_n$, quel que soit n. Il vient ainsi $X_n = G_{\xi_n}(\mathfrak{z}_{(2n+1)})$ et $0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi_n$, d'où $X = G_\lambda(\mathfrak{z})$.

ad (iii). Il s'agit de prouver que la fonction propositionnelle de deux variables $x \varepsilon G_\lambda(\mathfrak{z})$ est de classe G_λ. L'équivalence $[0 < \tau(\mathfrak{z}) = \xi] \equiv \varphi'_\xi(\mathfrak{z}) \cdot \varphi_{\xi+1}(\mathfrak{z})$ montre que la fonction propositionnelle $[0 < \tau(\mathfrak{z}) = \xi]$ est de classe $G_{\xi+1}$; il en est de même de $[0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi]$, puisque $\mathfrak{z}_{(2n)}$ est une fonction continue de $\mathfrak{z}$ (cf. la règle 4 du N⁰ XI). La fonction propositionnelle $x \varepsilon G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})$ est pour la même raison de classe G_ξ si $\xi < \lambda$; par conséquent, le produit logique de ces deux fonctions, c. à d. la fonction $[0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi] \cdot [x \varepsilon G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})]$ est de classe $G_{\xi+1}$. La fonction $x \varepsilon G_\lambda(\mathfrak{z})$, s'obtenant de celle-ci par l'addition dénombrable $\sum\limits_n \sum\limits_{\xi<\lambda}$, est donc de classe G_λ.

Ainsi le problème de l'existence, pour chaque α, d'une fonction universelle relativement à la classe G_α se trouve résolu d'une façon effective. La définition de l'ensemble Z_α, telle qu'elle a été énoncée au N⁰ XIV, donne donc une solution effective du problème de l'existence dans l'espace des nombres irrationnels d'un ensemble qui est un G_α sans être un F_α.

§ 27. Fonctions mesurables B.

I. Classification. Une fonction $f(x)$ qui transforme un espace métrique $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un espace métrique $\mathcal{Y}$ est dite *fonction mesurable B de classe* α (ou, simplement, fonction de classe α), lorsque, quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un ensemble borelien de classe α multiplicative [1]).

Les ensembles fermés étant de classe 0 multiplicative, les fonctions continues coïncident, conformément à cette définition, avec les fonctions de classe 0.

Pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit de classe α, *il faut et il suffit que A soit un ensemble ambigu de classe* α.

En effet, la fonction caractéristique n'admettant que deux valeurs *0* et *1*, considérons comme l'espace $\mathcal{Y}$ l'ensemble composé de ces deux éléments. Chacun d'eux forme un ensemble fermé. Si l'on suppose que la fonction caractéristique $f(x)$ est de classe α, les ensembles $A = f^{-1}(1)$ et $\mathcal{X} - A = f^{-1}(0)$ sont de classe α multiplicative; A est donc un ensemble ambigu de classe α.

Inversement, l'ensemble A étant ambigu de classe α, on vérifie facilement que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe α multiplicative, quel que soit l'ensemble fermé F (l'espace $\mathcal{Y}$ ne contient en effet que 4 ensembles fermés).

On en conclut qu'*il existe, dans chaque classe* α, *des fonctions réelles de variable réelle qui n'appartiennent pas aux classes inférieures* et qu'*il existe des fonctions non mesurables B*. Cette dernière conclusion résulte aussi du fait que, $\mathcal{Y}$ *étant séparable, la famille des fonctions mesurables B est de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, la suite $R_1, R_2, \ldots$ formant la base de l'espace $\mathcal{Y}$, toute fonction f qui transforme $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ est complètement caractérisée par la suite d'ensembles $f^{-1}(R_1), f^{-1}(R_2), \ldots$ Car, chaque point y de $\mathcal{Y}$ étant de la forme $y = R_{k_1} \cdot R_{k_2} \cdot \ldots$, on a

$$\{y = f(x)\} \equiv \{x \varepsilon f^{-1}(y)\} \equiv \{x \varepsilon \prod_n f^{-1}(R_{k_n})\}.$$

Or la fonction f étant supposée mesurable B, les ensembles $f^{-1}(R_n)$ sont boreliens et, la famille de ces derniers étant de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, la puissance de la famille des fonctions mesurables B est $\leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

---

[1]) Voir H. Lebesgue, op. cit., Journ. de math. 1905, p. 166.

II. Equivalences. En tenant compte de l'identité (p. 12, N⁰II, 8) $f^{-1}(\mathcal{Y}-Y)=\mathcal{X}-f^{-1}(Y)$, on pouvait définir les fonctions de classe α comme les fonctions pour lesquelles l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit l'ensemble *ouvert* G.

De plus, si l'espace $\mathcal{Y}$ est *séparable* et si la suite $R_1, R_2, \dots$ forme sa base, il suffit, pour que la fonction f soit de classe α, que *chacun des ensembles* $f^{-1}(R_n)$ *soit de classe* α *additive*. Car on a $G=R_{k_1}+R_{k_2}+\dots$, d'où $f^{-1}(G)=f^{-1}(R_{k_1})+f^{-1}(R_{k_2})+\dots$

Il en résulte aussi que *les ensembles* $f^{-1}(R_n)$, $n=1,2,\dots$, *étant boreliens, la fonction* f *est mesurable* B*;* notamment de classe α, où $\alpha>\alpha_n$ et où $f^{-1}(R_n)$ est de classe α_n.

Dans le cas particulier où $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des *nombres réels*, les fonctions de classe α peuvent être définies par la condition que les ensembles $\underset{x}{E}\{a<f(x)<b\}$ soient de classe α additive, quels que soient a et b (d'ailleurs on peut les supposer rationnels).

L'espace $\mathcal{Y}$ *étant séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f(x)$ *soit de classe* α *est qu'il existe pour chaque* $\varepsilon>0$ *une décomposition de l'espace:* $\mathcal{X}=Z_1+Z_2+\dots$ *en ensembles de classe* α *additive tels que* $\delta[f(Z_n)]<\varepsilon$, *quel que soit* n [1].

En effet, l'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable, il existe (voir § 17, II) une suite $S_1, S_2, \dots$ de sphères ouvertes telles que $\mathcal{Y}=S_1+S_2+\dots$ et $\delta(S_n)<\varepsilon$. Il suffit donc de poser $Z_n=f^{-1}(S_n)$.

Supposons d'autre part que la condition du théorème est vérifiée. Il vient $\mathcal{X}=Z_1^k+Z_2^k+\dots$ et $\delta[f(Z_n^k)]<1/k$ où Z_n^k est de classe α additive. Il s'agit de prouver que, G étant un ensemble ouvert (dans $\mathcal{Y}$), $f^{-1}(G)$ est de classe α additive. Nous allons démontrer, en effet, que $f^{-1}(G)$ est la somme des ensembles Z_n^k tels que $f(Z_n^k)\subset G$.

Or, d'une part, les conditions $x\,\varepsilon\,Z_n^k$ et $f(Z_n^k)\subset G$ entraînent $f(x)\,\varepsilon\,G$, d'où $x\,\varepsilon\,f^{-1}(G)$. D'autre part, la condition $f(x)\,\varepsilon\,G$, qui équivaut à $x\,\varepsilon\,f^{-1}(G)$, implique que, pour k suffisamment grand, l'inégalité $|y-f(x)|<1/k$ entraîne $y\,\varepsilon\,G$ (puisque G est ouvert). Soit n un indice tel que $x\,\varepsilon\,Z_n^k$. Il résulte donc de l'inégalité $\delta[f(Z_n^k)]<1/k$ que $f(Z_n^k)\subset G$.

---

[1]) Voir H. Lebesgue, op. cit., p. 172 (domaine réel). Pour le cas général, voir B. Gagaeff, *Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B*, Fund. Math. 18 (1932), p. 183; cf. aussi P. Veress, *Ueber kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen*, Fund. Math. 7 (1925), p. 244, où l'on trouve plusieurs applications du théorème considéré.

III. Superposition des fonctions. *$f(x)$ étant une fonction de classe α et Y un ensemble de classe β, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est de classe* $\alpha+\beta$ (multiplicative ou additive suivant la classe de Y).

Cela résulte par l'induction transfinie (par rapport à β) des identités:

$$f^{-1}\Big(\sum_n Y_n\Big)=\sum_n f^{-1}(Y_n),\qquad f^{-1}\Big(\prod_n Y_n\Big)=\prod_n f^{-1}(Y_n)$$

et du fait que $\beta_n<\beta$ entraîne $\alpha+\beta_n<\alpha+\beta$.

En particulier, si f est une fonction *continue*, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est de classe β.

Si la fonction $y=f(x)$ est de classe α et la fonction $z=g(y)$ de classe β, la fonction $h(x)=gf(x)$ est de classe $\alpha+\beta$.

On a en effet: $\{h(x)\,\varepsilon\,F\}\equiv\{g[f(x)]\,\varepsilon\,F\}\equiv\{f(x)\,\varepsilon\,g^{-1}(F)\}$, d'où $h^{-1}(F)=\underset{x}{E}[f(x)\,\varepsilon\,g^{-1}(F)]=f^{-1}[g^{-1}(F)]$. L'ensemble F étant fermé, $g^{-1}(F)$ est de classe β multiplicative, de sorte que $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ est de classe $\alpha+\beta$ selon le théorème précédent.

En particulier, si la fonction g est *continue*, les fonctions $gf(x)$ et $fg(x)$ sont de classe α.

IV. Fonctions partielles. 1. *Etant donnée une suite d'ensembles $\{E_n\}$ de classe α additive tels que $\mathcal{X}=E_1+E_2+\dots$ et que, f_n désignant la fonction partielle $f|E_n$, f_n est de classe α sur E_n, la fonction f est de classe α (sur l'espace entier).*

Soit, en effet, G un ensemble ouvert $\subset\mathcal{Y}$. Il vient (§ 3, II, 15): $f^{-1}(G)=f_1^{-1}(G)+f_2^{-1}(G)+\dots$ et, chacun des ensembles $f_n^{-1}(G)$ étant par hypothèse de classe α additive relativement à l'ensemble E_n, qui est lui-même de classe α additive, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est encore de classe α additive comme une somme d'ensembles de cette classe.

2. *M et N étant deux ensembles de classe α multiplicative, tels que $\mathcal{X}=M+N$ et que les fonctions partielles $f|M$ et $f|N$ sont de classe α, la fonction f est encore de classe α.*

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente: on n'a qu'à remplacer l'ensemble ouvert G par un ensemble fermé F et la somme infinie par une somme de deux termes.

3. *f étant de classe α, $f|E$ l'est également, quel que soit E.*
C'est une conséquence immédiate de § 3, II, 14.

V. Fonctions de plusieurs variables. Dans le cas où la variable indépendante parcourt un *produit cartésien* de deux espaces $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, la fonction $f(x, y)$ est dite fonction de deux variables.

Evidemment une fonction $f(x)$ d'une seule variable peut être toujours considérée comme une fonction $g(x, y)$ de deux variables, en posant $g(x, y) = f(x)$.

1. *Si $f(x)$ est de classe α et $g(x, y) = f(x)$, $g(x, y)$ est de classe α* par rapport à la variable (x, y).

En effet, x considéré comme fonction (l'abscisse) du point (x, y), en est une fonction continue (cf. p. 79). D'après le théorème sur la superposition des fonctions (N⁰ III), $f(x)$ en est une fonction de classe α.

2. *Si la fonction $f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et de classe α relativement à la variable y, elle est de classe* $\alpha + 1$ relativement à la variable (x, y)[1]. L'espace $\mathcal{X}$ est supposé séparable.

Nous allons montrer au préalable que, $r_1, r_2, \dots$ étant une suite de points dense dans $\mathcal{X}$ et $g(x)$ une fonction continue, la condition nécessaire et suffisante pour que le point $g(x)$ appartienne à l'ensemble fermé F, est qu'à chaque n corresponde un k tel que $|x - r_k| < 1/n$ et $g(r_k) \varepsilon S_n$, où S_n désigne la sphère ouverte généralisée de centre F et de rayon $1/n$. En symboles logiques:

$$\text{(i)} \qquad \{g(x) \varepsilon F\} \equiv \prod_n \sum_k [|x - r_k| < 1/n] \cdot [g(r_k) \varepsilon S_n].$$

En effet, $r_{k_1}, r_{k_2}, \dots$ étant une suite convergente vers x, on a $\lim\limits_{m=\infty} g(r_{k_m}) = g(x)$, donc pour m suffisamment grand: $|r_{k_m} - x| < 1/n$ et $|g(r_{k_m}) - g(x)| < 1/n$. Or, si l'on suppose que $g(x) \varepsilon F$, il en résulte que $g(r_{k_m}) \varepsilon S_n$ et le membre droit de l'équivalence est réalisé. Inversement, si l'on suppose qu'à chaque n correspond un indice k_n tel que $|x - r_{k_n}| < 1/n$ et que $g(r_{k_n}) \varepsilon S_n$, d'où

[1] Cf. H. Lebesgue, l. c., p. 201 et ma note *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*, Fund. Math. 17 (1931), p. 278. Des exemples élémentaires montrent qu'une fonction de deux variables peut être *discontinue*, bien qu'elle soit continue relativement à chacune de deux variables prises séparément.

$\rho[g(r_{k_n}), F] < 1/n$, il vient $\lim\limits_{n=\infty} r_{k_n} = x$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} g(r_{k_n}) = g(x)$, et comme $\lim\limits_{n=\infty} \rho[g(r_{k_n}), F] = 0$, il en résulte que $\rho[g(x), F] = 0$, c. à d. que $g(x) \varepsilon F$.

Ceci établi, substituons dans la formule (i) la fonction $f(x, y)$ à $g(x)$. Il en ressort:

$$\{f(x, y) \varepsilon F\} \equiv \prod_n \sum_k [|x - r_k| < 1/n] \cdot [f(r_k, y) \varepsilon S_n],$$

d'où

$$\text{(ii)} \qquad f^{-1}(F) = \prod_n \sum_k \Big\{\Big[\Big(\underset{x}{E}\, |x - r_k| < 1/n\Big) \times \mathcal{Y}\Big] \cdot \Big[\mathcal{X} \times \underset{y}{E}\, f(r_k, y) \varepsilon S_n\Big]\Big\}.$$

Or, la fonction $f(r_k, y)$ étant de classe α par rapport à la variable y, l'ensemble $\underset{y}{E}\,[f(r_k, y) \varepsilon S_n]$ est de classe α additive (pour k et n fixes). L'ensemble $\underset{x}{E}\,[|x - r_k| < 1/n]$ est évidemment une sphère ouverte. Il en résulte, par la méthode d'évaluation de la classe d'une fonction propositionnelle (§ 26, XI), que la fonction propositionnelle de deux variables $\{f(x, y) \varepsilon F\}$ et l'ensemble $f^{-1}(F)$ sont de classe $\alpha + 1$ multiplicative.

En particulier, si la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à chacune des variables séparément, elle est une fonction de I-re classe. On montre par induction qu'une fonction de n variables qui est continue par rapport à chacune d'elles est de classe $n - 1$.

Remarques. 1) L'hypothèse de la *séparabilité* peut être supprimée, si l'on se propose de démontrer que toute fonction continue par rapport à chacune de deux variables est de I-re classe[1]. On peut se servir, en effet, au lieu de l'équivalence (i) de la suivante:

$$\{g(x) \varepsilon F\} \equiv \prod_n \sum_{x'} [|x - x'| < 1/n] \cdot [g(x') \varepsilon S_n],$$

que l'on déduit d'une façon tout à fait analogue.

On a alors à remplacer dans la formule (ii): $\sum\limits_k$ par $\sum\limits_{x'}$ et r_k par x'. Or, l'ensemble entre crochets $\{\ \}$ étant ouvert (puisque $\alpha = 0$ par hypothèse), la sommation (indénombrable) $\sum\limits_{x'}$ conduit encore à un ensemble ouvert et, finalement, $f^{-1}(F)$ est un G_δ.

[1] Il serait intéressant de reconnaître si cette hypothèse peut être supprimée dans l'énoncé 2 et dans plusieurs autres énoncés de ce §.

2) *Une fonction $f(x, y)$ de I-re classe relativement à chacune des variables peut être non mesurable B* (même non mesurable au sens de Lebesgue)[1]).

Soit, en effet, sur le plan euclidien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, A un ensemble non borelien situé sur une circonférence (ou encore: un ensemble non mesurable superficiellement au sens de Lebesgue qui n'a que tout au plus deux points communs avec chaque droite parallèle à un des axes). La fonction caractéristique de A est non mesurable B (voir N⁰ I), tandis que par rapport à chacune des variables elle est de I-re classe, puisqu'elle s'annule partout, sauf en deux points (au plus).

VI. Fonctions complexes. Chaque couple de fonctions $x = f(t)$, $y = g(t)$ définit une fonction „complexe" $z = h(t)$, où z désigne le point (x, y) du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et t parcourt un espace T.

1. *Les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant séparables, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $z = h(t)$ soit de classe α est que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ (les „coordonnées" du point z) soient de classe α.*

N é c e s s i t é. G étant un sous-ensemble ouvert arbitraire de $\mathcal{X}$, $G \times \mathcal{Y}$ est ouvert et, la fonction $h(t)$ étant de classe α, l'ensemble $\underset{t}{E}\,[h(t) \in G \times \mathcal{Y}]$ est de classe α additive; comme il coïncide avec $f^{-1}(G)$ en vertu de l'équivalence $\{f(t) \in G\} \equiv \{h(t) \in G \times \mathcal{Y}\}$, la fonction $f(t)$ est de classe α.

S u f f i s a n c e. Soient $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$ et $S_1, S_2, \ldots$ la base de $\mathcal{Y}$. La double suite $R_m \times S_n$ constitue alors la base de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (p. 141). Il suffit donc (cf. N⁰ II) de montrer que l'ensemble $h^{-1}(R_m \times S_n)$ est de classe α additive. Or, l'équivalence évidente $\{h(t) \in R_m \times S_n\} \equiv \{f(t) \in R_m\} \cdot \{g(t) \in S_n\}$ implique que $h^{-1}(R_m \times S_n) = \underset{t}{E}\,\{f(t) \in R_m\} \cdot \{g(t) \in S_n\} = \underset{t}{E}\,\{f(t) \in R_m\} \cdot \underset{t}{E}\,\{g(t) \in S_n\} = f^{-1}(R_m) \cdot g^{-1}(S_n)$ et, les fonctions f et g étant par hypothèse de classe α, les ensembles $f^{-1}(R_m)$ et $g^{-1}(S_n)$ sont de classe α additive; leur partie commune $h^{-1}(R_m \times S_n)$ l'est donc également.

Les considérations précédentes s'étendent au *produit dénombrable.* Soient notamment $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ une suite d'espaces séparables et $\mathfrak{z}(t)$ une fonction dont les valeurs appartiennent au produit dénombrable $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ La fonction $\mathfrak{z}(t)$ représente donc

---

[1]) W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement,* Fund. Math. 1 (1920), p. 114 et *Funkcje przedstawialne analitycznie,* Lwów 1925, p. 68.

une suite de fonctions: $\mathfrak{z}_1(t), \mathfrak{z}_2(t), \ldots$ *Pour que la fonction $\mathfrak{z}(t)$ soit de classe α, il faut et il suffit que chacune des fonctions $\mathfrak{z}_i(t)$ le soit.*

La n é c e s s i t é de cette condition se démontre comme auparavant, car on a l'équivalence $\{\mathfrak{z}_1(t) \in G\} \equiv \{\mathfrak{z}(t) \in (G \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \ldots)\}$.

Pour en prouver la s u f f i s a n c e, désignons par R_m^i, où $m = 1, 2, \ldots$, la base de l'espace $\mathcal{X}_i$. Les ensembles de la forme $R_{k_1}^1 \times R_{k_2}^2 \times \ldots \times R_{k_n}^n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \mathcal{X}_{n+2} \times \ldots$ constituent alors la base de l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ (p. 148). Il vient: $\mathfrak{z}^{-1}(R_{k_1}^1 \times \ldots \times R_{k_n}^n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \mathcal{X}_{n+2} \times \ldots) = \underset{t}{E}\,\{[\mathfrak{z}_1(t) \in R_{k_1}^1] \cdot \ldots \cdot [\mathfrak{z}_n(t) \in R_{k_n}^n] \cdot [\mathfrak{z}_{n+1}(t) \in \mathcal{X}_{n+1}] \cdot [\mathfrak{z}_{n+2}(t) \in \mathcal{X}_{n+2}] \cdot \ldots\} = \mathfrak{z}_1^{-1}(R_{k_1}^1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{z}_n^{-1}(R_{k_n}^n) \cdot T \cdot T \cdot \ldots$

Les n premiers facteurs de ce dernier produit étant des ensembles de classe α additive, l'ensemble total l'est aussi, c. q. f. d.

En rapprochant les théorèmes précédents du théorème sur la superposition des fonctions (N⁰ III), on parvient à l'énoncé suivant sur les fonctions c o m p o s é e s:

2. *Si chacune des fonctions $y_i = f_i(x_i)$ est de classe α et la fonction $z = g(y_1, y_2, \ldots)$ est de classe β, la fonction $g[f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots]$ est de classe $\alpha + \beta$* (les espaces $\mathcal{Y}_i$ étant supposés séparables).

Si l'espace séparable $\mathcal{Y}_i$ s'obtient de l'espace $\mathcal{X}_i$ par une transformation de classe α, l'espace $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$ s'obtient de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ également par une transformation de classe α. Notamment, si $f_i(x)$ est la fonction de classe α transformant $\mathcal{X}_i$ en $\mathcal{Y}_i$ et $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ est un point variable de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$, la fonction $\mathfrak{y}(\mathfrak{z}) = [f_1(\mathfrak{z}^1), f_2(\mathfrak{z}^2), \ldots]$ est la fonction demandée.

Car les fonctions $\mathfrak{z}^i$ étant continues, les coordonnées $f_i(\mathfrak{z}^i)$ du point variable $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})$ sont des fonctions de $\mathfrak{z}$ de classe α et d'après 1 la fonction $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})$ l'est aussi. En outre, $g[\mathfrak{y}(\mathfrak{z})]$ est de classe $\alpha + \beta$.

VII. Image de l'équation $y = f(x)$. Soit $\mathcal{Y}$ un espace séparable.

1. *Si $f(x)$ est de classe α, l'ensemble $I = \underset{}{E}\,[y = f(x)]$ est de classe α multiplicative.*

2. *Si, en outre, A est de classe β dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, la projection P de IA sur l'axe $\mathcal{X}$ est de classe $\alpha + \beta$* (multiplicative ou additive suivant la classe de A).

ad 1. Considérons la fonction $\varphi(x, y) = |y - f(x)|$. On a évidemment $\underset{xy}{E}\,[y = f(x)] = \underset{xy}{E}\,[\varphi(x, y) = 0]$. Or, la distance $|y - y'|$

étant une fonction continue des variables y et y' (p. 89), $\varphi(x, y)$ est de classe α d'après N° VI, 2 (en y substituant $|y_1 - y_2|$ à $g(y_1, y_2)$). L'ensemble $\underset{xy}{E}[\varphi(x, y) = 0]$, comme identique à $\varphi^{-1}(F)$ où F est composé du nombre 0, est par conséquent de classe α multiplicative [1]).

En particulier, si f est une fonction continue, son image est fermée (voir d'ailleurs § 23, XI); si f est de I-re classe, son image est un G_δ. Cependant les énoncés inverses sont en défaut.

ad 2. La fonction $h(x) = [x, f(x)]$ étant de classe α (N° VI, 1), l'ensemble $P = h^{-1}(A)$ est de classe $\alpha + \beta$ (N° III).

VIII. Limite de fonctions [2]). Considérons au préalable un ensemble fermé F et une suite de points tels que $\lim y_n = y$. Soit S_n la sphère ouverte de centre F et de rayon $1/n$ (voir p. 86). Nous allons démontrer que pour que $y \varepsilon F$, il faut et il suffit qu'à chaque n corresponde un k tel qu'on ait $y_{n+k} \varepsilon S_n$; en symboles logiques:

$$\text{(i)} \qquad \{y \varepsilon F\} \equiv \prod_n \sum_k (y_{n+k} \varepsilon S_n).$$

En effet, d'une part, si $y \varepsilon F$, tous les points y_m à indice suffisamment grand satisfont à l'égalité $|y_m - y| < 1/n$, donc à la formule $y_m \varepsilon S_n$; on peut par conséquent admettre comme k un indice arbitraire suffisamment grand. D'autre part, si y *non*-εF, il existe en vertu de la formule $F = \prod_n \bar{S}_n$ un m tel que y *non*-$\varepsilon \bar{S}_m$. L'égalité $y = \lim y_n$ implique alors qu'à partir d'un indice $n > m$ tous les points y_{n+k} sont situés en dehors de $\bar{S}_m$, donc en dehors de S_n, ce qui prouve que le membre droit de (i) n'est pas vérifié.

1. *La limite d'une suite convergente de fonctions de classe α est de classe $\alpha + 1$.*

---

1) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 269. Pour le cas d'une fonction réelle, voir W. Sierpiński, *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 2 (1921), p. 78. Pour le cas général j'ai donné (dans ma note citée de Fund. Math. 17, p. 277) une autre démonstration basée sur la formule suivante „de la séparation des variables"

$$(y \neq y') \equiv \sum_n (y \varepsilon \mathcal{Y} - R_n)(y' \varepsilon R_n),$$

où $R_1, R_2, \ldots$ est la base de l'espace.

2) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 267.

Posons $f(x) = \lim f_n(x)$. Il vient en vertu de (i):

$$\{f(x) \varepsilon F\} \equiv \prod_n \sum_k \{f_{n+k}(x) \varepsilon S_n\},$$

d'où

$$\text{(ii)} \qquad f^{-1}(F) = \underset{x}{E}[f(x) \varepsilon F] = \prod_n \sum_k \underset{x}{E}[f_{n+k}(x) \varepsilon S_n] = \prod_n \sum_k f_{n+k}^{-1}(S_n).$$

Or, les fonctions $f_n(x)$ étant supposées de classe α, l'ensemble $f_{n+k}^{-1}(S_n)$ est de classe α additive et, par conséquent, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe $\alpha + 1$ multiplicative, c. q. f. d.

Ainsi, en particulier, la limite d'une suite de fonctions continues est de I-re classe. La limite d'une suite de fonctions de classes finies est de classe $\omega + 1$.

2. *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe α est de classe α.*

En effet, la convergence étant uniforme, il existe une suite d'entiers (croissants) m_n telle que l'on a $|f(x) - f_{m_n+k}(x)| < 1/n$ pour chaque x et chaque $k \geqslant 0$. Nous en déduirons l'équivalence

$$\{f(x) \varepsilon F\} \equiv \prod_n \prod_k \{f_{m_n+k}(x) \varepsilon \bar{S}_n\}.$$

Posons, pour abréger, $y = f(x)$ et $y_n = f_n(x)$. Or, si l'on suppose que $y \varepsilon F$, on a $y_{m_n+k} \varepsilon \bar{S}_n$ pour chaque n et k, puisque $|y - y_{m_n+k}| < 1/n$. Inversement, si l'on suppose que le membre droit de l'équivalence est satisfait, on a $y_{m_n} \varepsilon \bar{S}_n$ pour chaque n, d'où $\rho(y_{m_n}, F) \leqslant 1/n$ et, $\rho(y, F)$ étant une fonction continue de l'argument y (§ 15, IV, (5)), l'égalité $y = \lim\limits_{n=\infty} y_{m_n}$ implique que $\rho(y, F) = 0$, donc que $y \varepsilon F$.

Ceci établi, il vient $f^{-1}(F) = \prod_n \prod_k f_{m_n+k}^{-1}(\bar{S}_n)$ et, l'ensemble $f_{m_n+k}^{-1}(\bar{S}_n)$ étant de classe α multiplicative, il en est de même de l'ensemble $f^{-1}(F)$. La fonction f est donc de classe α.

En particulier, la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue. La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classes finies (croissantes) est de classe ω.

Remarque. La convergence uniforme n'est nullement une condition nécessaire pour que la fonction $f(x) = \lim f_n(x)$ soit de classe α. En voici une condition nécessaire et suffisante (l'espace $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable): *pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe un indice n aussi grand qu'on le veut et tel que l'ensemble* $\underset{x}{E}\{|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}$ *est de classe α additive*[1]).

Cette condition est nécessaire, car la fonction $\varphi_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ est selon N° VI, 2 de classe α, comme la superposition d'une fonction continue (de la distance, voir § 15, VI) et de deux fonctions de classe α.

Elle est aussi suffisante. En effet, elle implique (pour ε fixe) l'existence d'une suite d'entiers croissants $k_1 < k_2 < \dots$ tels que les ensembles $E_n = \underset{x}{E}\{|f(x) - f_{k_n}(x)| < \varepsilon\}$ sont de classe α additive. Or, la suite $f_n(x)$ étant convergente, il vient $\mathcal{X} = E_1 + E_2 + \dots$ et, chacune des fonctions f_{k_n} étant de classe α, on a (N° II): $\mathcal{X} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Z_i^n = \sum\limits_{n,i=1}^{\infty} E_n \cdot Z_i^n$ où $\delta[f_{k_n}(Z_i^n)] < \varepsilon$ et Z_i^n est de classe α additive. Les ensembles $E_n \cdot Z_i^n$ étant de classe α additive, il suffit (en vertu du même théorème du N° II) de montrer que $\delta[f(E_n \cdot Z_i^n)] \leqslant 3\varepsilon$.

Soient donc x_1 et x_2 deux points de $E_n \cdot Z_i^n$. Il vient

$$|f(x_1) - f_{k_n}(x_1)| < \varepsilon, \quad |f(x_2) - f_{k_n}(x_2)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_{k_n}(x_1) - f_{k_n}(x_2)| < \varepsilon,$$

d'où $|f(x_1) - f(x_2)| < 3\varepsilon$, c. q. f. d.

3. *$\mathcal{Y}$ étant séparable, chaque fonction $f(x)$ de classe $\alpha > 0$ est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions $f_n(x)$ de classe α telles que tous les ensembles $f_n(\mathcal{X})$ sont isolés*[2]).

L'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un ensemble isolé I tel que chaque point de cet espace est situé à distance $< \varepsilon$ d'un point de I (voir p. 91, remarque 1). Soit: $I = [y_1, y_2, \dots]$ une suite (finie ou infinie) composée d'éléments distincts. Posons

$$A_k = \underset{x}{E}\{|f(x) - y_k| \leqslant \varepsilon\}, \quad B_k = \underset{x}{E}\{|f(x) - y_k| \geqslant 2\varepsilon\}.$$

[1]) Cette condition est due à M. Szpilrajn (cf. B. Gagaeff, l. cit., p. 187). Pour d'autres conditions nécessaires et suffisantes voir ibid. et H. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 309.

[2]) Pour le cas des fonctions réelles cf. Ch. de la Vallée-Poussin, *Intégrale de Lebesgue...*, p. 118, S. Kempisty, Fund. Math. 2 (1921), p. 135, W. Sierpiński, Fund. Math. 6 (1924), p. 4 et pour le cas général S. Banach, *Ueber analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. 17 (1931), p. 287.

Si l'espace est *totalement borné*, le terme *isolé* peut être remplacé par *fini* (voir § 15, IX).

Les ensembles A_k et B_k étant disjoints et de classe α multiplicative, il existe (d'après le théorème de séparation § 26, VII) un ensemble F_k ambigu de classe α et tel que $A_k \subset F_k$ et $F_k \cdot B_k = 0$. Par définition de I, on a $\mathcal{X} = A_1 + A_2 + \dots$, d'où $\mathcal{X} = F_1 + F_2 + \dots$

La fonction $g(x)$ définie par les conditions: $g(x) = y_1$ pour $x \varepsilon F_1$ et $g(x) = y_k$ pour $x \varepsilon F_k - (F_1 + \dots + F_{k-1})$, est de classe α. Car l'ensemble $g^{-1}(y_k)$, comme identique à $F_k - (F_1 + \dots + F_{k-1})$, est de classe α additive (il est même ambigu de classe α) et, les valeurs de la fonction g formant un ensemble dénombrable, l'ensemble $g^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit G.

De plus, on a $|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$ pour chaque x, car l'égalité $g(x) = y_k$ entraîne $x \varepsilon F_k \subset \mathcal{X} - B_k$.

Ceci établi, on définit la fonction $f_n(x)$ comme égale à $g(x)$, le nombre ε étant supposé égal à $1/n$.

IX. Représentation analytique. La famille des *fonctions représentables analytiquement* est, par définition[1]), la plus petite famille de fonctions qui contient: 1) toutes les fonctions continues, 2) les limites des suites convergentes des fonctions qui lui appartiennent. Ces fonctions sont rangées en classes de la façon suivante: 1° les fonctions continues sont de la classe 0, 2° les limites des fonctions représentables de classe α sont des fonctions représentables de classe $\alpha + 1$, 3° λ étant un nombre limite, une fonction représentable de classe λ est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions représentables de classes $< \lambda$.

Dans le cas où l'espace $\mathcal{Y}$ (qui contient les valeurs des fonctions considérées) coïncide avec l'ensemble des nombres réels, on a le *théorème fondamental d'identité de la classe α des fonctions mesurables B à la classe α des fonctions représentables analytiquement* ($\mathcal{X}$ étant un espace métrique arbitraire)[2]).

Dans le cas général où $\mathcal{Y}$ est un espace métrique quelconque, on ne peut qu'affirmer (en tenant compte des théorèmes du N° VIII) que les fonctions représentables analytiquement de classe α sont mesurables B de classe α, tandis que la réciproque n'est pas en général vraie[3]) (on le voit, en envisageant la fonction caractéristique d'un seul point de l'axe $\mathcal{X}$, l'espace $\mathcal{Y}$ étant composé des nombres 0 et 1; cette fonction est mesurable de classe 1, mais n'est pas représentable analytiquement). La différence essentielle entre les deux genres des fonctions est que *la mesurabilité B* (et même la classe)

[1]) Voir R. Baire, Thèse, Ann. di Mat. (3) 3 (1899), p. 68.

[2]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Chap. 9 et H. Lebesgue, op. cit. p. 168.

[3]) Cependant, comme l'a démontré M. S. Banach (*Ueber analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. 17 (1931), p. 285), chaque fonction mesurable B se laisse obtenir à l'aide des passages à la limite à partir des *fonctions mesurables B de classe 1*.

d'une fonction f ne dépend pas des points de l'espace $\mathcal{Y}$ qui ne sont pas des valeurs de f, tandis qu'une fonction peut devenir représentable, si on augmente l'espace $\mathcal{Y}$ (si on remplace dans l'exemple précédent l'espace $\mathcal{Y}$ par l'intervalle 01 tout entier, la fonction considérée devient représentable de I-re classe). En effet, si un sous-ensemble $\mathcal{Y}_0$ de l'espace $\mathcal{Y}$ contient toutes les valeurs de la fonction f, on a l'équivalence évidente $\{f(x) \varepsilon G \cdot \mathcal{Y}_0\} \equiv \{f(x) \varepsilon G\}$, d'où $f^{-1}(G \cdot \mathcal{Y}_0) = f^{-1}(G)$ et, chaque ensemble ouvert dans $\mathcal{Y}_0$ étant de la forme $G \cdot \mathcal{Y}_0$ où G est ouvert (dans $\mathcal{Y}$), on n'altère pas la classe de la fonction f, en restreignant l'espace $\mathcal{Y}$ à $\mathcal{Y}_0$.

Cependant le théorème de l'identité subsiste dans le cas général de l'espace séparable, si l'on admet que la fonction mesurable donnée peut être approchée par des fonctions dont les valeurs débordent l'espace $\mathcal{Y}$. Notamment, d'après le théorème d'U r y s o h n, $\mathcal{Y}$ peut être considéré (au point de vue topologique) comme un sous-ensemble du cube fondamental de Hilbert $\mathcal{I}^{\aleph_0}$; or, *dans $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ le théorème d'identité est valable.*

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{I}^{\aleph_0}$; c. à d. $f(x) = [f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), ...]$, chacune des fonctions $f^{(i)}(x)$ étant à valeurs réelles. Si l'on suppose que $f(x)$ est une fonction mesurable B de classe α, chacune des fonctions $f^{(i)}(x)$ l'est également (N° VI); comme une fonction à valeurs réelles, $f^{(i)}(x)$ est donc représentable analytiquement de classe α.

Reste à prouver que, *si chacune des fonctions $f^{(i)}(x)$ est représentable analytiquement de classe α, la fonction $f(x)$ l'est également* (théorème, qui est d'ailleurs vrai, lorsqu'on considère au lieu de $\mathcal{I}$ un espace métrique arbitraire $\mathcal{Y}$).

Procédons par induction. Dans le cas $\alpha = 0$, c. à d. dans le cas d'une fonction continue, l'énoncé a été démontré au § 14, IV.

Admettons donc que chacune des fonctions $f^{(i)}(x)$ soit représentable de classe $\alpha + 1$. Il s'agit de prouver qu'il en est de même de la fonction $f(x)$. On a, par hypothèse $f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} f_n^{(i)}(x)$ où $f_n^{(i)}(x)$ est de classe α. Il vient par définition de la convergence (§ 14, IV): $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$ et, l'énoncé étant supposé vrai pour α, $f_n(x)$ est représentable de classe α et $f(x)$ de classe $\alpha + 1$.

Supposons finalement que chacune des fonctions $f^{(i)}(x)$ soit représentable de classe λ, où λ est un nombre limite. Par conséquent $f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} f_n^{(i)}(x)$, la convergence étant uniforme (pour i fixe) et chacune des fonctions $f_n^{(i)}(x)$ étant de classe $< \lambda$. Posons $g_n(x) = f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x), ..., f_n^{(n)}(x), f_n^{(n)}(x), ...$

Le théorème étant supposé vrai pour $\alpha < \lambda$, la fonction $g_n(x)$ est de classe $< \lambda$. En outre, $f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} g_n^{(i)}(x)$ et la convergence est uniforme (puisque $g_n^{(i)}(x) = f_n^{(i)}(x)$ pour $n > i$). Cela implique (§ 24, VIII) que la suite $g_n(x)$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$.

X. Théorèmes de Baire sur les fonctions de I-re classe[1].

Rappelons d'abord que $y = f(x)$ étant une fonction arbitraire, l'ensemble D de ses points de discontinuité remplit la formule

$$(1) \qquad D = \sum_G \{f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)]\} = \sum_F \{\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)\}$$

où G parcourt la famille des ensembles ouverts et F celle des ensembles fermés de l'espace $\mathcal{Y}$ (cf. § 13, III (3)).

Si l'espace $\mathcal{Y}$ est *séparable*, la formule (1) peut être remplacée par une formule qui ne comporte que la sommation dénombrable:

$$(2) \qquad D = \sum_n \{f^{-1}(R_n) - \text{Int}[f^{-1}(R_n)]\} = \sum_n \{\overline{f^{-1}(S_n)} - f^{-1}(S_n)\}$$

où $S_n = \mathcal{Y} - R_n$ et la suite $R_1, R_2, ...$ forme la base de l'espace $\mathcal{Y}$.

Soit, en effet, $G = \sum_n R_{k_n}$ et $x \varepsilon f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)]$. Donc $f(x) \varepsilon G$, d'où $f(x) \varepsilon R_{k_n} \subset G$, pour un certain indice n. Cela implique que $f^{-1}(R_{k_n}) \subset f^{-1}(G)$, donc que $\text{Int}[f^{-1}(R_{k_n})] \subset \text{Int}[f^{-1}(G)]$. Ainsi $x \varepsilon f^{-1}(R_{k_n}) - \text{Int}[f^{-1}(R_{k_n})]$. De là résulte la première partie de la formule (2). La deuxième s'en déduit en vertu des égalités: $f^{-1}(R_n) = \mathcal{X} - f^{-1}(S_n)$ et $\text{Int}(\mathcal{X} - Z) = \mathcal{X} - \overline{Z}$, qui impliquent que $\text{Int}[f^{-1}(R_n)] = \mathcal{X} - \overline{f^{-1}(S_n)}$.

Ceci établi, passons à la démonstration des théorèmes.

Théorème 1. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction mesurable B de I-re classe est de I-re catégorie (l'espace $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable).

En effet, l'ensemble S_n de la formule (2) étant fermé, l'ensemble $f^{-1}(S_n)$ est par hypothèse un $\boldsymbol{G}_\delta$. Par conséquent, l'ensemble $\overline{f^{-1}(S_n)} - f^{-1}(S_n)$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$; comme ensemble de la forme $\overline{X} - X$ c'est un ensemble frontière (§ 8, IV), donc un ensemble de I-re catégorie (§ 10, II). Comme somme d'une série d'ensembles de I-re catégorie, l'ensemble D est encore de I-re catégorie.

Corollaire. $f(x)$ étant une fonction de I-re classe et A étant un sous-ensemble arbitraire de l'espace $\mathcal{X}$, l'ensemble des points de

[1] Voir la Thèse de R. B a i r e. Les fonctions de I-re classe jouent un grand rôle dans les applications; telles sont p. ex. les fonctions semi-continues, monotones (plus généralement: à variation bornée), les fonctions dérivées. Elles seront appliquées aussi dans l'étude des espaces compacts.

discontinuité de la fonction partielle $f(x|A)$ est de I-re catégorie relativement à A.

Théorème 2. Une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé est mesurable B de I-re classe (l'espace $\mathcal{X}$ étant supposé séparable).

Soit, en effet, F un sous-ensemble arbitraire fermé de l'espace $\mathcal{Y}$. Il s'agit de prouver que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un G_δ.

Posons $\mathcal{Y} - F = F_1 + F_2 + \dots$, série d'ensembles fermés.

Nous allons appliquer au couple d'ensembles $f^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F_n)$ (pour n fixe) le théorème § 12, III, 1°, d'après lequel, E et H étant deux ensembles tels que l'équation $X = \overline{XE} \cdot \overline{XH}$ ne possède que la racine $X = 0$, il existe un ensemble D développable, donc selon § 19, III (1) un G_δ, assujetti aux conditions $E \subset D$ et $HD = 0$.

Admettons à ce but que $X = \overline{X \cdot f^{-1}(F)} \cdot \overline{X \cdot f^{-1}(F_n)}$. Supposons, par impossible, que $X \neq 0$. L'ensemble X étant fermé, il existe par hypothèse un point de continuité p de la fonction partielle $g(x) = f(x|X)$. On a (§ 3, II, 14): $p \in X \subset \overline{X \cdot f^{-1}(F)} = \overline{g^{-1}(F)}$ et, en vertu de la continuité de la fonction $g(x)$: $g(p) \in \overline{gg^{-1}(F)}$, d'où finalement $f(p) \in F$, puisque $g(p) = f(p)$ et $\overline{gg^{-1}(F)} \subset \overline{F} = F$. D'une façon analogue, l'inclusion $X \subset \overline{X \cdot f^{-1}(F_n)}$ implique que $f(p) \in F_n$. Mais cela est impossible, car $F \cdot F_n = 0$.

Ainsi $X = 0$. Il existe donc pour chaque n un ensemble D_n qui est un G_δ tel que $f^{-1}(F) \subset D_n \subset \mathcal{X} - f^{-1}(F_n)$.

Il vient $f^{-1}(F) \subset \prod_n D_n \subset \prod_n [\mathcal{X} - f^{-1}(F_n)] = \mathcal{X} - \sum_n f^{-1}(F_n) =$ $= \mathcal{X} - f^{-1}\left(\sum_n F_n\right) = \mathcal{X} - f^{-1}(\mathcal{Y} - F) = \mathcal{X} - [\mathcal{X} - f^{-1}(F)] = f^{-1}(F)$, d'où $f^{-1}(F) = \prod_n D_n$ et, chacun des ensembles D_n étant un G_δ, l'ensemble $f^{-1}(F)$ l'est également.

Remarques. 1) La discontinuité ponctuelle de la fonction $f(x)$ sur tout ensemble fermé équivaut *à l'existence d'un point de continuité de la fonction $f(x|A)$ sur tout ensemble A fermé et non vide.* Ce n'est en effet que cette dernière condition qui intervient dans la démonstration du théorème 2.

2) Le terme *fermé* peut être remplacé dans l'énoncé du théor. 2 par *parfait*. Car chaque point isolé est un point de continuité.

Il en résulte aussitôt (§ 9, VI, 5) que si l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction est *clairsemé* (donc, en particulier, s'il est *fini*), la fonction est de I-re classe.

3) Dans les espaces complets (cf. § 30) la thèse du corollaire du théor. 1 *équivaut* à l'hypothèse du théor. 2, de sorte que chacune d'elles *caractérise* les

fonctions de I-re classe. Cependant dans les espaces non complets la première n'est pas s u f f i s a n t e (si l'on admet l'hypothèse du continu: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$) et la deuxième n'est pas n é c e s s a i r e pour qu'une fonction soit de I-re classe.

En effet, il existe d'une part (voir § 36) un espace séparable E de la puissance $\aleph_1$ tel que c h a q u e fonction définie sur E satisfait à la thèse du corollaire. Or, la famille des fonctions réelles définies sur E étant de la puissance $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$ et la famille des fonctions mesurables B étant de la puissance $\mathfrak{c}$ (N° I), l'inégalité $\mathfrak{c} < \mathfrak{c}^{\aleph_1}$ (qui résulte de l'hypothèse du continu) entraîne l'existence des fonctions non mesurables B qui satisfont à la thèse du corollaire.

D'autre part, la fonction caractéristique d'un ensemble qui est un F_σ et un G_δ mais qui n'est pas développable en une série alternée d'ensembles fermés décroissants (tel est p. ex. un ensemble dense et frontière dans l'espace des nombres rationnels, cf. § 19, III, remarque 2) est une fonction de I-re classe (N° I) mais ne satisfait pas à l'hypothèse du théor. 2 (§ 13, VI).

4) Chaque fonction f de I-re classe est *effectivement* de I-re classe (dans le sens admis p. 109). Notamment, la démonstration du théor. 2 permet de *définir* pour chaque ensemble fermé $F \subset \mathcal{Y}$ une suite d'ensembles ouverts $G_n \subset \mathcal{X}$ de façon que $f^{-1}(F) = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots$ (car chaque ensemble développable D est un G_δ *effectif*, voir p. 112). Cela permet aussi, dans le cas où les valeurs de f sont réelles, de *définir* une suite de fonctions continues qui converge vers f (de sorte que f est *effectivement* une fonction représentable analytiquement de I-re classe) [1].

§ 28. Fonctions jouissant de la propriété de Baire.

I. Définition. Soit $f(x)$ une fonction qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. *La fonction f jouit de la propriété de Baire, lorsque, quel que soit l'ensemble fermé F (contenu dans $\mathcal{Y}$), l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire.*

En tenant compte du fait que le complémentaire d'un ensemble à propriété de Baire jouit également de cette propriété, on peut remplacer dans cette définition le terme *fermé* par *ouvert*.

D'autre part, la somme et le produit d'une suite infinie d'ensembles à propriété de Baire étant des ensembles ayant aussi cette propriété (§ 11, III), on en conclut que *si f est une fonction à propriété de Baire et si X est un ensemble borelien, $f^{-1}(X)$ est un ensemble à propriété de Baire.*

Chaque ensemble borelien jouissant de la propriété de Baire, on déduit directement de la définition que *chaque fonction mesurable B jouit de la pro-*

---

[1]) en se servant par ex. du procédé décrit par M. H a u s d o r f f, *Mengenlehre*, Chap. 9. Cf. Ch. d e l a V a l l é e P o u s s i n, *Intégrales de Lebesgue...*, p. 107 („Problème de Baire") et ma note Fund. Math. 3 (1922), p. 100, où je donne à l'aide de la méthode générale de l'élimination des nombres transfinis une solution de ce problème sans l'emploi des nombres transfinis.

priété de Baire. C'est une des propriétés les plus importantes, communes à toutes les fonctions mesurables B, donc à toutes les fonctions représentables analytiquement (voir aussi N⁰ II).

Remarque. L'ensemble $f^{-1}(X)$ *où X jouit de la propriété de Baire,* peut être dépourvu de la propriété de Baire, même lorsque la fonction f est continue et X non-dense. Tel est l'exemple suivant: $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{J}$, f est l'identité: $f(x) = x$ et X est un ensemble situé dans $\mathcal{X}$ et dépourvu de la propriété de Baire par rapport à $\mathcal{X}$.

II. Equivalences[1]. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ jouisse de la propriété de Baire est l'existence d'un ensemble P de I-re catégorie (dans $\mathcal{X}$) tel que la fonction partielle $f(x|\mathcal{X} - P)$ soit continue* (on dit alors que la fonction $f(x)$ est continue, *en négligeant les ensembles de I-re catégorie*). L'espace $\mathcal{Y}$ est supposé séparable.

Nécessité. Il s'agit de définir un ensemble P de I-re catégorie te que la fonction $g(x) = f(x|\mathcal{X} - P)$ soit continue, c. à d. que, H étant un en semble ouvert arbitraire (dans $\mathcal{Y}$), l'ensemble $g^{-1}(H)$ soit ouvert relative ment à $\mathcal{X} - P$.

Soit $S_1, S_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{Y}$. On a donc $H = S_{k_1} + S_{k_2} + \ldots$ Pa hypothèse $f^{-1}(S_n)$ est un ensemble à propriété de Baire; il vient par défini tion de cette propriété (§ 11, I): $f^{-1}(S_n) = G_n - P_n + R_n$ où G_n est ouver et P_n et R_n sont de I-re catégorie.

Posons $P = (P_1 + R_1) + (P_2 + R_2) + \ldots$ La formule $g^{-1}(H) = f^{-1}(H) - I$ (§ 3, II, 14) donne $g^{-1}(H) = \sum_n [f^{-1}(S_{k_n})] - P = \sum_n [(G_{k_n} - P_{k_n} + R_{k_n}) - P]$ e. comme $P_{k_n} + R_{k_n} \subset P$, on a $(G_{k_n} - P_{k_n} + R_{k_n}) - P = G_{k_n} - P$. Donc $g^{-1}(H) = \left(\sum_n G_{k_n}\right) - P$ et, $\sum_n G_{k_n}$ étant ouvert, $g^{-1}(H)$ est ouvert dans $\mathcal{X} - P$.

Suffisance. Soit P un ensemble de I-re catégorie tel que la fonction $g(x) = f(x|\mathcal{X} - P)$ est continue. H étant un ensemble ouvert arbitraire, la continuité de $g(x)$ signifie (§ 13, IV (3)) que l'ensemble $g^{-1}(H) = f^{-1}(H) - P$ est ouvert dans $\mathcal{X} - P$, c. à d. qu'il est de la forme $G - P$ où G est ouvert (dans $\mathcal{X}$). Il vient $f^{-1}(H) = f^{-1}(H) - P + f^{-1}(H) \cdot P = G - P + f^{-1}(H) \cdot P$. Or, P, et par conséquent $f^{-1}(H) \cdot P$, étant des ensembles de I-re catégorie, la décomposition de $f^{-1}(H)$ montre que cet ensemble jouit de la propriété de Baire, c. q. f. d.

---

[1]) Voir ma note *La propriété de Baire dans les espaces métriques,* Fund. Math. 16 (1930), p. 391. Cf. O. Nikodym, *Sur la condition de Baire,* Bull. Acad. Pol. 1929, p. 595.

En rapprochant ce théorème des conclusions du N⁰ précédent, on voit que *chaque fonction mesurable B* et, à plus forte raison, *chaque fonction représentable analytiquement est continue, lorsqu'on néglige les ensembles de I-re catégorie* [1]).

Il en résulte aussi que, étant donné un ensemble arbitraire, *la propriété de Baire de cet ensemble et de sa fonction caractéristique sont équivalentes* [2]).

III. Opérations sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire.

1. *Superposition des fonctions. Si la fonction $y = f(x)$ jouit de la propriété de Baire et la fonction $z = g(y)$ est mesurable B, la fonction $h(x) = gf(x)$ jouit de la propriété de Baire.*

Car $h^{-1}(F) = f^{-1}[g^{-1}(F)]$ et $g^{-1}(F)$ étant mesurable B, l'ensemble $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ possède la propriété de Baire.

Remarque. Dans le cas *inverse*, où f est mesurable B, tandis que g possède la propriété de Baire, la fonction gf peut être dépourvue de cette propriété: considérons notamment l'exemple du N⁰ I et soit $g(y)$ la fonction caractéristique de X (regardé comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$).

2. *La limite d'une suite convergente de fonctions à propriété de Baire jouit encore de cette propriété.*

C'est une conséquence directe de la formule § 27, VIII (ii):

$$f^{-1}(F) = \prod_n \sum_k \left[\overset{-1}{f}_{n+k}(S_n) \right],$$

où S_n désigne la sphère de rayon $^1/_n$ ayant pour centre l'ensemble fermé F. En effet, $\overset{-1}{f}_{n+k}(S_n)$ ayant la propriété de Baire, il en est de même de chaque ensemble qui s'en obtient par des additions et des multiplications dénombrables.

Remarque. On pourrait aussi démontrer directement que la limite d'une suite de fonctions „continues en négligeant les ensembles de I-re catégorie" est une fonction du même genre. Soit notamment P_n un ensemble de I-re catégorie tel que la fonction partielle $f_n(x|\mathcal{X} - P_n)$ est continue. Posons $P = P_1 + P_2 + \ldots$ Donc $f_n(x|\mathcal{X} - P)$ est continue, quel que soit n; f étant la limite de f_n, on en conclut que $f(x|\mathcal{X} - P)$ est de I-re classe (sur $\mathcal{X} - P$). Or, les points de discontinuité d'une fonction de I-re classe formant un ensemble de I-re catégorie (§ 27, X, coroll.), l'ensemble R des points de discontinuité de la fonction $f(x|\mathcal{X} - P)$ est de I-re catégorie dans $\mathcal{X} - P$, donc dans l'espace $\mathcal{X}$ tout entier. Ainsi, la fonction $f(x|\mathcal{X} - P - R)$ est continue et l'ensemble $P + R$ est de I-re catégorie.

---

[1]) Cet énoncé provient de R. Baire, C. R. Paris, t. 129 (1899), p. 1010. Cf. ma note *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie,* Fund. Math. 5 (1924), p. 82.

[2]) Cet énoncé est dû à M. Lusin.

3. *Fonctions de plusieurs variables.* Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire et si l'on pose $g(x,y)=f(x)$, la fonction $g(x,y)$ jouit de la propriété de Baire relativement au produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Car $g^{-1}(G)=f^{-1}(G)\times\mathcal{Y}$ et la propriété de Baire est invariante par rapport à la multiplication par un axe (§ 23, VII).

En tenant compte de cette invariance, on déduit de la formule (ii) du § 27, V que si la fonction $f(x,y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de Baire relativement à la variable y, elle jouit de cette propriété relativement à la variable (x,y). L'espace $\mathcal{X}$ est supposé séparable.

4. Le cas des *fonctions complexes* peut être traité d'une façon tout-à-fait analogue à celle du § 27, VI. On parvient à la conclusion que $f(t)$ étant une fonction dont les valeurs appartiennent à un produit (fini ou infini) $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\dots$ d'espaces séparables, la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction jouisse de la propriété de Baire est que chacune des coordonnées du point $f(t)$ en jouisse.

5. *Fonctions composées.* En combinant les énoncés 1, 3 et 4, on en conclut que, si chacune des fonctions $y_i=f_i(x_i)$ jouit de la propriété de Baire et la fonction $z=g(y_1,y_2,\dots)$ est mesurable B, la fonction composée $z=g[f_1(x_1),f_2(x_2),\dots]$ en jouit également. Les espaces $\mathcal{Y}_i$ sont supposés séparables.

6. *Image de l'équation* $y=f(x)$. Reprenons l'idée du raisonnement du § 27, VII. La distance étant une fonction continue, la fonction $f(x)$ étant supposée pourvue de la propriété de Baire et $\mathcal{Y}$ étant séparable, $|y-f(x)|$ est d'après 5 une fonction à propriété de Baire de deux variables. Donc *l'ensemble* $I=\underset{xy}{E}\,[|y-f(x)|=0]$ *jouit de la propriété de Baire.*

Remarques. 1. Le théorème inverse n'est pas vrai: l'image de l'équation $y=f(x)$ peut jouir de la propriété de Baire, sans que la fonction $f(x)$ en jouisse. Nous reviendrons sur cette question au § 36, IV.

2. D'après p. 143, XI si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne sont de I-re catégorie en aucun point (p. ex. s'ils sont complets), *l'ensemble I est de I-re catégorie.*

IV. Fonctions à propriété de Baire au sens restreint. On appelle ainsi une fonction $f(x)$, lorsque, quel que soit l'ensemble fermé F, *l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire au sens restreint.*

Cela revient à dire que, *quel que soit l'ensemble E, la fonction partielle $f(x|E)$ jouit de la propriété de Baire relativement à E,* ou encore (en raison du théor. du N⁰ II) que *cette fonction partielle est continue, lorsqu'on néglige les ensembles de I-re catégorie relativement à E.* L'espace $\mathcal{Y}$ est supposé séparable.

En effet, la condition considérée est nécessaire, car en posant $g(x)=f(x|E)$, il vient (§ 3, II, 14): $g^{-1}(F)=E\cdot f^{-1}(F)$ et, comme par hypothèse l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire au sens restreint, l'ensemble $g^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire relativement à E; cela veut dire que la fonction $g(x)$ jouit de la propriété de Baire (relativement à E). Inversement, si l'on suppose que, quel que soit E, l'ensemble $g^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire relativement à E, l'ensemble $f^{-1}(F)$ possède la propriété de Baire au sens restreint; donc, l'ensemble fermé F étant arbitraire, $f(x)$ la possède également.

Le domaine de variabilité de l'ensemble E peut être réduit, bien entendu, aux ensembles *parfaits* ou aux ensembles *fermés* (cf. § 11, VI).

Chaque ensemble borelien jouissant de la propriété de Baire au sens restreint (§ 11, VI), *chaque fonction mesurable B en jouit également.* Cependant il existe des fonctions à propriété de Baire au sens restreint qui ne sont pas mesurables B (voir § 35).

Les énoncés 1, 2 et 4 du N⁰ III se laissent démontrer d'une façon tout à fait analogue pour la propriété de Baire au sens restreint[1]. En outre, la propriété de Baire au sens restreint d'un ensemble et de sa *fonction caractéristique* sont équivalentes.

V. Rapports à la mesure (lebesguienne)[2]. *$f(x)$ étant une fonction à valeurs réelles, définie sur un espace séparable $\mathcal{X}$ et jouissant de la propriété de Baire, il existe un ensemble Z tel que $\mathcal{X}-Z$ est de I-re catégorie et que $f(Z)$ est de mesure nulle: $mf(Z)=0$.*

Considérons d'abord le cas où f est une fonction continue.

Soit $R=r_1,r_2,\dots$ un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{X}$; f étant continue, il existe, pour chaque k et n, une sphère $S_{k,n}$ telle que $r_k\in S_{k,n}$ et $\delta[f(S_{k,n})]<\frac{1}{2^k n}$, d'où $m_e f(S_{k,n})<\frac{1}{2^k n}$ (m_e désignant la mesure extérieure).

Posons $Z=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$. On a donc $Z\subset\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$ pour chaque n, d'où $f(Z)\subset\sum_{k=1}^{\infty}f(S_{k,n})$ et par suite $m_e f(Z)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_e f(S_{k,n})\leqslant\frac{1}{n}$, d'où $mf(Z)=0$.

D'autre part $\mathcal{X}-Z=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{X}-\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}\Big\}$ et $R\subset\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$, ce qui prouve que pour n fixe $\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$ est un ensemble dense et ouvert. $\mathcal{X}-\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$ est donc non-dense et $\mathcal{X}-Z$ est par conséquent de I-re catégorie.

Le cas où f est une fonction jouissant de la propriété de Baire se réduit au précédent. Car d'après le th. du N⁰ II on a $\mathcal{X}=P+(\mathcal{X}-P)$, la fonction étant continue sur $\mathcal{X}-P$ et P étant de I-re catégorie. Or, comme nous venons de montrer, il existe un Z tel que $mf(Z)=0$ et que $\mathcal{X}-P-Z$ est de I-re catégorie. L'ensemble $\mathcal{X}-Z\subset(\mathcal{X}-P-Z)+P$ est donc de I-re catégorie.

---

[1] Quant aux énoncés 3, 5 et 6, leurs démonstrations ne pourraient être appliquées à la propriété de Baire au sens restreint, qu'en s'appuyant sur l'invariance de cette propriété par rapport à la multiplication par un axe, invariance qui n'est pas jusqu'à présent établie (cf. § 23, VII).

[2] Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 302. On trouvera une application de ce théorème au Chap. III, § 36.