#### PREMIER CHAPITRE.

## Notions fondamentales. Calcul topologique.

## § 4. Système d'axiomes. Règles de calcul.

I. Axiomes. Nous considérons dans ce chapitre:  $1^{\circ}$  un ensemble, que nous désignons par 1 et que nous appelons espace,  $2^{\circ}$  une fonction  $\overline{X}$  définie pour chaque sous-ensemble X de 1 de façon que  $\overline{X} \subset 1$  et que nous appelons fermeture de X. Les éléments de l'espace sont dits des points.

Nous admettons les trois axiomes suivants: 1)

$$\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

II) si X ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a

$$\bar{X} = X$$

III) 
$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}$$
.

II. Interprétation géométrique.  $^2$ ) En cas où 1 désigne l'espace euclidien (à n dimensions),  $\overline{X}$  est l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation. Nous allons prouver que les trois axiomes sont réalisés.

Supposons d'abord que  $p \in \overline{X+Y}$ , donc que l'on a  $p=\lim p_n$  où  $p_n \in (X+Y)$ . Il existe alors parmi les  $p_n$  une infinité de termes qui appartien-

<sup>1)</sup> Des axiomes analogues ont été introduits par M. F. Riesz, Stetig-keitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del IV Congr. Int. dei Mat., vol. II, Roma 1909. Voir aussi ma note Sur l'opération  $\overline{A}$  de l'Analysis Situs, Fund. Math. 3 (1922), pp. 182 — 199. M. M. Fréchet appelle "accessibles" les espaces assujettis aux axiomes I — III. Voir son livre Espaces abstraits, Paris 1928, p. 185.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Le  $N^0$  II n'intervient pas dans la suite: il ne sert que pour rendre les axiomes plus compréhensibles. Cf. aussi § 7, III.

nent soit tous à X, soit tous à Y; dans le premier cas on a  $p \in \overline{X}$  et dans le second  $p \in \overline{Y}$ . Donc, en tout cas,  $p \in \overline{X} + \overline{Y}$ .

Il est, d'autre part, évident que, si p appartient à la fermeture de X, p appartient, à plus forte raison, à la fermeture de chaque sur-ensemble de X, donc à  $\overline{X+Y}$ . Par conséquent  $\overline{X}+\overline{Y}$  ( $\overline{X+Y}$ , d'où on conclut que l'axiome I est réalisé

L'axiome II étant manifestement vérifié, reste à démontrer l'axiome III. On a par définition  $\overline{X} \subset \overline{X}$ . Afin de prouver que  $\overline{X} \subset \overline{X}$ , supposons que  $p \in \overline{X}$  et que S est une sphère (à n dimensions) qui contient p à l'intérieur. Le point p appartenant à la fermeture de l'ensemble  $\overline{X}$ , il existe à l'intérieur de S un point  $r \in \overline{X}$ ; cette dernière condition implique l'existence d'un point s appartenant à SX. Ainsi, chaque sphère qui contient p à l'intérieur, contient un point de X. Cela entraı̂ne la formule  $p \in \overline{X}$ , c. q. f. d.

#### III. Règles du calcul topologique:

1. 
$$X \subset Y$$
 implique  $\bar{X} \subset \bar{Y}$ 

2. 
$$\overline{XY} \subset \overline{X} \cdot \overline{Y}$$
 3.  $\overline{X} - \overline{Y} \subset \overline{X - Y}$ 

6. si X est fini, 
$$\overline{X} = X$$

7. 
$$X \subset \overline{X}$$
 8.  $\overline{1} = 1$  9.  $\overline{0} = 0$ .

Les cinq premières règles résultent de l'axiome I.

En effet, pour prouver 1, remarquons que (selon § 1, II) l'inclusion  $X \subset Y$  équivaut à l'égalité Y = X + Y, qui entraîne  $\overline{Y} = \overline{X + Y}$ , donc, selon l'ax. I,  $\overline{Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ , ce qui équivaut à l'inclusion  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ .

La règle 1 entraı̂ne 2. Car les inclusions  $XY \subset X$  et  $XY \subset Y$  impliquent  $\overline{XY} \subset \overline{X}$  et  $\overline{XY} \subset \overline{Y}$ , d'où  $\overline{XY} \subset \overline{X} \cdot \overline{Y}$ .

L'identité X+Y=(X-Y)+Y entraîne en vertu de l'axiome I:  $\overline{X}+\overline{Y}=\overline{X-Y}+\overline{Y}$  et, en multipliant les deux membres de cette égalité par  $1-\overline{Y}$ , il vient  $\overline{X}-\overline{Y}=\overline{X-Y}-\overline{Y}\subset \overline{X-Y}$ , d'où la règle 3.

La règle 4 est une généralisation de la règle 2 (à une quantité arbitraire, dénombrable ou indénombrable de facteurs) et elle se démontre d'une façon analogue. On a, en effet, pour chaque

indice 
$$\kappa: \prod_{t} X_{t} \subset X_{\kappa}$$
, d'où  $\prod_{t} \overline{X_{t}} \subset \overline{X}_{\kappa}$ , donc  $\overline{\prod_{t} X_{t}} \subset \prod_{\kappa} \overline{X}_{\kappa}$ .

D'une façon analogue, l'inclusion  $X_{\kappa} \subset \sum_{\iota} X_{\iota}$  implique que  $\bar{X}_{\kappa} \subset \overline{\sum_{\iota} X_{\iota}}$ , d'où  $\sum_{\kappa} \bar{X}_{\kappa} \subset \overline{\sum_{\iota} X_{\iota}}$ . La règle 5 se trouve ainsi établie.

La règle 6 est une conséquence immédiate des axiomes I et II. La règle 7 résulte de l'axiome II et de la règle 1. En effet, la formule  $p \in X$  équivaut à l'inclusion  $(p) \subset X$ , qui entraîne  $\overline{(p)} \subset \overline{X}$  et comme, selon l'ax. II,  $\overline{(p)} = (p)$ , il vient  $\overline{(p)} \subset \overline{X}$ , donc  $p \in \overline{X}$ . Ainsi l'inclusion  $p \in X$  entraîne  $p \in \overline{X}$ , c. q. f. d.

La règle 8 résulte directement de 7 et la règle 9 est implicitement contenue dans l'axiome II.

IV. Relativisation. E étant un ensemble de points fixe et X un sous-ensemble arbitraire de E, on appelle fermeture de X relative à E l'ensemble  $E \cdot \overline{X}$ . La fermeture relative satisfait aux axiomes I—III relativisés par rapport à E; c'est-à-dire que, X et Y étant des sous-ensembles arbitraires de E, on a:

$$I_E$$
)  $E \cdot \overline{X + Y} = E \cdot \overline{X} + E \cdot \overline{Y}$ 

IIE) si X ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a

$$E \cdot \bar{X} = X$$

$$III_{E}) E \cdot \overline{E} \cdot \overline{X} = E \cdot \overline{X}.$$

En effet, les propositions  $I_E$  et  $II_E$  sont respectivement des conséquences directes des axiomes I et II. Quant à la proposition  $III_E$ , on a selon la règle 2 et l'axiome III:

$$\overline{E \cdot \overline{X}} \subset \overline{E} \cdot \overline{\overline{X}} \subset \overline{\overline{X}} = \overline{X}, \quad \text{d'où} \quad E \cdot \overline{E \cdot \overline{X}} \subset E \cdot \overline{X}$$

et, l'inclusion inverse étant une conséquence de la règle 7, on obtient l'identité  $\mathrm{III}_E$ .

Il est ainsi établi que les axiomes I—III peuvent être relativisés par rapport à un ensemble arbitraire E. Il en est donc de même de tous les *théorèmes* qui résultent des axiomes I—III: ils restent valables, lorsqu'on considère comme espace un sous-ensemble arbitraire E de 1 (et que l'on relativise la fermeture).

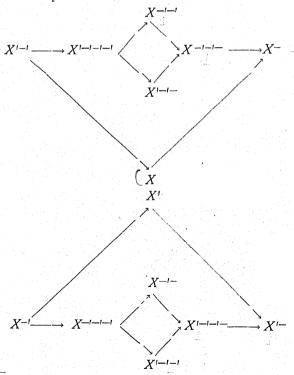
Nous avons vu au N° II que les axiomes I—III sont remplis dans l'espace euclidien. Il en résulte que ces axiomes sont aussi remplis, lorsqu'un sous-ensemble arbitraire d'un espace euclidien est considéré comme espace.

[§ 5, II]

#### V. Analyse logique du système d'axiomes.

Les axiomes I—III sont indépendants. En effet, si on considère comme l'espace un ensemble composé de deux éléments a et b, et si l'on pose:  $\overline{0}=0$ ,  $\overline{(a)}=(a)$ ,  $\overline{(b)}=(b)$  et  $\overline{(a,b)}=0$ , les axiomes II et III sont réalisés, tandis que I ne l'est pas. Si, pour un espace non vide, on pose  $\overline{X}=0$ , quel que soit X, les axiomes I et III sont remplis, mais II ne l'est pas. Enfin, pour prouver l'indépendance de l'ax. III, considérons l'exemple bien instructif suivant l'. l'espace se compose de toutes les fonctions réelles de variable réelle; X étant un sous-ensemble de cet espace, toute fonction-limite d'une suite de fonctions extraites de X appartient à  $\overline{X}$ . L'espace des fonctions, ainsi conçu, satisfait aux axiomes I et II, mais ne satisfait pas à l'ax. III. En effet, A désignant l'ensemble des fonctions continues, on a  $\overline{A} \neq \overline{A}$ , puisque la fonction (de Dirichlet) égale à 1 aux points rationnels et à 0 aux points irrationnels appartient à  $\overline{A}$ , mais n'appartient pas à  $\overline{A}$ .

Les axiomes I et III ne sont énoncés qu'à l'aide des opérations de l'Algèbre de la Théorie des ensembles et de l'opération  $\overline{X}$ . On pourrait se demander s'il n'existe d'autres axiomes de ce genre, indépendants des axiomes I — III et valables dans chaque espace euclidien. La solution d'un cas particulier de ce problème est fournie par la table suivante.



1) dû à M. Fréchet; voir sa Thèse, Rend. di Palermo 22 (1906), p. 15.

Supposons, notamment, que l'on opère sur un ensemble X à l'aide des deux opérations:  $\overline{X}$  et X' (=1-X). Quel est le nombre d'ensembles qui s'en obtiennent? On prouve que ce nombre est  $14^{-1}$ ). Les 14 ensembles en question sont contenus dans la table ci-dessus  $^2$ ). La même table renferme toutes les inclusions valables pour chaque sous-ensemble de la droite.

## § 5. Ensembles fermés, ensembles ouverts.

1. Définitions. X est un ensemble fermé, lorsque  $X=X^3$ ). X est un ensemble ouvert, lorsque le complémentaire de X est fermé, c. à d. lorsque 1-X=1-X, ou encore, lorsque X=1-1-X.

Exemples. Dans l'espace des nombres réels les nombres naturels constituent un ensemble fermé; l'intervalle  $a \leqslant x \leqslant b$  est fermé; l'intervalle  $a \leqslant x \leqslant b$  est ouvert (non fermé); dans le plan ce dernier ensemble n'est pas ouvert.

Dans l'espace des nombres naturels chaque ensemble est fermé et ouvert simultanément.

f(x) étant une fonction bornée définie dans l'intervalle  $a \leqslant x \leqslant b$ , son image géométrique, c. à d. l'ensemble  $\mathop{E}_{xy}[y=f(x)]$ , est fermée (dans le plan), lorsque la fonction f est continue et dans ce cas seulement (cf. § 23).

II. Opérations. La somme de deux ensembles fermés est un ensemble fermé. Cela résulte de l'axiome I, lorsqu'on pose  $\overline{X} = X$  et  $\overline{Y} = Y$ .

Le produit (d'un nombre fini ou infini) d'ensembles fermés est fermé. En effet, en posant  $\overline{X}_{\iota} = X_{\iota}$  dans la règle 4, on a  $\prod_{\iota} X_{\iota} \subset \prod_{\iota} X_{\iota}$  et comme on a  $\prod_{\iota} X_{\iota} \subset \prod_{\iota} X_{\iota}$ , selon 7, il vient  $\prod_{\iota} \overline{X}_{\iota} = \prod_{\iota} X_{\iota}$ .

En vertu de la formule de de Morgan, d'après laquelle (voir § 1, II et V) on a 1-XY=(1-X)+(1-Y) et, en général,  $1-\prod_{i}X_{i}=\sum_{i}(1-X_{i})$ , on conclut des propositions précédentes que le produit de deux ensembles ouverts est ouvert et que la somme d'un nombre arbitraire d'ensembles ouverts est ouverte.

<sup>1)</sup> Pour la démonstration, voir ma note citée de Fund. Math. 3, p. 196.
2) Pour des raisons typographiques nous écrivons  $X^-$  au lieu de X; l'ai-

guille remplace ici le signe d'inclusion (.

<sup>3)</sup> Notion due à G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 51.

D'après les règles 8 et 9, les ensembles 0 et 1 sont simultanément fermés et ouverts 1).

III. Propriétés. D'après l'ax. III, la fermeture est un ensemble fermé. On peut donc définir les ensembles fermés comme les ensembles de la forme  $\overline{X}$ . D'une façon analogue, les ensembles ouverts coïncident avec les ensembles de la forme  $1-\overline{X}$ .

Si G est ouvert, on a  $G\overline{X} \subset \overline{GX}$ , quel que soit X.

Car, par définition de l'ensemble ouvert, on a  $G=1-\overline{1-G}$ , donc  $G\cdot \overline{X}=\overline{X}-\overline{1-G}\subset \overline{X-(1-G)}=\overline{GX}$  en vertu de la règle 3.

L'inclusion  $G\overline{X} \subset \overline{GX}$  implique  $\overline{GX} \subset \overline{GX}$  et, en tenant compte de la formule  $X \subset \overline{X}$ , on a  $\overline{GX} \subset \overline{GX}$ , d'où

$$\overline{G\overline{X}} = \overline{GX}$$
.

IV. Relativisation. Conformément à la terminologie adoptée au § précédent, un ensemble X est fermé relativement à E, lorsque  $X = E \cdot \overline{X}$ . L'ensemble X est relativement ouvert, lorsque  $X \subset E$  et que E - X est relativement fermé (par rapport à E), autrement dit, lorsque  $X = E - \overline{E - X}$ .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit fermé (ouvert) relativement à E est qu'il soit le produit de E et d'un ensemble fermé (ouvert).

En effet, la condition est nécessaire, car dans le cas où X est relativement fermé, on a  $X = E \cdot \overline{X}$ , et dans le cas où X est relativement ouvert, on a  $X = E - \overline{E - X} = E \cdot (1 - \overline{E - X})$ .

Pour prouver qu'elle est suffisante, supposons d'abord que l'on ait X = EF et  $F = \overline{F}$ . Il s'agit de prouver que X est fermé relativement à E, c. à d. que  $X = E \cdot \overline{X}$ , donc que  $EF = E \cdot \overline{EF}$ .

Or, selon la règle 1,  $\overline{EF} \subset \overline{F}$  et comme  $\overline{F} = F$ , il vient  $E \cdot \overline{EF} \subset EF$ . L'inclusion inverse résulte directement de la règle 7.

Enfin, dans le cas où X=EG et G est ouvert, l'ensemble E-X, comme égal à  $E-EG=E\cdot (1-G)$ , est un produit de E et d'un ensemble fermé; il est donc fermé relativement à E. Par conséquent X est relativement ouvert, c. q. f. d.

En particulier, si E est fermé (ouvert), la propriété d'être fermé (ouvert) relativement à E entraîne la même propriété au sens absolu. Cela résulte du théorème précédent, en tenant compte du fait que le produit de deux ensembles fermés est fermé et que le produit de deux ensembles ouverts est ouvert (voir  $N^0$  II).

Le même théorème implique que la propriété d'être relativement fermé est transitive, c. à d. que si X est fermé dans Y et Y est fermé dans E.

En effet, par hypothèse:  $X = Y \cdot \overline{X}$  et  $Y = E \cdot \overline{Y}$ , donc  $X = E \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y}$  et, comme produit de E et d'un ensemble fermé, X est relativement fermé dans E.

Il en est de même de la propriété d'être relativement ouvert.

V. Ensembles  $F_{\sigma}$ , ensembles  $G_{\delta}$ . La somme d'une famille dénombrable  $^{1}$ ) d'ensembles fermés est dite  $F_{\sigma}$ , le produit d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts est dit  $G_{\delta}^{2}$ ).

On voit aussitôt que le complémentaire d'un ensemble  $F_{\sigma}$  est un  $G_{\delta}$  et que le complémentaire d'un  $G_{\delta}$  est un  $F_{\sigma}$ . La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles  $F_{\sigma}$  est évidemment un  $F_{\sigma}$ .

Le produit de deux ensembles  $F_{\sigma}$  est un  $F_{\sigma}$ ; soit, en effet,  $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 

et  $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ , donc  $AB = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_n B_m$  et, les ensembles  $A_n$  et  $B_m$  étant fermés, leur produit  $A_n \cdot B_m$  est aussi fermé; l'ensemble AB est

<sup>1)</sup> La notion d'ensemble fermé (ou celle d'ensemble ouvert) peut être admise comme primitive (au lieu de la fermeture); en admettant comme axiomes les énoncés du N° II, on obtient un système analogue au système basé sur les ax. I—III. Cf. P. Alexandroff, Math. Ann. 94 (1925), p. 208 et W. Sierpiński, Math. Ann. 97 (1926), p. 335, Topologia (1928). Voir aussi plus loin § 7, III.

<sup>1)</sup> Nous entendons par ensemble dénombrable un ensemble dont les éléments se laissent ranger en une suite finie ou infinie. Notons que, dans ce sens, chaque ensemble fini est dénombrable.

<sup>2)</sup> Ces deux notions, qui présentent une généralisation des notions d'ensemble fermé et d'ensemble ouvert ont été étudiées surtout pour les buts de la Théorie des fonctions. Cependant elles se sont montrées très utiles aussi dans les problèmes géométriques de la Topologie (v. surtout chap. III, §§ 29—32). Ces notions sont dues à M. W. H. Young, Ber. Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 287.

et

[§ 5, VI]

donc un  $F_{\sigma}$ . Par raison de symétrie, le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles  $G_{\delta}$  est un  $G_{\delta}$  et la somme de deux ensembles  $G_{\delta}$  est un  $G_{\delta}$ .

Tout ensemble  $F_{\sigma}$  est somme d'une suite d'ensembles fermés croissants. On a, en effet,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = F_1 + (F_1 + F_2) + (F_1 + F_2 + F_3) + \dots$$

et les ensembles en parenthèses sont fermés.

D'une façon analogue, tout ensemble  $G_{\delta}$  est produit d'une suite d'ensembles ouverts décroissants.

Pour que X soit un ensemble  $F_{\sigma}$  (un ensemble  $G_{\delta}$ ) relativement à E, il faut et il suffit que X soit un produit de E et d'un  $F_{\sigma}$  (d'un  $G_{\delta}$ ).

Cela résulte des identités:

$$F_1 \cdot E + F_2 \cdot E + \dots = (F_1 + F_2 + \dots) \cdot E$$
  
 $(G_1 \cdot E) \cdot (G_2 \cdot E) \cdot \dots = (G_1 \cdot G_2 \cdot \dots) \cdot E.$ 

 $(U_1 \cdot E) \cdot (U_2 \cdot E) \cdot \dots \equiv (U_1 \cdot U_2 \cdot \dots) \cdot E$ 

En particulier, si E est un  $F_{\sigma}$  (un  $G_{\delta}$ ), X l'est également. D'après l'ax. II, tout ensemble dénombrable est un  $F_{\sigma}$ .

Ainsi, par exemple, l'ensemble des nombres rationnels est, dans l'espace des nombres réels, un  $F_{\sigma}$ . L'ensemble des nombres irrationnels est donc un  $G_{\delta}$ . Nous allons voir plus tard que ce dernier n'est pas un  $F_{\sigma}$ .

VI. Ensembles boreliens. En généralisant les notions d'ensemble fermé et d'ensemble ouvert à l'aide des opérations de la Théorie des ensembles (comme nous l'avons fait dans le Nº précédent), on est conduit à considérer les ensembles qui s'obtiennent des ensembles fermés (ou ouverts) par les opérations d'addition et de multiplication dénombrables, ainsi que par celle de soustraction. On parvient ainsi à la définition suivante.

Définition  $^1$ ). La famille F des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions suivantes:

- 1) chaque ensemble fermé appartient à F,
- 2) si X appartient à F, 1-X lui appartient également,

3) si  $X_n$  (n = 1, 2, ...) appartient à  $\mathbf{F}$ , l'ensemble  $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  lui appartient également.

On voit aussitôt que la condition 1) peut être remplacée par

1') chaque ensemble ouvert appartient à F et que la condition 3), peut être remplacée par la condition 3'), qui s'obtient de 3), en y substituant  $\sum$  à  $\prod$ .

L'étude plus détaillée des ensembles boreliens se trouve dans les chapitres II et III.

Les ensembles que l'on rencontre dans la majorité des applications de la Topologie sont boreliens. D'autre part, comme nous verrons, on connaît des exemples d'ensembles non boreliens.

En ce qui concerne les ensembles relativement boreliens, on a le théorème suivant: E étant un ensemble donné, les ensembles boreliens relativement à E coıncident avec les ensembles de la forme BE, où B est un ensemble borelien variable.

En effet, la famille des ensembles X tels que XE est borelien relativement à E satisfait aux conditions 1)-3), car  $1^{\circ}$  si X est fermé, XE est fermé dans E, donc borelien relativement à E,  $2^{\circ}$  si XE est borelien dans E,  $(1-X) \cdot E$  l'est également, puisque  $(1-X) \cdot E = E - XE$ ,  $3^{\circ}$  si chacun des ensembles  $EX_n$  est borelien

dans 
$$E$$
,  $E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} X_n$  l'est également, puisque  $E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \prod_{n=1}^{\infty} (EX_n)$ .

Or, la famille des ensembles boreliens étant la plus petite famille satisfaisant aux conditions 1)—3), elle est contenue dans la famille des ensembles X en question. Autrement dit, si X est borelien, XE est borelien relativement à E.

Inversement, la famille des ensembles X=BE, où B est borelien, satisfait aux conditions 1)-3) relativisées par rapport à E, car  $1^0$  chaque ensemble fermé dans E appartient à cette famille,  $2^0$  si X=BE, l'ensemble E-X=E (1-B), comme produit de E et d'un ensemble borelien, appartient à la famille considérée,

$$3^{\circ}$$
 si  $X_n = EB_n$ , on a  $\prod_{n=1}^{\infty} X_n = E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ , donc  $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  appartient aussi à la famille considérée. Par conséquent cette famille contient la famille des ensembles boreliens relativement à  $E$ . En d'autres termes, si  $X$  est borelien relativement à  $E$ ,  $X$  est un produit de  $E$  et d'un ensemble borelien.

<sup>1)</sup> Voir E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 46 et F. Hausdorff, Mengenlehre, § 18 "Borelsche Systeme" et Grundzüge, p. 304.

[§ 6, II]

### § 6. Frontière, intérieur d'ensemble.

I. Définitions 1). La frontière de X est l'ensemble  $\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \cdot \overline{1 - X}$ . L'intérieur de X est l'ensemble  $\operatorname{Int}(X) = 1 - \overline{1 - X}$ .

Exemples. Sur le plan euclidien, X désignant le cercle  $x^2 + y^2 \le 1$ , Fr (X) est la circonférence du cercle, Int (X) est le reste. Rien ne change, si l'on remplace le signe  $\le$  par  $\le$ .

Dans l'espace des nombres naturels la frontière de chaque ensemble est vide.

Dans l'espace des nombres réels l'ensemble des nombres rationnels a pour frontière l'espace entier.

X étant un ensemble arbitraire situé dans l'espace des nombres réels et f(x) étant la fonction définie par les conditions: f(x) = 1 pour  $x \in X$  et f(x) = 0 ailleurs, la frontière de X constitue l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f(x) (voir § 13).

II. Formules de calcul. Nous nous servirons dans la suite des formules suivantes <sup>2</sup>):

(1) 
$$Int(XY) = Int(X) \cdot Int(Y)$$
 (1')  $X \subseteq Y$  implique  $Int(X) \subseteq Int(Y)$ 

(2) 
$$\sum_{t} \operatorname{Int} (X_{t}) \subset \operatorname{Int} (\sum_{t} X_{t})$$

(3) Int 
$$(X) = X - \overline{1 - X} = X - \text{Fr}(X) \subset X$$

(4) 
$$\operatorname{Fr}(1-X) = \operatorname{Fr}(X)$$

(5) 
$$\operatorname{Fr}(\bar{X}) \subset \operatorname{Fr}(X)$$

(6) 
$$\operatorname{Fr}(X) = X \cdot \overline{1 - X} + \overline{X} - X$$
 (7)  $X + \operatorname{Fr}(X) = \overline{X}$ 

(8) 
$$\operatorname{Fr}(X+Y) \subset \operatorname{Fr}(X) + \operatorname{Fr}(Y)$$
 (9)  $\operatorname{Fr}(XY) \subset \operatorname{Fr}(X) + \operatorname{Fr}(Y)$ 

(10) Int 
$$(X) \cdot \text{Fr } (X) = 0$$

(11) 
$$\operatorname{Fr}\left[\operatorname{Int}\left(X\right)\right] \subset \operatorname{Fr}\left(X\right)$$

(12) 
$$\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(X\right)\right]} = \overline{X} \cdot \operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(X\right)\right] = \operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(X\right)\right] - X.$$

Les formules (1)—(3) se démontrent comme suit:

$$1 - \overline{1 - XY} = 1 - \overline{1 - X + 1 - Y} = 1 - (\overline{1 - X} + \overline{1 - Y}) = (1 - \overline{1 - X}) \cdot (1 - \overline{1 - Y}).$$

$$\sum_{i} \operatorname{Int}(X_{i}) = 1 - \prod_{i} \overline{1 - X_{i}} \subset 1 - \prod_{i} (1 - X_{i}) = \operatorname{Int}(\sum_{i} X_{i}).$$

$$1-\overline{1-X}\subset 1-(1-X)=X$$
, donc  $\operatorname{Int}(X)=X\cdot (1-\overline{1-X})=X-\overline{1-X}=X$ 

$$=X-X\cdot\overline{1-X}=X-X\cdot\overline{X}\cdot\overline{1-X}=X-\overline{X}\cdot\overline{1-X}=X-\operatorname{Fr}(X)\subset X.$$

Les formules (4) et (5) sont évidentes.

$$\overline{X} \cdot \overline{1 - X} = (\overline{X} \cdot \overline{1 - X}) \cdot X + (\overline{X} \cdot \overline{1 - X}) \cdot (1 - X)$$
, d'où l'identité (6) en vertu des inclusions  $X \subset \overline{X}$  et  $1 - X \subset \overline{1 - X}$ .

$$X + \operatorname{Fr}(X) = X + X \cdot \overline{1 - X} + (\overline{X} - X) = X + (\overline{X} - X) = \overline{X}.$$

$$\operatorname{Fr}(X+Y) = \overline{X+Y} \cdot \overline{1-(X+Y)} = \overline{X+Y} \cdot \overline{(1-X) \cdot (1-X)} \subset \overline{X} \cdot \overline{1-X} \cdot \overline{1-Y} + \overline{Y} \cdot \overline{1-X} \cdot \overline{1-Y} \subset \overline{X} \cdot \overline{1-X} + \overline{Y} \cdot \overline{1-Y} = \operatorname{Fr}(X) + \operatorname{Fr}(Y).$$

$$Fr(XY) = Fr(1 - XY) = Fr[(1 - X) + (1 - Y)] \subset$$
  
 $\subset Fr(1 - X) + Fr(1 - Y) = Fr(X) + Fr(Y).$ 

La formule (10) est évidente et la formule (11) résulte de (4) et (5).

L'inclusion  $\operatorname{Fr}(X) \subset \overline{X}$  implique en vertu de (1') et (3) que  $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)] \subset \overline{X}$ . En désignant par G l'ensemble (ouvert)  $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ , on a donc  $G = G\overline{X}$ , d'où, en raison de § 5, III:  $\overline{G} = G\overline{X} = \overline{GX}$ , ce qui donne la première des égalités (12). La deuxième en résulte, en substituant 1 - X à X et en tenant compte de (4).

Au point de vue du calcul topologique les formules suivantes, que nous citons sans démonstration, présentent un certain intérêt:

$$Int [Int (X)] = Int (X), Int (X - Y) \subset Int (X) - Int (Y),$$

$$\operatorname{Fr} \left\{ \operatorname{Fr} \left[ \operatorname{Fr} \left( X \right) \right] \right\} = \operatorname{Fr} \left[ \operatorname{Fr} \left( X \right) \right] \subset \operatorname{Fr} \left( X \right).$$

La formule  $\overline{\operatorname{Int}(\overline{X}+\overline{Y})} = \overline{\operatorname{Int}(\overline{X})} + \overline{\operatorname{Int}(\overline{Y})}$  sera établie au § 8.

<sup>1)</sup> Cf. G. Cantor, Göttinger Nachr. 1879, p. 128 et C. Jordan, Journ. de Math. (4) 8 (1892), p. 72.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Quelques-unes se trouvent chez M. Zarycki, Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fund. Math. 9 (1927), pp. 3-15. L'auteur étudie en outre d'autres fonctions d'ensemble, telles que le "bord" =  $X \cdot 1 - X$ , l'"extérieur" = 1 - X.

#### III. Rapports avec les ensembles fermés et ouverts.

On voit aussitôt que la frontière est fermée et que l'intérieur est ouvert 1). De plus, l'intérieur de X est le plus grand sousensemble ouvert de X; car, G étant un sous-ensemble ouvert de X, on a  $1-X \subset 1-G=\overline{1-G}$ , d'où  $\overline{1-X} \subset 1-G$ , donc  $G \subset 1-\overline{1-X}=\mathrm{Int}\,(X)$ .

Si X est fermé, on a  $\operatorname{Fr}(X) = X \cdot \overline{1-X}$ ; si X est ouvert, on a  $\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} - X$ . Chacune de ces égalités caractérise les ensembles fermés et ouverts respectivement, car on obtient en vertu de (6) dans le premier cas  $\overline{X} - X = 0$ , d'où  $\overline{X} = X$ , et dans le second cas  $X \cdot \overline{1-X} = 0$ , d'où  $\overline{1-X} = 1-X$ .

En particulier, l'égalité Fr(X) = 0 équivaut à l'hypothèse que X est simultanément fermé et ouvert.

La condition nécessaire et suffisante pour que X soit une différence de deux ensembles fermés est que l'ensemble  $\overline{X}-X$  soit fermé  $^2$ ).

En effet, soient X = E - F, E et F deux ensembles fermés. On a

$$X = \overline{X} \cdot (E - F) = \overline{X} \cdot E - \overline{X} \cdot F$$

et comme  $X \subset E$ , il vient  $\overline{X} \subset E$ , d'où  $\overline{X} \cdot E = \overline{X}$ . Par conséquent  $X = \overline{X} - \overline{X} \cdot F$ , d'où  $\overline{X} - X = \overline{X} \cdot F$ ; donc  $\overline{X} - X$  est fermé.

Inversement, si  $\overline{X}-X$  est fermé, l'ensemble X, comme égal à  $\overline{X}-(\overline{X}-X)$ , est une différence de deux ensembles fermés.

- IV. Théorème sur l'additivité. On rapprochera à la formule (2) le théorème suivant (dont nous nous servirons au § 8):
- $\{X_{\iota}\}$  étant une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles ouverts relativement à la somme  $\sum X_{\iota}$ , on a

(i) Int 
$$(\sum_{i} X_{i}) = \sum_{i} \text{Int } (X_{i})$$

(ii) 
$$\overline{\operatorname{Int}(\overline{\sum}X_{t})} = \overline{\sum}\operatorname{Int}(\overline{X_{t}}).$$

En effet, en posant  $S = \sum_{t} X_{t}$ , on a par hypothèse  $X_{t} = S - \overline{S - X_{t}} \subset 1 - \overline{S - X_{t}}$ , donc  $S \subset \sum_{t} (1 - \overline{S - X_{t}})$ . Il vient: Int  $(S) = S \cdot \text{Int}(S) \subset \sum_{t} (1 - \overline{S - X_{t}}) \cdot (1 - \overline{1 - S}) = \sum_{t} (1 - \overline{S - X_{t}} + 1 - \overline{S}) = \sum_{t} (1 - \overline{1 - SX_{t}}) = \sum_{t} (1 - \overline{1 - X_{t}}) = \sum_{t} (1 - \overline{1 - X_{t}}) = \sum_{t} (1 - \overline{1 - X_{t}}) = \sum_{t} \text{Int}(X_{t})$  et, en vertu de (2), on en tire l'égalité (i).

D'après le § 5, III on a  $\operatorname{Int}(\overline{S}) = \operatorname{Int}(\overline{S}) \cdot \overline{S} \subset \operatorname{Int}(\overline{S}) \cdot S$ . Comme nous avons prouvé,  $S \subset \sum_{t} (1 - \overline{S} - \overline{X_t})$ ; il vient donc  $\operatorname{Int}(\overline{S}) \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{S})} \cdot \sum_{t} (1 - \overline{S} - \overline{X_t}) = \sum_{t} (\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S} - \overline{X_t})$ . Or,  $\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S} - \overline{X_t} \subset \overline{S} - \overline{S} - \overline{X_t} \subset \overline{S} - (S - \overline{X_t}) = \overline{X_t}$  et, le premier membre de cette inclusion étant ouvert, il est contenu dans l'intérieur de  $\overline{X_t}$ ; ainsi  $\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S} - \overline{X_t} \subset \operatorname{Int}(\overline{X_t})$ . En tenant compte de la formule précédente, on obtient  $\operatorname{Int}(\overline{S}) \subset \overline{\sum} \operatorname{Int}(\overline{X_t})$ , donc  $\overline{\operatorname{Int}(\overline{S})} \subset \overline{\sum} \operatorname{Int}(\overline{X_t})$ .

Reste à prouver l'inclusion inverse. Or, d'après (1'),  $\operatorname{Int}(\overline{X_{t}}) \subset \operatorname{Int}(\overline{S})$ . Donc  $\sum_{t} \operatorname{Int}(\overline{X_{t}}) \subset \operatorname{Int}(\overline{S})$  et finalement  $\sum_{t} \operatorname{Int}(\overline{X_{t}}) \subset \operatorname{Int}(\overline{S})$ .

# § 7. Entourage d'un point. Localisation des propriétés.

I. Définition. L'ensemble X est dit entourage du point p, lorsque  $p \in Int(X)$ , c. à d. lorsque p est un point intérieur de X; autrement dit, lorsque p n'appartient pas à  $\overline{1-X}$ .

Un ensemble ouvert est un entourage de chacun de ses points. Un entourage de p contient un entourage ouvert de p, notamment l'intérieur de cet entourage.

<sup>1)</sup> Cette dernière proposition équivaut à l'ax. III; sous le nom de la "condition de M. Hedrick" elle a été considérée par certains auteurs comme axiome. Voir E. R. Hedrick, Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911), p. 285 et M. Fréchet, Espaces abstraits, p. 201.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Voir la note de M. W. Sierpiński et moi, Sur les différences de deux ensembles fermés, Tôhoku Math. Journ. 20 (1921), p. 22.

Chaque sur-ensemble d'un entourage de p est un entourage de p. Le produit de deux entourages de p est un entourage de p. Car 1 - XY = 1 - X + 1 - Y.

II. Equivalences. Pour que  $p \in \overline{X}$ , il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à l'inégalité  $XE \neq 0$ .

Supposons, en effet, que  $p \in \overline{X}$  et soit E un entourage arbitraire de p. Cela veut dire que p n'appartient pas à  $\overline{1-E}$  et il vient  $p \in \overline{X} - \overline{1-E} \subset \overline{X-(1-E)} = \overline{XE}$ . Par conséquent  $XE \neq 0$ .

Supposons, d'autre part, que chaque entourage E de p satisfait à l'inégalité  $XE \neq 0$ . Il en résulte que l'ensemble 1-X n'est pas un entourage de p, donc que  $p \in \overline{1-(1-X)} = \overline{X}$ .

Ce théorème entraîne directement le corollaire suivant:

Pour que  $p \in Fr(X)$ , il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à la double inégalité  $EX \neq 0 \neq E - X$ .

Il est à remarquer que dans les deux énoncés précédents on peut remplacer le terme entourage de p par ensemble ouvert contenant p. Car chaque entourage de p contient un entourage ouvert de p.

- III. Espace de Hausdorff. La notion d'entourage (ouvert) du point p est le terme primitif de l'espace de Hausdorff  $^1$ ). Cet espace est assujetti aux 5 axiomes suivants:
- A. A chaque point p correspond au moins un entourage. Chaque entourage de p contient p.
- B. U et V étant deux entourages du point p, il existe un entourage de p contenu dans UV.
- C. Si U est un entourage de p et  $q \in U$ , il existe un entourage V de q contenu dans U.
- D. Si  $p \neq q$ , il existe deux entourages U et V des points p et q respectivement, tels que UV = 0.
- E. A chaque point p correspond une suite (dénombrable) d'entourages telle que tout entourage de p est sur-ensemble d'un terme de cette suite  $^2$ ).

On voit facilement que les entourages ouverts d'un espace qui satisfait aux axiomes I—III vérifient les propositions A, B et C, tandis que les propositions D et E peuvent être en défaut 1). Inversement, si l'on définit la fermeture dans l'espace de Hausdorff par la condition exprimée dans la proposition du Nº II, les axiomes I—III se trouvent vérifiés 2).

Ceci généralise le fait que chaque espace euclidien satisfait aux axiomes I—III (cf.  $\S$  4, II), car un espace euclidien est un espace de Hausdorff (lorsque p. ex. les sphères ouvertes de centre p sont considérées comme des entourages de p).

IV. Localisation. Etant donnée une propriété **P** d'ensembles, désignons par **P** la famille des ensembles jouissant de cette propriété.

Définition. L'ensemble X jouit de la propriété  ${\bf P}$  au point p, lorsqu'il existe un entourage E de ce point tel que  $XE \in {\bf P}$ . Le symbole  $X^*$  désigne l'ensemble des points p (qu'ils appartiennent à X ou non) auxquéls X ne jouit pas de la propriété  ${\bf P}$ .

Ainsi, par exemple, si P est la famille composée de l'ensemble vide, on a, d'après le théor. du  $N^{\circ}II$ ,  $X^* = \overline{X}$ . En localisant les propriétés d'être un ensemble fini et d'être un ensemble dénombrable, on parvient, comme nous verrons (§§ 9 et 18), aux notions de l'ensemble dérivé et de l'ensemble des points de condensation de X.

#### V. Familles héréditaires et additives.

Nous allons étudier l'opération  $X^*$ , en imposant à la famille P deux conditions qui seront réalisées dans plusieurs cas importants. Nous allons notamment supposer que la famille P est héréditaire et additive, c. à d. que

- (i) les conditions  $X \in \mathbf{P}$  et  $Y \subset X$  entraînent  $Y \in \mathbf{P}$ ,
- (ii) les conditions  $X \in \mathbf{P}$  et  $Y \in \mathbf{P}$  entraînent  $X + Y \in \mathbf{P}$ .

Conséquences de (i). La condition (i) supposée remplie, on peut dans la définition du N° précédent imposer à l'entourage E la condition d'être ouvert. En effet, d'après N° I, chaque entourage E de p contient un entourage ouvert G de p; donc, si l'on suppose que  $XE \in P$ , l'inclusion  $XG \subset XE$  entraîne  $XG \in P$ .

<sup>1)</sup> Grundzüge der Mengenlehre, p. 213; au point de vue historique il est intéressant de rapprocher le système de M. Hausdorff à celui de M. Hilbert, Göttinger Nachr. 1902 (reproduit par ex. dans Grundlagen der Geometrie Leipzig 1913, p. 165). Cf. aussi les espaces (W) (= voisinage) de M. Fréchet (Espaces abstraits, p. 172).

<sup>2) &</sup>quot;Das erste Abzählbarkeitsaxiom", F. Hausdorff, ib. p. 263.

<sup>1)</sup> M. Fréchet, l. c., p. 212.

<sup>2)</sup> F. Hausdorff, l. c., pp. 223-4.

De là résulte que l'ensemble  $1-X^*$ , comme somme d'ensembles ouverts, est ouvert. Par conséquent  $X^*$  est fermé.

Nous allons prouver que

(1) 
$$X \subset Y$$
 implique  $X^* \subset Y^*$  (2)  $X^{**} \subset X^*$ 

(3) si G est ouvert, on a 
$$GX^* = G \cdot (GX)^*$$
.

En effet, soient  $X \subset Y$ ,  $p \in X^*$  et G un ensemble ouvert contenant p. Donc XG non- $\epsilon P$  et, comme  $XG \subset YG$ , on conclut de (i) que YG non- $\epsilon P$ . Il en résulte que  $p \in Y^*$ .

Supposons à présent que p non- $\varepsilon X^*$ . Il existe par conséquent un entourage G de p tel que  $XG \varepsilon P$ . Il vient selon (i)  $0 \varepsilon P$ , d'où  $X^* \cdot (1 - X^*) \varepsilon P$ . Or, l'ensemble  $X^*$  étant fermé,  $1 - X^*$  est un entourage de p. On en conclut que p non- $\varepsilon X^{**}$ , d'où l'inclusion (2).

Supposons enfin que  $p \in GX^*$ . Donc H étant un entourage de p, on a HGX non- $\in P$  (puisque HG est un entourage de p). Il en résulte que  $p \in (GX)^*$ . Ainsi  $GX^* \subset (GX)^*$ . D'autre part, selon (1), l'inclusion  $GX \subset X$  entraîne  $(GX)^* \subset X^*$ , d'où  $G \cdot (GX)^* \subset GX^*$ , ce qui implique l'égalité (3).

L'égalité (3) montre que le fait qu'un ensemble X possède ou non une propriété au point p dépend de l'entourage de ce point; c'est donc un fait "local".

Remarquons enfin que la proposition (1) entraı̂ne (voir  $\S$  4, III) les formules suivantes:

(4) 
$$(XY)^* \subset X^* \cdot Y^*$$
 (5)  $(\prod_{\iota} X_{\iota})^* \subset \prod_{\iota} X_{\iota}^*$ 

$$(6) \sum_{t} X_{t}^{*} \subset (\sum_{t} X_{t})^{*}.$$

Conséquences de (i) et (ii):

(7) 
$$(X+Y)^* = X^* + Y^*$$
 (8)  $X^* - Y^* \subset (X-Y)^*$ 

En effet, si p non- $\varepsilon$   $X^*$ , il existe un entourage G de p tel que  $XG \varepsilon P$ . De même, si p non- $\varepsilon$   $Y^*$ , il existe un entourage H de p tel que  $YH \varepsilon P$ . Selon (i):  $XGH \varepsilon P$  et  $YGH \varepsilon P$ , d'où selon (ii):  $(X+Y) \cdot GH \varepsilon P$ , ce qui prouve que p non- $\varepsilon$   $(X+Y)^*$ . Donc  $(X+Y)^* \subset X^* + Y^*$ . L'inclusion inverse est un cas particulier de (6).

La formule (8) résulte de (7); cf. § 4, III, règle 3.

### § 8. Ensembles denses, frontières, non-denses.

- 1. Définitions. 1. X est un ensemble dense, lorsque  $\bar{X}=1^{-1}$ ).
- 2. X est un ensemble frontière, lorsque son complémentaire est dense, c. à d. lorsque  $\overline{1-X}=1$ .
- 3. X est un ensemble non-dense, lorsque sa fermeture est un ensemble frontière, c. à d. lorsque  $1-\overline{X}=1^2$ ).

Exemples. Dans l'espace des nombres réels, les nombres rationnels constituent un ensemble dense et frontière. Cependant, cet ensemble n'est pas non-dense.

Sur le plan, la circonférence d'un cercle est non-dense.

On voit aussitôt que tout sur-ensemble d'un ensemble dense est dense, tout sous-ensemble d'un ensemble frontière est frontière, tout sous-ensemble d'un ensemble non-dense est non-dense. La fermeture d'un ensemble non-dense est non-dense.

Tout ensemble non-dense est frontière. Inversement, tout ensemble frontière et fermé est non-dense.

Un ensemble frontière ne peut être ouvert que s'il est vide.

II. Conditions nécessaires et suffisantes. L'égalité  $\overline{1-X}=1$  équivaut à la formule  $\operatorname{Int}(X)=0$ . Les ensembles frontières peuvent donc être définis par la condition qu'ils ne contiennent aucun point intérieur ou encore, qu'ils ne contiennent aucun ensemble ouvert non vide. L'égalité  $\operatorname{Int}(X)=0$  étant équivalente à l'inclusion  $X\subset\operatorname{Fr}(X)$  (voir § 6, II (3)), on peut aussi définir un ensemble frontière comme ensemble contenu dans sa frontière ou encore, comme ensemble satisfaisant à l'inclusion  $X\subset\overline{1-X}$ . On en conclut que pour que  $\overline{X}$  soit un ensemble frontière, il faut et il suffit que l'on ait  $\overline{X}\subset\overline{1-\overline{X}}$  ou, ce qui revient au même, que

$$X \subset \overline{1-\overline{X}}$$
.

Cette dernière inclusion caractérise donc les ensembles nondenses.

<sup>1)</sup> G. Cantor, Math. Ann. 15 (1879), p. 2.

<sup>2)</sup> Cette notion remonte à P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie I, Tübingen 1882.

Une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble X soit non-dense est la suivante: chaque ensemble ouvert non vide contient un ensemble ouvert non vide et disjoint de X.

En effet, si X est non-dense, l'ensemble  $\overline{X}$ , comme ensemble frontière, ne contient aucun ensemble ouvert non vide. Donc, G étant un ensemble ouvert  $(\neq 0)$  arbitraire, l'ensemble  $G - \overline{X}$  est non vide, ouvert et disjoint de X.

D'autre part, si X n'est pas non-dense,  $\overline{X}$  n'est pas un ensemble frontière, donc Int  $(\overline{X}) \neq 0$ . Or, G étant un sous-ensemble ouvert  $(\neq 0)$  de Int  $(\overline{X})$ , il vient  $G \subset \operatorname{Int}(\overline{X}) \subset \overline{X}$ , d'où  $G \cdot \overline{X} \neq 0$ , donc  $GX \neq 0$  (voir § 5, III), ce qui prouve que l'ensemble ouvert non vide Int  $(\overline{X})$  ne contient aucun ensemble ouvert non vide qui soit disjoint de X.

III. Opérations. La somme d'un ensemble frontière et d'un ensemble non-dense est un ensemble frontière 1).

Soit, en effet,  $\overline{1-X}=1=\overline{1-\overline{Y}}$ . En tenant compte de la règle 3 du § 4, on conclut que

$$1-\overline{Y}=\overline{1-X}-\overline{Y}\subset \overline{(1-X)-\overline{Y}}=\overline{1-(X+\overline{Y})},$$

d'où  $1 = \overline{1 - \overline{Y}} \subset \overline{1 - (X + \overline{Y})}$  et finalement  $\overline{1 - (X + \overline{Y})} = 1$ .

Il en résulte que la somme de deux, donc d'un nombre fini d'ensembles non-denses est non-dense 2).

Car, X et Y étant non-denses, il en est de même des ensembles  $\overline{X}$  et  $\overline{Y}$ . D'après ce qui précède l'ensemble  $\overline{X} + \overline{Y}$  est frontière et, comme ensemble fermé, il est non-dense. Il en est de même de X + Y, puisque  $X + Y \subset \overline{X} + \overline{Y}$ .

 $\{X_t\}$  étant une famille d'ensembles ouverts relativement à la somme  $\sum\limits_{t} X_t$ , si chaque  $X_t$  est un ensemble frontière,  $\sum\limits_{t} X_t$  l'est également; si chaque  $X_t$  est non-dense,  $\sum\limits_{t} X_t$  l'est également.

C'est une conséquence des formules (i) et (ii) du § 6, IV, en y posant Int  $(X_i) = 0$  et Int  $(\overline{X_i}) = 0$  respectivement.

IV. Décomposition de la frontière. La frontière d'un ensemble se compose de deux ensembles frontières, notamment des ensembles  $X \cdot \overline{1-X}$  et  $\overline{X}-X$ .

La formule Fr  $(X) = X \cdot \overline{1 - X} + \overline{X} - X$  a été établie au § 6 (formule 6). Il suffit de prouver que l'ensemble  $X \cdot \overline{1 - X}$  est un ensemble frontière, car l'ensemble  $\overline{X} - X$  s'en obtient par substitution de 1 - X à X. Or, on a  $1 = \overline{1 - X} + 1 - \overline{1 - X} \subset \overline{1 - X} + \overline{1 - \overline{1 - X}} = \overline{1 - X + 1 - \overline{1 - X}} = \overline{1 - X \cdot \overline{1 - X}}$ , c. q. f. d.

Il est à remarquer que nous avons démontré, en même temps, que les ensembles frontières peuvent être définis comme les ensembles de la forme  $X \cdot \overline{1-X}$  (donc aussi comme ceux de la forme  $\overline{X}-X$ ).

V. Ensembles dont la frontière est non-dense. Si l'un des ensembles  $X \cdot \overline{1-X}$  ou  $\overline{X}-X$  est non-dense, la frontière  $\operatorname{Fr}(X)$  est non-dense, car, d'après III, elle est alors un ensemble frontière, donc, comme ensemble fermé, elle est non-dense.

En particulier, si X est fermé, on a  $\overline{X} - X = 0$ . Par conséquent la frontière d'un ensemble fermé est non-dense. De même, la frontière d'un ensemble ouvert est non-dense.

Afin d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que Fr(X) soit non-dense, remarquons d'abord, que les ensembles dont la frontière est non-dense constituent un corps, c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles de ce genre est encore un ensemble de ce genre  $^1$ ).

Cela résulte directement des formules 8, 9 et 4 du § 6, II et du fait que la somme de deux ensembles non-denses est non-dense.

<sup>1)</sup> tandis que la somme de deux ensembles frontières peut ne pas être un ensemble frontière: tel est le cas de l'ensemble des nombres rationnels et de celui des nombres irrationnels dans l'espace des nombres réels.

<sup>2)</sup> Cf. S. Janiszewski, Thèse (1911), p. 26.

<sup>1)</sup> Ainsi par exemple la frontière d'une différence de deux ensembles fermés est non-dense. Il en est encore de même des ensembles qui s'obtiennent des ensembles fermés par l'application itérée de la soustraction et de l'addition un nombre fini de fois. Une généralisation de ce fait aux opérations infinies sera traitée au § 12. Une autre famille importante d'ensembles ayant la frontière non-dense est celle des ensembles clairsemés (voir § 9). La notion d'ensemble à frontière non-dense correspond à celle de fonction ponctuellement discontinue (v. § 13, VI).

35

Pour que la frontière de X soit non-dense, il faut et il suffit que X soit une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense.

Considérons, en effet, l'identité

$$X = X - \overline{1 - X} + X \cdot \overline{1 - X} = \operatorname{Int}(X) + X \cdot \overline{1 - X}$$
.

Si  $\operatorname{Fr}(X)$  est non-dense, l'ensemble  $X\cdot \overline{1-X}$  l'est à plus forte raison. La formule précédente montre donc que X est une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense.

Remarquons, d'autre part, que N étant un ensemble nondense,  $\operatorname{Fr}(N)$  est aussi non-dense comme un sous-ensemble de l'ensemble  $\overline{N}$ , qui est non-dense. Par conséquent, si X est une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, donc de deux ensembles ayant la frontière non-dense,  $\operatorname{Fr}(X)$  est aussi non-dense, c. q. f. d.

Il résulte du théorème précédent que pour que  $\operatorname{Fr}(X)$  soit non-dense, il faut et il suffit que X soit une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense.

Car d'une part  $\operatorname{Fr}(X)=\operatorname{Fr}(1-X)$  et d'autre part, si X est une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, 1-X est une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense et réciproquement, puisque 1-(G+N)=(1-G)-N.

Dans le domaine des ensembles ayant la frontière non-dense les notions d'ensemble frontière et d'ensemble non-dense coïncident.

En effet, si X est un ensemble frontière de la forme X=G+N, l'ensemble ouvert G est vide, donc X est identique à l'ensemble non-dense N.

VI. Relativisation. Si  $X \subset E$ , X est par définition, dense, frontière, non-dense relativement à E, lorsqu'on a respectivement

$$\overline{X} \cdot E = E$$
,  $\overline{E - X} \cdot E = E$ ,  $\overline{E - \overline{X}} \cdot E = E$ ,

c. à d. lorsque  $E \subset \overline{X}$ ,  $E \subset \overline{E-X}$ ,  $E \subset \overline{E-X}$  respectivement.

D'après II, la condition que X soit frontière (resp. non-dense) relativement à E, s'exprime aussi par l'inclusion

$$X \subset \overline{E-X}$$
 (resp.  $X \subset \overline{E-X}$ ).

On voit aussitôt que

- 1) X est dense dans  $\overline{X}$ ; par conséquent  $\overline{X} X$  est frontière dans  $\overline{X}$ ; d'après § 6, II (12), l'ensemble X Int [Fr(X)] est simultanément dense et frontière dans Int [Fr(X)];
- 2) si X est dense dans E, X est dense dans chaque sous-ensemble de E (qui contient X); si X est frontière (ou non-dense) dans E, X l'est également relativement à chaque sur-ensemble de E;
- 3) si X est dense dans Y et Y dans Z, X est dense dans Z. En particulier, si X est dense dans Y, X est dense dans  $\overline{Y}$ .
  - 4) si X est non-dense dans  $\overline{E}$ , XE est non-dense dans E.

En effet, on a par hypothèse:  $X \subset \overline{E} - \overline{X}$ . Donc en vertu de la formule  $\overline{E} - \overline{X} = \overline{E} - \overline{X} \subset \overline{E} - \overline{X}$ , il vient  $X \subset \overline{E} - \overline{X}$ , d'où  $XE \subset \overline{E} - \overline{X} \subset \overline{E} - \overline{XE}$ , c. q. f. d.

5) G étant un ensemble ouvert, si X est frontière (non-dense), il en est de même de XG relativement à G, et de  $X\overline{G}$  relativement à  $\overline{G}$ .

En effet, si X est un ensemble frontière, on a  $X \subset \overline{1-X}$ , donc  $XG \subset \overline{1-X} \cdot G$  et, comme selon § 5, III,  $\overline{1-X} \cdot G \subset \overline{G-X}$ , il vient  $XG \subset \overline{G-X} = \overline{G-XG}$ .

D'une façon analogue, si X est non-dense, on a  $X \subset \overline{1-\overline{X}}$ , d'où  $XG \subset \overline{1-\overline{X}} \cdot G \subset \overline{G-\overline{X}} \subset \overline{G-\overline{XG}}$ .

En outre,  $X\overline{G}=XG+X\cdot(\overline{G}-G)$  et l'ensemble  $\overline{G}-G$ , donc  $X\cdot(\overline{G}-G)$ , étant selon 1) non-dense dans  $\overline{G}$ , le reste de notre énoncé résulte de III.

VII. Localisation. Par définition, X est frontière (non-dense) au point p, lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble XG est frontière (non-dense).

Ainsi p. ex., sur le plan, l'ensemble composé d'un cercle (l'intérieur y compris) et d'un segment n'ayant qu'un seul point p commun avec le cercle, est localement non-dense en chaque point du segment, sauf au point p, mais cet ensemble n'est non-dense en aucun point du cercle.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble frontière (non-dense) l'étant également, on peut, dans la définition précédente, remplacer le terme entourage par entourage ouvert (cf. § 7, V).

Pour que X soit non-dense au point p, il faut et il suffit que  $\overline{X}$  soit un ensemble frontière en ce point.

En effet, si X n'est pas non-dense au point p et si G est un ensemble ouvert contenant p, GX n'est pas non-dense; il existe, par conséquent, un ensemble ouvert H satisfaisant à la condition  $0 \neq H \subset \overline{GX}$ . Il vient (v. § 5, III):  $H = H \cdot \overline{GX} \subset \overline{HGX}$ , d'où  $HG \neq 0$  et, comme  $HG \subset G \cdot \overline{GX} \subset G \cdot \overline{X}$ , l'ensemble  $G \cdot \overline{X}$  n'est pas frontière, ce qui implique que  $\overline{X}$  n'est pas frontière au point p.

Inversement, si  $\overline{X}$  n'est pas frontière au point  $p \in G$ , il existe un ensemble ouvert H tel que  $0 \neq H \subset G \cdot \overline{X}$ . Donc  $H \subset G \cdot \overline{X} \subset \overline{GX}$ , ce qui montre que X n'est pas non-dense au point p.

 $\overline{\operatorname{Int}(X)}$  est l'ensemble des points en lesquels X n'est pas localement frontière;  $\overline{\operatorname{Int}(\bar{X})}$  est celui où X n'est pas localement nondense.

Soient, en effet,  $p \in \overline{\operatorname{Int}(X)}$  et G un entourage ouvert de p. L'inégalité  $G \cdot \overline{\operatorname{Int}(X)} \neq 0$  entraîne  $0 \neq G \cdot \operatorname{Int}(X) \subset GX$ , ce qui prouve que X n'est pas frontière au point p.

Inversement, si  $p \in 1 - \overline{\text{Int}(X)}$ , l'ensemble  $G = 1 - \overline{\text{Int}(X)}$  est un entourage ouvert de p tel que GX est frontière, car

$$Int (GX) = Int (G) \cdot Int (X) = [1 - \overline{Int (X)}] \cdot Int (X) = 0.$$

La deuxième partie de notre proposition résulte de la première en vertu de la proposition précédente.

L'ensemble des points de X où X est localement frontière (non-dense) est un ensemble frontière (non-dense).

En particulier, si X est en chacun de ses points localement frontière (non-dense), X est un ensemble frontière (non-dense).

On a, en effet,  $X - \overline{\text{Int}(X)} \subset X - \text{Int}(X) = X \cdot \overline{1 - X}$  et, l'ensemble  $X \cdot \overline{1 - X}$  étant (selon N° IV) un ensemble frontière, l'ensemble  $X - \overline{\text{Int}(X)}$  l'est également.

D'une façon analogue,  $X-\operatorname{Int}(\bar{X})\subset X-\operatorname{Int}(\bar{X})=X\cdot 1-\bar{X}\subset \bar{X}\cdot 1-\bar{X}$  et, ce dernier ensemble étant fermé et frontière, donc non-dense,  $X-\operatorname{Int}(\bar{X})$  est non-dense.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble non-dense étant nondense et la somme de deux ensembles non-denses l'étant également, la famille des ensembles non-denses est héréditaire et additive. On peut donc, dans les formules (1)—(7) du § 7, V, substituer  $\overline{\text{Int}(\overline{X})}$  à  $X^*$ . Il vient, en particulier:

(i) 
$$\overline{\operatorname{Int}(\overline{X})} + \overline{\operatorname{Int}(\overline{Y})} = \overline{\operatorname{Int}(\overline{X} + \overline{Y})}, \quad \sum_{i} \overline{\operatorname{Int}(\overline{X}_{i})} \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{\sum} X_{i})}.$$

De la proposition 5 du No précédent nous concluons que:

(ii) G étant un ensemble ouvert et X un ensemble frontière (nondense) dans un point p, XG l'est au point p relativement à G (si  $p \in G$ ) et  $X \cdot \overline{G}$  l'est relativement à  $\overline{G}$  (si  $p \in \overline{G}$ ).

En effet, il existe par hypothèse un entourage H de p tel que HX est frontière (non-dense). Donc selon 5 (où l'on substitue HX à X), HGX est frontière (non-dense) relativement à G et  $H\overline{G}X$  l'est relativement à  $\overline{G}$ ; de plus, les ensembles HG et  $H\overline{G}$  sont des entourages de p relatifs à G et à  $\overline{G}$  respectivement.

VIII. Domaines fermés <sup>1</sup>). Un ensemble X est dit un domaine fermé, lorsqu'il est fermé et n'est localement non-dense en aucun de ses points; autrement dit (v. N° VII), lorsque  $X = \overline{\text{Int}(X)}$ , ou encore, lorsque  $X = \overline{1 - \overline{1 - X}}$ .

Les domaines fermés peuvent être définis aussi comme les fermetures des ensembles ouverts  $^2$ ). En effet, la formule précédente montre que chaque domaine fermé est la fermeture d'un ensemble ouvert. Inversement, si G est ouvert et  $X = \overline{G}$ , G est un sousensemble ouvert de X. On a par conséquent  $G \subset \operatorname{Int}(X) \subset X$ , d'où  $\overline{G} \subset \operatorname{Int}(X) \subset \overline{X} = \overline{G}$ , donc  $X = \operatorname{Int}(X)$ .

L'inclusion  $\operatorname{Fr}(X) \subset \operatorname{Int}(X)$  caractérise les domaines fermés parmi les ensembles fermés.

Elle est, en effet, satisfaite, si X est un domaine fermé, puisque  $\operatorname{Fr}(X) \subset X$ . Inversement, si  $\operatorname{Fr}(X) = X \cdot \overline{1-X} \subset \overline{\operatorname{Int}(X)}$ , il vient  $X \subset \overline{\operatorname{Int}(X)}$ , puisque  $X - \overline{1-X} \subset \overline{\operatorname{Int}(X)}$ . Donc  $X \subset \overline{\operatorname{Int}(X)} \subset X$ .

<sup>1)</sup> Pour ce terme cf. H. Lebesgue, Fund. Math. 2 (1921), p. 273. Pour les théorèmes voir mes notes de Fund. Math. 3 (1922), pp. 192 - 5 et Fund. Math. 5 (1924) p. 117.

<sup>2)</sup> L'ensemble  $\overline{\operatorname{Int}(X)}$  étant un domaine fermé, il en résulte que  $\overline{\operatorname{Int}\operatorname{Int}(X)} = \overline{\operatorname{Int}(X)}$ , donc que  $1-\overline{1-1-\overline{X}} = \overline{1-\overline{X}}$ . Cette identité implique que le nombre d'ensembles qui s'obtiennent de X à l'aide des opérations  $\overline{X}$  et 1-X est fini (voir § 4,  $\overline{Y}$ ).

La somme de deux domaines fermés est un domaine fermé. Plus généralement:  $\{D_i\}$  étant une famille de domaines fermés, l'ensemble  $\overline{\sum D_i}$  est un domaine fermé. Ce sont des conséquences de VII (i)

X étant un sous-ensemble d'un domaine fermé D et p étant un point de D, la condition nécessaire et suffisante pour que X soit frontière (non-dense) au point p, est que X le soit relativement à D en ce point.

En effet, la condition est nécessaire, car on peut, dans VII (ii), remplacer  $\overline{G}$  par D. Inversement, si G est ouvert et GX est frontière (non-dense) relativement à D, il l'est relativement à l'espace entier, ce qui prouve que la condition est suffisante.

On voit ainsi que, dans les mêmes hypothèses concernant X et D, la propriété de X d'être un ensemble frontière, non-dense, un domaine fermé équivant respectivement à la même propriété relativisée par rapport à D, puisque la première (la deuxième) propriété signifie que X est en chacun de ses points localement frontière (non-dense) et la troisième propriété signifie que X n'est non-dense en aucun de ses points.

On en conclut aussi que la propriété d'être un domaine fermé relatif est transitive, c. à d. que, si X est un domaine fermé par rapport à Y et Y par rapport à Z, X l'est par rapport à Z.

IX. Domaines ouverts. Un domaine ouvert est le complémentaire d'un domaine fermé.

Les domaines ouverts peuvent être caractérisés aussi par l'égalité  $X=\operatorname{Int}(\overline{X})$ . En effet, si l'on a  $X=\operatorname{Int}(\overline{X})=1-1-\overline{X}$ , l'ensemble X, comme complémentaire du domaine fermé  $1-\overline{X}$ , est un domaine ouvert. Inversement, si X est un domaine ouvert est si l'on pose D=1-X, il vient  $1-\overline{1-\overline{X}}=1-\overline{1-\overline{1-D}}=1-D=X$ , puisque D est un domaine fermé.

On peut aussi définir les domaines ouverts comme les ensembles ouverts satisfaisant à l'inclusion  $\operatorname{Fr}(X) \subset \overline{\operatorname{Int}(1-X)}$ . Car  $\operatorname{Fr}(X) = \operatorname{Fr}(1-X)$  et, pour que 1-X soit un domaine fermé, il faut et il suffit que  $\operatorname{Fr}(1-X) \subset \overline{\operatorname{Int}(1-X)}$ .

La somme de deux domaines fermés étant un domaine fermé, on en conclut que le *produit* de deux domaines ouverts est un domaine ouvert.

## § 9. Points d'accumulation.

I. Définitions. p est un point d'accumulation de l'ensemble X, lorsque  $p \in \overline{X-p}$ . L'ensemble X' des points d'accumulation de X est dit l'ensemble dérivé de X.

p est un point *isolé* de X, lorsque  $p \in X - X^{-1}$ ).

[§ 9, III]

Exemples. Chaque nombre réel est point d'accumulation de l'ensemble de tous les nombres réels. Chaque nombre naturel est isolé dans l'ensemble de tous les nombres naturels; le dérivé de cet ensemble est vide. L'ensemble A des nombres 1/n + 1/m (n = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...) a pour dérivé l'ensemble composé de nombres 1/n et du nombre 0; le deuxième dérivé (c. à d. le dérivé du dérivé) se compose du nombre 0 seul; le troisième est vide.

Dans le Chapitre II nous allons étudier les dérivés d'ordre transfini.

II. Equivalences. Pour que  $p \in X$  il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à l'inégalité  $XE - p \neq 0$ .

Pour que p soit un point isolé de X, il faut et il suffit qu'il existe un entourage E de p tel que XE = p.

· Car, d'après le § 7, II, la condition  $p \in \overline{X-p}$  s'exprime par l'inégalité  $(X-p) \cdot E \neq 0$ .

D'après la même proposition on peut remplacer la terme entourage par entourage ouvert.

Les termes "l'inégalité  $XE-p\neq 0$ " peuvent être remplacés par la condition "XE est infini".

En effet, si E est un entourage de p tel que l'ensemble XE est fini, alors XE-p est fermé et l'ensemble A=E-(XE-p) est un entourage de p tel que XA-p=0.

Ceci établi, on en conclut que  $p \in X'$  veut dire: X n'est pas localement fini au point p.

III. Calcul <sup>2</sup>). La propriété d'être un ensemble fini étant héréditaire et additive (§ 7, V), on peut appliquer à l'opération  $X^{i}$  les formules du § 7 concernant la localisation. Il vient, en particulier:

<sup>1)</sup> Notions dues à G. Cantor, Math. Ann. 5 (1872), p. 129.

Cantor employait en outre les termes "cohérence" et "adhérence" pour désigner les ensembles  $X\cdot X'$  et X-X' respectivement.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Des formules analogues concernant l'opération  $X \cdot X'$  (la cohérence de X) ont été établies par M. Zarycki, Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, Trans. Amer. Math. Soc. 30, p. 498.

41

2) 
$$X'-Y'\subset (X-Y)'$$

4) 
$$(\prod_{t} X_{t})^{t} \subset \prod_{t} X_{t}^{t}$$
 5)  $\sum_{t} X_{t}^{t} \subset (\sum_{t} X_{t})^{t}$ 

$$\sum X_i \subset (\sum X_i)$$

$$6) \quad \overline{X'} = X$$

7) 
$$X \subset Y$$
 implique  $X' \subset Y'$ .

On a, en outre, la formule

8) 
$$\bar{X} = X + X'.$$

En effet, si  $p \in \overline{X}$  et p non- $\in X$ , on en tire X - p = X et  $p \in \overline{X-p}$ ; par conséquent  $p \in X'$ . Inversement, si  $p \in X'$ , on a  $p \in \overline{X-p} \subset \overline{X}$ .

En vertu de l'identité évidente p'=0, on conclut de 1 que le dérivé de chaque ensemble fini est vide et que

9) 
$$(X-p)' = X' = (X+p)',$$

c. à d. qu'on n'altère pas le dérivé d'un ensemble, en ajoutant à cet ensemble ou en lui enlevant un nombre fini de points.

IV. Ensembles isolés. Un ensemble composé exclusivement de points isolés est dit ensemble isolé.

Tout ensemble fini est isolé. Tout sous-ensemble d'un ensemble isolé est isolé.

L'ensemble X-X' est isolé, car chaque point de X-X', comme point isolé de X, est un point isolé de X - X'.

La condition pour que p soit un point isolé de l'espace s'exprime par la formule  $p \text{ non-} \in \overline{1-p}$ , qui veut dire que le point p constitue un ensemble ouvert. Pour que l'espace soit isolé, il faut et il suffit qu'on ait 1' = 0.

V. Ensembles denses en soi. X est dit dense en soi, lorsque X ne contient aucun point isolé, c. à d. lorsque  $X \subset X^{(1)}$ .

Si X est fermé et dense en soi, X est dit parfait; cette condition peut être exprimée par l'égalité X = X' (puisque la condition pour que X soit fermé s'exprime d'après 8 par l'inclusion

1. Si X est dense en soi,  $\overline{X}$  est parfait.

Car, par hypothèse,  $X \subset X'$ , d'où  $X' = X + X' = \overline{X}$  d'après 8. En appliquant 1 et 3, il vient  $(\overline{X})^i = X^i + X^{ii} = X^i = \overline{X}$ , donc  $(\overline{X})^i = \overline{X}$ .

- 2. La somme d'un nombre arbitraire d'ensembles denses en soi est dense en soi (en vertu de la formule 5).
- 3. Si l'espace est dense en soi, chaque ensemble ouvert, ainsi aue chaque ensemble dense, est dense en soi.

Posons, en effet,  $1 \subset 1$ '. G étant ouvert, on a G=1-F et  $F' \subset F$ . Il vient  $1 - F \subset 1 - F' \subset 1' - F' \subset (1 - F)' = G'$ .

Soit, d'autre part,  $\overline{X}=1$ . Donc X+X'=1, d'où X'+X''=1et, comme  $X'' \subset X'$  et  $1 \subset 1'$ , on en tire  $1 \subset X'$ , donc  $X \subset X'$ .

4. Si X est dense et frontière, l'espace est dense en soi. Par hypothèse  $\overline{X} = \overline{1 - X} = 1$ . Soit  $p \in X$ ; donc  $1 - X \subset 1 - p$ , d'où  $1 = \overline{1 - X} \subset \overline{1 - p}$  et par suite  $p \in \overline{1 - p}$ , donc  $p \in 1$ . Ainsi  $X \subset 1'$ . Par raison de symétrie  $1 - X \subset 1'$ . Donc  $1 \subset 1'$ .

VI. Ensembles clairsemés. X est dit clairsemé<sup>2</sup>), lorsque X ne contient aucun ensemble dense en soi et non vide.

Tout ensemble isolé est clairsemé. Tout sous-ensemble d'un ensemble clairsemé et clairsemé.

La fermeture d'un ensemble clairsemé (même d'un ensemble isolé) peut ne pas être clairsemée. En effet, écrivons chaque nombre rationnel de l'intervalle 01 en fraction irréductible p/q; l'ensemble des points (p/q, 1/q) du plan est isolé, bien que sa fermeture contienne l'intervalle 01 tout entier.

1. Dans un espace dense en soi chaque ensemble clairsemé est non-dense. Son complémentaire est donc dense en soi.

En effet, si X n'est pas non-dense, l'ensemble  $G = \operatorname{Int}(\overline{X})$ est un ensemble ouvert non vide. Donc  $G = G\overline{X} \subset \overline{GX}$ , ce qui prouve que GX est dense dans l'ensemble G, qui-comme ensemble ouvert-est selon V, 3, dense en soi. Selon la II-ème partie de la même proposition, GX est dense en soi. Donc X n'est pas clairsemé. D'après la proposition V, 3, le complémentaire d'un ensemble frontière est dense en soi.

2. La somme de deux ensembles clairsemés est clairsemée.

Supposons, en effet, que X et Y soient clairsemés et que Z soit dense en soi et tel que  $0 \neq Z \subset X + Y$ . Donc  $Z - ZX \subset Y$ et. Z étant dense en soi et ZX étant clairsemé,  $Z - ZX \neq 0$ . De

<sup>1)</sup> G. Cantor, Math. Ann. 23 (1884), p. 471.

<sup>2) &</sup>quot;Separierte Menge" de G. Cantor, ibid.

plus, en vertu de la proposition précédente (où l'on pose 1=Z), Z-ZX est dense en soi. Y ne peut donc être clairsemé.

3. L'espace se compose de deux ensembles disjoints dont l'un 1) est parfait et l'autre clairsemé (bien entendu, l'un ou l'autre peut être vide).

Soit, en effet, P la somme de tous les ensembles denses en soi. Selon V, 2 et 1, P et  $\overline{P}$  sont denses en soi; donc, chaque ensemble dense en soi étant sous-ensemble de P, il vient  $\overline{P} \subset P$ , ce qui prouve que P est fermé. Comme fermé et dense en soi, P est parfait. Enfin, 1-P ne contient aucun ensemble dense en soi.

4. La frontière d'un ensemble clairsemé est non-dense.

D'après § 8, V, il suffit de prouver que l'ensemble  $\overline{X}-X$  est non-dense. Or, supposons que G soit un ensemble ouvert tel que  $0 \neq G \subset \overline{X}-X$ . Il vient  $G \subset \overline{X}-X \cdot G \subset \overline{GX}-GX \subset \overline{GX}-GX$ , d'où  $0 \neq GX \subset \overline{GX}-GX$ , ce qui prouve que GX est dense et frontière relativement à  $\overline{GX}$ . Selon V, 4, l'ensemble  $\overline{GX}$  est dense en soi, d'où (en raison de V, 3) GX est dense en soi. L'ensemble X ne saurait donc être clairsemé.

Ceci établi, on conclut de § 8, V qu'un ensemble clairsemé est une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ainsi qu'une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense); si un ensemble clairsemé est un ensemble frontière, il est non-dense.

5. La condition nécessaire et suffisante pour que X soit clair-semé est que, pour tout ensemble parfait P, XP soit non-dense dans  $P^2$ ).

Soit, en effet, X un ensemble clairsemé. D'après 1, si P est parfait (ou, plus généralement, dense en soi) et si P est considéré comme l'espace, l'ensemble XP y est non-dense. La condition est donc nécessaire.

Pour prouver qu'elle est suffisante, admettons que X ne soit pas clairsemé. Soit D un ensemble dense en soi et non vide.

contenu dans X. Posons  $P = \overline{D}$ . La condition du théorème supposée satisfaite,  $X\overline{D}$  est non-dense dans  $\overline{D}$ . Donc (§ 8, VI, 4), XD est non-dense dans D, ce qui est impossible, car  $XD = D \neq 0$ .

Remarquons finalement que dans l'énoncé 5 le terme parfait peut être remplacé par dense en soi.

## § 10. Ensembles de I-re catégorie.

I. Définition. Un ensemble et dit de I-re catégorie, lorsqu'il est somme d'une suite dénombrable d'ensembles non-denses 1).

Exemples. Dans l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des nombres rationnels est évidemment de I-re catégorie. Cependant l'ensemble des nombres irrationnels ne l'est pas; cela résulte du fait que l'espace  $\mathcal E$  des nombres réels n'est pas de I-re catégorie (par rapport à soi-même).

Ce dernier énoncé  $^2$ ) peut être établi comme suit: soit  $Q=\sum_{n=1}^{\infty}N_n$  un ensemble de I-re catégorie  $(N_n$  non-dense). L'ensemble  $N_1$  étant non-dense, il existe un intervalle fermé  $I_1$  tel que  $I_2 \cdot N_1 = 0$ . Procédons par induction: étant donnée une suite finie d'intervalles, chacun emboîté dans le précédent,  $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{n-1}$ , soit  $I_n$  un intervalle tel que l'on ait  $I_n \in I_{n-1}$  et  $I_n \cdot N_n = 0$  (un intervalle de ce genre existe selon § 8, II, puisque  $N_n$  est non-dense). D'après un théorème classique d'A s c o l i, il existe un point commun à tous les  $I_n$ ,  $n=1,2,\ldots$ ; ce point n'appartient donc pas à Q et par suite  $C \neq Q$ .

La notion d'ensemble de I-re catégorie intervient fréquemment dans la théorie des fonctions; citons comme exemple le théorème suivant (voir § 27, X): étant donnée une suite convergente de fonctions continues  $\{f_n(x)\}$ , les points de discontinuité de la fonction  $f(x) = \lim_{n = \infty} f_n(x)$  constituent un ensemble de I-re catégorie.

II. Propriétés. La famille des ensembles de I-re catégorie est héréditaire et additive (même au sens dénombrable), c. à d. que chaque sous-ensemble d'un ensemble de I-re catégorie est de I-re catégorie et que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de I-re catégorie est encore de I-re catégorie.

<sup>1)</sup> nommé noyau de l'espace. Des règles du calcul concernant le noyau, analogues à celles de la fermeture, du dérivé etc. ont été établies par M. Zarycki, *Über den Kern einer Menge*, Jahresber. d. D. Math. Ver. 39 (1930), p. 154.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Cf. M. Fréchet, *Quelques propriétés des ensembles abstraits*, Fund. Math. 10 (1927), p. 330. Voir aussi A. Denjoy, Journ. de Math. 1916, où cette condition est admise comme définition des ensembles clairsemés.

<sup>1)</sup> Notion introduite par R. Baire, Ann. di Mat. (3) 3 (1899), p. 65. M. A. Denjoy emploie le terme "gerbé" pour les ensembles de I-re catégorie et le terme "résiduel" pour leurs complémentaires. Voir Journ. de Math. (7), 1 (1915), p. 123-5.

<sup>2)</sup> C'est un cas particulier du théorème de Baire (voir plus loin Chap. III, § 30, IV).

[§ 10, V]

Tout ensemble frontière  $F_{\sigma}$  est de I-re catégorie.

En effet, si l'ensemble  $X = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$  est un ensemble frontière, chacun des ensembles,  $F_n$  l'est également; comme ensemble frontière et fermé,  $F_n$  est non-dense.

Tout ensemble de I-re catégorie est contenu dans un ensemble  $\mathbf{F}_a$  de I-re catégorie.

On a, en effet,  $X = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_n}$  et, l'ensemble  $N_n$  étant non-dense,  $\overline{N_n}$  l'est également (voir § 8, I).

III. Théorème sur l'additivité.  $\{X_{\iota}\}$  étant une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles ouverts relativement à la somme  $S = \sum_{\iota} X_{\iota}$  si chaque  $X_{\iota}$  est un ensemble de I-re catégorie, S l'est également  $^{1}$ ).

Soit, en effet,  $G_1, G_2, \ldots, G_{\alpha}, \ldots$  une suite (transfinie) bien ordonnée d'ensembles ouverts non vides et disjoints, assujettie aux deux conditions:  $1^0$   $SG_{\alpha}$  est de I-re catégorie,  $2^0$  la suite est saturée, c. à d. qu'il n'existe aucun ensemble G ouvert, non vide, disjoint de tous les termes de la suite considérée et tel que SG soit de I-re catégorie.

On a évidemment  $S = \sum_{\alpha} SG_{\alpha} + (S - \sum_{\alpha} G_{\alpha})$ .

Le théorème sera démontré, lorsque nous aurons prouvé que: 1.  $\sum_{\alpha} SG_{\alpha}$  est de I-re catégorie, 2.  $S - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$  est non-dense.

1) L'ensemble  $SG_{\alpha}$  étant par hypothèse de I-re catégorie, on a  $SG_{\alpha}=N_{1}^{\alpha}+N_{2}^{\alpha}+...+N_{n}^{\alpha}+...$ , où les ensembles  $N_{n}^{\alpha}$  (n=1,2,...) sont non-denses. Posons  $N_{n}=N_{1}^{1}+N_{n}^{2}+...+N_{n}^{\alpha}+...$  Par conséquent  $\sum_{\alpha}SG_{\alpha}=N_{1}+N_{2}+...+N_{n}+...$ 

Il s'agit de prouver que  $N_n$  est non-dense. Or, les ensembles  $G_{\alpha}$  étant disjoints, l'inclusion  $N_n^{\alpha} \subset G_{\alpha}$  entraı̂ne  $N_n^{\alpha} \cdot G_{\beta} = 0$  pour tout  $\beta \neq \alpha$ . Donc  $N_n^{\beta} = N_n^{\beta} \cdot G_{\beta} = \sum_{\alpha} N_n^{\alpha} \cdot G_{\beta} = N_n \cdot G_{\beta}$ , ce qui

prouve que l'ensemble  $N_n^{\beta}$  est ouvert dans  $N_n$ . En appliquant le théorème du § 8, III, d'après lequel la somme d'ensembles ouverts dans elle et non-denses est elle-même non-dense, on conclut que l'ensemble  $N_n$  est non-dense.

2) Pour montrer que  $S-\sum\limits_{\alpha}G_{\alpha}$  est non-dense, il suffit de prouver que  $1-\sum\limits_{\alpha}G_{\alpha}$  est non-dense, donc, ce dernier ensemble étant fermé, que  $1-\sum\limits_{\alpha}G_{\alpha}$  est un ensemble frontière.

Supposons, par contre, que H soit un ensemble ouvert tel que  $0 \neq H \subset 1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ . Par définition de la suite  $\{G_{\alpha}\}$ , l'ensemble SH n'est pas de I-re catégorie. Soit donc  $X_{t}$  un ensemble tel que  $HX_{t} \neq 0$ . Considérons l'ensemble ouvert  $G = H - \overline{S - X_{t}}$ .

Or, SG est de I-re catégorie, car  $X_t$  étant ouvert dans S, on a  $X_t = S - \overline{S - X_t}$ , donc  $SG = SH - \overline{S - X_t} = HX_t \subset X_t$ . D'autre part,  $G \neq 0$ , car, comme nous venons de prouver,  $0 \neq HX_t \subset G$ . Enfin,  $G \cdot G_{\alpha} = 0$ , quel que soit  $\alpha$ , puisque  $G \subset H \subset 1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ .

On parvient ainsi à une contradiction avec la définition de la suite  $\{G_{\alpha}\}$ .

- IV. Relativisation. 1) Si X est de I-re catégorie relativement à E, X l'est également relativement à chaque sur-ensemble de E.
- 2) Si X est de I-re catégorie relativement à  $\overline{E}$ , XE est de I-re catégorie relativement à E.
- 3) G étant un ensemble ouvert, si X est de I-re catégorie, XG l'est relativement à G et X  $\overline{G}$  relativement à  $\overline{G}$ .

Ces trois propositions sont des conséquences immédiates des propositions § 8, VI, 2, 4 et 5.

V. Localisation. Par définition, X est de l-re catégorie dans un point p, lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble XG est de l-re catégorie.

L'ensemble des points où X n'est pas de I-re catégorie (points où X est de "deuxième" catégorie) sera désigné par D(X).

La famille des ensembles de I-re catégorie étant héréditaire et additive, on peut substituer D(X) à  $X^*$  dans le § 7, V. On en

<sup>1)</sup> S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. 16 (1930) p. 395.

[§ 10, V]

conclut d'abord que, dans la définition précédente, le terme entourage peut être remplacé par entourage ouvert. Puis, on a les relations suivantes:

1) 
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

2) 
$$D(X) - D(Y) \subset D(X - Y)$$

3) 
$$D(\prod X_i) \subset \prod D(X_i)$$

3) 
$$D\left(\prod_{i}X_{i}\right) \subset i\prod_{i}D\left(X_{i}\right)$$
 4)  $\sum_{i}D\left(X_{i}\right) \subset D\left(\sum_{i}X_{i}\right)^{1}$ 

5) 
$$X \subset Y$$
 implique  $D(X) \subset D(Y)$ 

6) si G est ouvert, 
$$G \cdot D(X) = G \cdot D(GX)$$
.

D'après le théorème du Nº III, si X est en chacun de ses points de I-re catégorie, X est un ensemble de I-re catégorie. En effet, par hypothèse, chaque point p de X appartient à un ensemble ouvert  $G_p$  tel que  $X \cdot G_p$  est de I-re catégorie. X est donc une somme d'ensembles ouverts dans X qui sont de I-re catégorie et d'après le théorème précité, X est lui-même de I-re catégorie 2). On parvient ainsi à l'équivalence:

7) 
$$\{X \text{ est de } I\text{-re catégorie}\} \equiv \{X \cdot D(X) = 0\} \equiv \{D(X) = 0\}.$$

Car, l'égalité D(X) = 0 entraîne  $X \cdot D(X) = 0$  et celle-ci implique, comme nous venons de voir, que X est de I-re catégorie. Inversement, il est évident que si X est de I-re catégorie, on a D(X)=0.

De là nous concluons que

8) 
$$D[X-D(X)] = 0$$
,

c. à d. que les points de X où X est de I-re catégorie constituent un ensemble de I-re catégorie. En effet, selon 5) on a  $D[X-D(X)] \subset D(X)$ ,

donc  $[X-D(X)] \cdot D[X-D(X)] \cap [X-D(X)] \cdot D(X) = 0$ , d'où la formule 8) en raison de 7).

La formule 8), rapprochée de 2), implique aussitôt que D(X) - D[D(X)] = 0, donc que  $D(X) \subset D[D(X)]$ . L'inclusion inverse étant vraie selon § 7, V, (2), on en tire:

$$D[D(X)] = D(X).$$

L'ensemble des points où X n'est pas non-dense étant égal (selon § 8, VII) à Int  $(\overline{X})$ , il vient:

10) 
$$D(X) \subset \overline{\operatorname{Int}(\bar{X})} \subset \bar{X}.$$

En tenant compte du fait que D(X) est fermé (§ 7, V). on déduit de 10) la double inclusion  $D[D(X)] \subset \overline{\operatorname{Int}[D(X)]} \subset D(X)$ , d'où en vertu de 9)

11) 
$$D(X) = \overline{\operatorname{Int}[D(X)]},$$

ce qui prouve que D(X) est un domaine fermé (§ 8, VIII). Ainsi  $D(X) \neq 0$  implique que X n'est de I-re catégorie en aucun point de l'ensemble ouvert non vide Int[D(X)].

12) si 
$$D(Y) = 0$$
, on a  $D(X + Y) = D(X) = D(X - Y)$ .

c. à d. que X reste de I-re catégorie au point p, si on y ajoute ou en enlève un ensemble de points de I-re catégorie. Cette proposition est une conséquence immédiate des formules 1), 2) et 5).

13) l'ensemble 
$$D(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) - \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n)$$
 est non-dense.

Il s'agit de prouver que, G étant un ensemble ouvert non vide, il existe un ensemble ouvert non vide H tel que  $H \cdot D(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) - \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) = 0$  et  $H \subset G$ .

Or, en cas où, pour chaque n, on a  $G \cdot D(X_n) = 0$ , il vient  $GX_n \subset X_n - D(X_n)$ , donc  $G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} [X_n - D(X_n)]$ , de sorte que  $G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n$  est selon 8) de I-re catégorie. Par conséquent  $D(G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$ ,

<sup>1)</sup> L'égalité peut ne pas avoir lieu: soit par ex. dans l'intervalle  $0 \le x \le 1$ ,  $X_n$  l'intervalle  $1/n \leqslant x \leqslant 1$ . Comp. toutefois 13, p. 47.

<sup>2)</sup> Cette proposition se laisse établir d'une façon plus directe (sans avoir recours au théor. du No III), lorsqu'on suppose que l'espace admet une base dénombrable composée d'ensembles ouverts  $R_1,R_2,\ldots$ , c. à d. que chaque ensemble ouvert s'obtient par la réunion d'un certain nombre des  $\boldsymbol{R}_n$  (nous ferons cette hypothèse au Chap. II, § 17). En effet, dans cette hypothèse, l'ensemble ouvert  $G_p$  peut être remplacé par un  $R_{n(p)}$  et,  $X \cdot R_{n(p)}$  étant de I-re catégorie, il en est de même de la somme dénombrable  $\sum X \cdot R_{n(p)} = X$ .

ce qui implique en vertu de 6) que  $G \cdot D(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$  et, en posant H = G, on obtient l'égalité demandée.

Supposons donc qu'il existe un n tel que  $G \cdot D(X_n) \neq 0$ . Posons  $H = G \cdot \text{Int}[D(X_n)]$ . D'après 11) on a  $H \neq 0$  (voir § 5, III) et comme  $H \subset D(X_n)$ , H satisfait à l'égalité demandée.

#### VI. Formules de décomposition:

14) 
$$X = [X - D(X)] + X \cdot D(X),$$

15) 
$$X = X \cdot \overline{X - D(X)} + [X - \overline{X - D(X)}].$$

Ces formules représentent une décomposition de X en deux parties disjointes dont la première est de I-re catégorie et la deuxième n'est de I-re catégorie en aucun de ses points; en outre, dans la formule 14) le premier sommande est ouvert relativement à X et dans la formule 15) il est fermé.

En effet, d'après la formule 8) l'ensemble X-D(X) est de I-re catégorie, donc d'après 12):  $D[X \cdot D(X)] = D(X)$ , d'où  $X \cdot D(X) \subset D(X) = D[X \cdot D(X)]$ , ce qui prouve que l'ensemble  $X \cdot D(X)$  n'est de I-re catégorie en aucun de ses points.

D'autre part, l'ensemble  $X\cdot \overline{X-D\left(X\right)}$  est de I-re catégorie, comme somme des deux ensembles  $X\cdot D\left(X\right)\cdot \overline{X-D\left(X\right)}$  et  $[X-D\left(X\right)]\cdot \overline{X-D\left(X\right)}$ , dont le premier est non-dense, en tant que sous-ensemble de l'ensemble non-dense  $D\left(X\right)\cdot \overline{1-D\left(X\right)}=\mathrm{Fr}\left[D\left(X\right)\right]$ , et le deuxième est de I-re catégorie, en tant que sous-ensemble de l'ensemble  $X-D\left(X\right)$  (cf. § 8, V et 8).

L'ensemble  $X \cdot \overline{X - D(X)}$  étant de I-re catégorie, on conclut de 12) que  $D[X - \overline{X - D(X)}] = D(X)$  et il vient:  $X - \overline{X - D(X)} \subset X - [X - D(X)] = X \cdot D(X) \subset D(X) = D[X - \overline{X - D(X)}]$ , ce qui prouve que l'ensemble  $X - \overline{X - D(X)}$  n'est de I-re catégorie en aucun de ses points.

16) Dans un espace dense en soi chaque ensemble Z de puissance  $\aleph_1$  qui n'est pas de I-re catégorie se compose d'une famille indénombrable d'ensembles disjoints dont aucun n'est de I-re catégorie  $^1$ ).

En effet, d'après un théorème de la Théorie générale des ensembles  $^1$ ), si Z est un ensemble de puissance  $\aleph_1$  et N est une famille de sous-ensembles de Z telle que, pour chaque suite  $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$  d'ensembles appartenant à N, la diffé-

rence  $Z - \sum_{n=1}^{\infty} A_n$  est indénombrable, il existe une infinité indénombrable de sousensembles de Z disjoints et n'appartenant pas à N.

Désignons donc par N la famille des sous-ensembles de Z de I-re catégorie. Chaque point individuel étant un ensemble de I-re cat. (puisque l'espace est dense en soi), on conclut du théorème précédent qu'il existe une infinité indénombrable de sous-ensembles de Z, disjoints et dont aucun n'est de I-re catégorie. En augmentant l'un de ces sous-ensembles de tous les points de Z qui n'appartiennent pas aux autres, on obtient la décomposition demandée.

## § 11. Propriété de Baire.

I. Définition. X jouit de la propriété de Baire (au sens large), en symboles:  $X \in B$ , lorsque X est de la forme

$$X = G - P + R$$

où G est ouvert et P et R sont des ensembles de I-re catégorie 2).

Les ensembles que l'on rencontre "pratiquement" jouissent toujours de la propriété de Baire; d'ailleurs, il en existent qui ne la possèdent pas, voir N°IVa. Le rôle de la propriété de Baire en Topologie est analogue à celui de la mesurabilité (d'ensembles ou de fonctions) en Analyse. Nous reviendrons sur ces questions au Chap. III, § 36.

Dans la définition précédente l'ensemble ouvert G peut être remplacé par l'ensemble fermé F.

En effet, si X = G - P + R et si l'on pose  $F = \overline{G}$  et  $P_1 = P + \overline{G} - G$ , il vient  $X = F - P_1 + R$ , où F est fermé et  $P_1$  et R sont de I-re catégorie, puisque l'ensemble  $\overline{G} - G$  est non-dense, comme frontière d'un ensemble ouvert (voir § 8, V).

Inversement, si X = F - P + R, on pose G = Int(F) et  $R_1 = F - \text{Int}(F) - P + R$  et il vient  $X = G - P + R_1$ , où  $R_1$  est

<sup>1)</sup> Théorème de M. S. Ulam, Über gewisse Zerlegungen von Mengen. Fund. Math. 20 (1933), p. 222.

<sup>1)</sup> Théorème de M. S. Ulam, Fund. Math. 16 (1930), p. 145. Ce théorème a été généralisé récemment par M. Sierpiński à tous les alefs inférieurs au premier alef "inaccessible", ce qui permet de généraliser d'une façon analogue le théorème du texte; v. W. Sierpiński, Fund. Math. 20, p. 214.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Cette notion se rattache à la Thèse de R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899). M. Lebes gue appelle les ensembles de ce genre *"ensembles Z"*; voir Journ. de math. s. 6, vol. 1, p. 186.

C. Kuratowski, Topologie I.

50

[§ 11, IV]

de I-re catégorie, puisque l'ensemble  $F-\operatorname{Int}(F)=F\cdot \overline{1-F}$  est non-dense, comme frontière d'un ensemble fermé.

II. Généralités. Evidemment chaque ensemble de l-re catégorie, ainsi que chaque ensemble ouvert et chaque ensemble fermé, jouit de la propriété de Baire. Il en est de même de chaque somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, donc (voir § 8, V) de chaque ensemble ayant la frontière non-dense. Chaque ensemble clairsemé étant un ensemble de ce genre (§ 9, VI, 4), les ensembles clairsemés jouissent aussi de la propriété de Baire.

## III. Opérations. 1) Si $B \in \mathbf{B}$ , on $a(1-B) \in \mathbf{B}$ .

Car l'hypothèse B=G-P+R entraîne 1-B=(1-G+P)-R==(1-G)-R+(P-R) et, l'ensemble 1-G étant fermé et l'ensemble P-R étant de I-re catégorie, il résulte du N° I que  $(1-B) \in B$ .

2) Si 
$$B_n \in \mathbf{B}$$
 pour  $n = 1, 2, ..., on a  $(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathbf{B}$ .$ 

Posons, conformément à la définition:  $B_n = G_n - P_n + R_n$ . En tenant compte de l'identité

$$\sum_{n} B_{n} = \sum_{n} G_{n} - (\sum_{n} G_{n} - \sum_{n} B_{n}) + (\sum_{n} B_{n} - \sum_{n} G_{n}),$$

il suffit de prouver que  $(\sum_{n} G_{n} - \sum_{n} B_{n})$  et  $(\sum_{n} B_{n} - \sum_{n} G_{n})$  sont de

I-re catégorie. Or, cela résulte des inclusions:

$$\sum_{n} G_{n} - \sum_{n} B_{n} \subset \sum_{n} (G_{n} - B_{n}) = \sum_{n} [G_{n} - (G_{n} - P_{n} + R_{n})] \subset$$

$$\subset \sum_{n} [G_{n} - (G_{n} - P_{n})] \subset \sum_{n} P_{n},$$

$$\sum_{n} B_{n} - \sum_{n} G_{n} \subset \sum_{n} (B_{n} - G_{n}) = \sum_{n} (R_{n} - G_{n}) \subset \sum_{n} R_{n}.$$

3) Si 
$$B_n \in \mathbf{B}$$
, on  $a \left( \prod_{n=1}^{\infty} B_n \right) \in \mathbf{B}$ .

C'est une conséquence directe des deux propositions précédentes (en vertu de la règle de de Morgan, § 1, V).

Chaque ensemble borelien jouit de la propriété de Baire 1).

La famille  $\boldsymbol{B}$  satisfait, en effet, aux trois conditions suivantes:  $1^{\circ}$  elle contient tous les ensembles fermés,  $2^{\circ}$  elle contient les complémentaires des ensembles qui lui appartiennent,  $3^{\circ}$  elle contient les produits dénombrables des ensembles qui lui appartiennent. Or, la famille des ensembles boreliens étant la plus petite famille assujettie à ces trois conditions (§ 5, VI), elle constitue une partie de la famille  $\boldsymbol{B}$ , c. q. f. d.

- IV. Equivalences <sup>2</sup>). Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que X jouisse de la propriété de Baire:
- 1. il existe un ensemble de I-re catégorie P tel que X P est fermé et ouvert relativement à 1 P:
- 2. X est une somme d'un ensemble  $G_{\delta}$  et d'un ensemble de I-re catégorie;
- 3. X est une différence d'un ensemble  $\mathbf{F}_z$  et d'un ensemble de I-re catégorie;
- 4. l'ensemble  $D(X) \cdot D(1-X)$  est non-dense; autrement dit, dans chaque ensemble ouvert  $(\neq 0)$  il existe un point où soit X, soit 1-X est de I-re catégorie  $^3$ );
  - 5. l'ensemble D(X) X est de I-re catégorie.

Supposons, en effet, que  $X \in B$ . On a alors, d'après  $N^0$  I:

$$X = G - P_1 + P_2 = F - P_3 + P_4$$

où G est ouvert, F fermé et  $P_n$  de I-re catégorie. Si l'on pose  $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ , il vient X - P = G - P = F - P, ce qui prouve que X - P est simultanément ouvert et fermé dans 1 - P.

<sup>1)</sup> Théorème de M. Lebesgue, l. cit. p. 187. Le théorème inverse n'est pas vrai; voir plus loin § 35.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Cf. W. Sierpiński, Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire, Fund. Math. 4 (1923), p. 319 et La propriété de Baire des fonctions et de leurs images, ibid. 11 (1928), p. 305, E. Szpilrajn, O mierzalności i warunku Baire'a, C. R. du I Congr. des math. des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 299; ma note Sur la propriété de Baire dans les espaces métriques, Fund. Math. 16 (1930), p. 390.

<sup>3)</sup> C'est bien cette condition qui a été admise primitivement comme définition de la propriété de Baire.

Ceci établi, posons  $X-P=G\cdot (1-P)$ . Soit (conformément: à § 10, II) R un ensemble  $F_{\sigma}$  de I-re cat. et qui contient P. On a X=X-R+XR=X-P-R+XR=G-P-R+XR=G-R+XR.

L'ensemble G-R étant un  $G_{\delta}$  et XR étant de I-re catégorie, X se trouve décomposé en un  $G_{\delta}$  et un ensemble de I-re catégorie.

Si  $X \in B$ , 1-X est également un ensemble de la famille B (selon N° III, 1); on en conclut que 1-X=M+N, où M est un  $G_{\mathfrak{d}}$  et N est de I-re catégorie; il vient X=(1-M)-N, ce qui prouve que X est une différence d'un  $F_{\mathfrak{d}}$  et d'un ensemble de I-re cat.

Inversement, chaque  $F_{\circ}$ , chaque  $G_{\circ}$  et chaque ensemble de I-re catégorie étant un ensemble de la famille B, on en conclut (en vertu de N° III) que les conditions 2 et 3 sont suffisantes.

Il est ainsi établi que chacune des conditions 1, 2, 3 est nécessaire et suffisante. Pour prouver que les deux autres le sont également, supposons que  $X \in \mathbf{B}$  et posons, conformément à la définition, X = G - P + R. Il vient 1 - X = (1 - G) - R + (P - R).

Or, on n'altère pas l'ensemble D(E), en ajoutant à E ou en enlevant de E un ensemble de I-re catégorie (voir § 10) V, 12). Par conséquent D(X) = D(G) et D(1-X) = D(1-G). Comme  $D(G) \subset \overline{G}$  et  $D(1-G) \subset \overline{1-G}$  (§ 10, V, 10), il vient  $D(X) \cdot D(1-X) \subset \overline{G} \cdot \overline{1-G} = \overline{G} - G$  et, l'ensemble  $\overline{G} - G$  étant non-dense, il en résulte que  $D(X) \cdot D(1-X)$  l'est également.

L'ensemble D(X) - X est donc de I-re catégorie, car on a

$$D(X) - X = [D(X) - X] \cdot D(1 - X) + D(X) - X - D(1 - X) \subset$$

$$CD(X) \cdot D(1 - X) + (1 - X) - D(1 - X),$$

où  $D(X) \cdot D(1-X)$  est non-dense par hypothèse et (1-X) - D(1-X), est de I-re catégorie selon § 10, V, 8.

Enfin, si l'on suppose que l'ensemble D(X) - X est de I-re catégorie, on a  $X \in \mathbf{B}$  en vertu de l'identité

$$X = D(X) - [D(X) - X] + [X - D(X)],$$

où D(X) est fermé et les ensembles [D(X)-X] et [X-D(X)] sont de I-re catégorie.

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Corollaire 1. Chaque ensemble X est contenu dans un ensemble Z qui est un  $F_z$  tel que la condition  $X \subseteq B \in B$  entraîne que Z - B est de I-re catégorie I).

En effet, l'ensemble  $X-D\left(X\right)$  étant de I-re catégorie (selon § 10, V, 8), il existe un  $F_5$  de I-re catégorie W tel que  $X-D\left(X\right) \subset W$ . Par conséquent, l'ensemble  $Z=W+D\left(X\right)$  est un  $F_5$  contenant X. De plus, si  $X\subset B$ , il s'en suit (§ 10, V, 5) que  $D\left(X\right)\subset D\left(B\right)$ , d'où  $Z-B=W-B+D\left(X\right)-B\subset W+D\left(B\right)-B$  et, l'ensemble  $D\left(B\right)-B$  étant de I-re catégorie en vertu du théorème précédent, on conclut que Z-B l'est également.

Corollaire 2. Si un ensemble X jouissant de la propriété de Baire n'est de I-re catégorie en aucun point de l'espace, l'ensemble 1-X est de I-re catégorie; s'il n'est de I-re catégorie en aucun de s es points, il contient un point où 1-X est de I-re catégorie (pourvu que  $X \neq 0$ ).

En effet, l'hypothèse 1=D(X) implique selon la condition 4, que D(1-X) est non-dense. D'autre part, selon § 10, V, 11 c'est un domaine fermé. Ces deux propriétés impliquent que D(1-X)=0, donc (§ 10, V, 7) que 1-X est de I-re catégorie.

D'autre part, si  $X \subset D(X)$ , on ne peut pas avoir  $X \subset D(1-X)$ , car l'ensemble X serait alors non-dense (d'après 4), contrairement à l'hypothèse.

IVa. Théorème d'existence. En tenant compte de la cond. 4, nous allons établir l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire dans l'espace  $\mathcal C$  des nombres réels.

Décomposons, à ce but, l'ensemble  $\mathcal{C}$  en sous-ensembles disjoints, en rangeant dans un même sous-ensemble deux nombres, lorsque leur différence est rationnelle. En vertu de l'axiome du choix, il existe un ensemble  $V_0$  qui contient un et un seul élément de chacun de ces sous-ensembles. Nous allons prouver que  $V_0$  ne possède pas la propriété de Baire  $^2$ ).

Soit  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  la suite des nombres rationnels = 0. Désignons par  $V_n$  l'ensemble qui s'obtient de  $V_0$  par la translation  $y = x + r_n$ . On voit aussitôt

<sup>1)</sup> Théorème de M. E. Szpilrajn, l. cit. p. 299.

<sup>2)</sup> C'est la construction qui a servi à G. Vitali (Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna 1905) pour démontrer l'existence des ensembles non-mesurables au sens de Lebesgue.

Une démonstration de l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire a été donnée aussi par M. Le bes gue, Contributions à l'étude des correspondances de M. Zermelo, Bull. Soc. Math. de France 35 (1907), pp. 202—212.

que  $\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$ . En outre,  $V_0 \cdot V_n = 0$  (pour  $n \neq 0$ ), car en cas contraire il existerait dans  $V_0$  un nombre y de la forme  $x + r_n$  où  $x \in V_0$ . Mais on aurait alors  $y - x = r_n$ , tandis que par définition  $V_0$  ne contient aucun couple d'éléments dont la différence est rationnelle.

L'espace  $\mathcal{C}$  n'étant pas de I-re catégorie sur lui-même (§ 10, I), on en conclut qu'un des ensembles  $V_n$  n'est nonplus de I-re catégorie. Il en résulte que  $V_0$  n'est pas de I-re catégorie, car  $V_n$  s'obtenant de  $V_0$  par translation, ces ensembles sont de la même catégorie. Il existe, par conséquent, un intervalle ab tel que  $V_0$  n'est de I-re catégorie en aucun point de cet intervalle (§ 10, V, 11).

Or, supposons, par impossible, que  $V_0$  jouisse de la propriété de Baire. D'après la cond. 4, ab contient un sous-intervalle cd (a < c < d < b) tel que l'ensemble  $cd - V_0$  est de I-re catégorie. Soit  $r_n$  un nombre rationnel tel que  $0 < r_n < c - a$ .

La condition  $V_0 \cdot V_n = 0$  implique que  $V_n \cdot cd \subset cd - V_0$ . L'ensemble  $V_n \cdot cd$  est donc de I-re catégorie et il en est de même de la partie de  $V_0$  contenue dans l'intervalle  $c-r_n$ ,  $d-r_n$  (puisqu'elle s'obtient de  $V_n \cdot cd$  par une translation). Mais cela contredit l'hypothèse que  $V_0$  n'est de I-re catégorie en aucun point de ab.

Remarques. 1) Chaque ensemble de puissance  $\aleph_1$ , dépourvu de la propriété de Baire, contient une famille indénombrable de sous-ensembles disjoints, dépourvus de cette propriété.

Pour s'en convaincre, on substitue à N dans le théorème de M. Ul a M (§ 10, VI, p. 49) la famille des sous-ensembles de Z jouissant de la propriété de Baire.

2) La démonstration de l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire dans l'espace  $\mathcal{C}$  est non-effective, c. à d. qu'elle ne donne aucun moyen de nommer un ensemble individuel de ce genre. Le problème d'en donner une démonstration effective reste ouvert  $^1$ ).

Il en est de même du problème de l'existence des ensembles non mesurables au sens de Le besgue.

V. Relativisation. 1) La propriété de Baire est transitive, c. à d. que X jouissant de la propriété de Baire relativement à E, la condition  $E \in \mathbf{B}$  entraîne  $X \in \mathbf{B}$ .

On a, en effet, X = U + P où U est un  $G_{\delta}$  relativement à E et P est un ensemble de I-re catégorie relativement à E. Par conséquent U = VE, où V est un  $G_{\delta}$  (voir § 5, V). Comme produit de deux ensembles appartenant à B, l'ensemble U appartient

également à B. Enfin, P étant de I-re catégorie, on en conclut que l'ensemble X = U + P appartient à B.

2) Si X jouit de la propriété de Baire relativement à  $\overline{E}$ , XE jouit de cette propriété relativement à E.

Car on a X = G - P + R, où G est ouvert dans  $\overline{E}$  et P et R sont de I-re catégorie dans  $\overline{E}$ . En multipliant par E, il vient XE = GE - PE + RE. L'ensemble GE étant ouvert dans E et les ensembles PE et RE étant (selon § 10, IV, 2) de I-re catégorie dans E, notre proposition se trouve démontrée.

#### VI. Propriété de Baire au sens restreint.

X jouit de la propriété de Baire au sens restreint, en symboles,  $X \in \mathbf{B}_r$ , lorsque, quel que soit E, l'ensemble XE jouit de la propriété de Baire relativement à E.

Nous allons prouver que, dans cette définition, le domaine de variabilité de E peut être restreint aux ensembles parfaits.

En effet, E étant un ensemble arbitraire, soit  $\overline{E}=A+C$  la décomposition de  $\overline{E}$  en un ensemble parfait et un ensemble clair-semé (voir § 9, VI, 3). Il vient  $X \cdot \overline{E} = XA + XC$ . Par hypothèse, XA jouit de la propriété de Baire relativement à A, donc selon  $N^0$  V, 1 relativement à  $\overline{E}$ . L'ensemble XC étant clairsemé, il jouit aussi de la propriété de Baire relativement à  $\overline{E}$  (voir  $N^0$  II). Il en est donc de même de leur somme  $XA + XC = X \cdot \overline{E}$ . On en conclut en vertu de  $N^0$  V, 2 que XE jouit de la propriété de Baire relativement à E, c. q. f. d.

Ceci établi, on voit que le domaine de variabilité de E peut être défini aussi comme celui des ensembles fermés.

La relativisation des théorèmes des N°N° précédents donne des énoncés concernant la famille  $B_r$ . En particulier, si X est un ensemble borelien, XE est un ensemble borelien relativement à E (voir § 5, VI) et jouit par conséquent de la propriété de Baire relativement à E, de sorte qu'on a alors  $X \in B_r$ . D'une façon analogue, chaque ensemble clairsemé appartient à  $B_r$ .

Le théorème du  $N^0$  IV implique que la condition nécessaire et suffisante pour que  $X \in B_r$  est que chaque ensemble Z fermé dans X soit une somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de I-re catégorie dans  $Z^1$ ).

<sup>1)</sup> Ce problème a été posé par R. Baire. Voir à ce sujet une indication de M. Lebesgue dans son Mémoire cité du Journ. de Math. p. 186.

<sup>1)</sup> Théorème de M. Sierpiński, Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire, Fund. Math. 4 (1923), p. 319.

[§ 11, VI]

L'importance de cette condition tient au fait que, dans les espaces où la notion d'ensemble borelien est un invariant topologique, p. ex. dans les espaces métriques complets, elle implique directement l'invariance topologique de la propriété de Baire au sens restreint (voir § 31).

Dans les espaces métriques le terme borelien peut être remplacé par  $G_{3}$ .

En effet,  $X \cdot \overline{Z}$  ayant la propriété de Baire relativement à  $\overline{Z}$ , on a  $Z = X \cdot \overline{Z} = M + P$ , où M est un ensemble  $G_{\delta}$  relativement à  $\overline{Z}$  et P est un ensemble de I-re catégorie dans  $\overline{Z}$ . Comme produit d'un  $G_{\delta}$  et de l'ensemble fermé  $\overline{Z}$ , l'ensemble M est donc borelien; comme un ensemble de I-re catégorie dans  $\overline{Z}$ , l'ensemble P est aussi de I-re catégorie dans Z (§ 10, IV, 2).

Supposons à présent que la condition du théorème soit satisfaite. Il s'agit de prouver que  $X \in B_r$ , autrement dit que, F étant un ensemble fermé arbitraire, XF jouit de la propriété de Baire relativement à F. Or, par hypothèse XF = M + P, où M est un ensemble borelien (relativement à l'espace) et P est de I-re catégorie dans XF. Par conséquent M est borelien relativement à F et P est de I-re catégorie relativement à F (§ 10, IV, 1). L'ensemble XF jouit donc de la propriété de Baire relativement à F.

VII. Opération (A). La propriété de Baire est un invariant de l'opération (A) 1).

Soit, en effet,

(1) 
$$X = \sum_{3} \prod_{n=1}^{\infty} X_{\delta^{1} \dots \delta^{n}},$$

les ensembles  $X_{\S^1 \dots \S^n}$  jouissant de la propriété de Baire (pour les notations et les propriétés de l'opération ( $\mathcal{A}$ ) voir § 1, VI).

Le système des ensembles  $X_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}$  peut être supposé "régulier", car, le produit d'un nombre fini d'ensembles à propriété de Baire étant un ensemble du même genre, on peut remplacer  $X_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}$  par  $X_{\mathfrak{z}^1} X_{\mathfrak{z}^1 \mathfrak{z}^2} \dots X_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}$ .

D'après IV, il existe un ensemble Z qui est un  ${\it \textbf{F}}_{\sigma}$  tel que:

 $(2) X \subset Z$ 

(3) si  $B \circ B$  et  $X \subset B$ , l'ensemble Z - B est de I-re catégorie.

D'une façon générale, il existe un  $Z_{\mathfrak{y}^1\dots\mathfrak{y}^i}$  jouissant de la propriété de Baire et tel que

(2a) 
$$\sum_{\mathfrak{F}} \prod_{n=1}^{\infty} X_{\mathfrak{F}^1 \dots \mathfrak{F}^l \mathfrak{F}^1 \dots \mathfrak{F}^n} \subset Z_{\mathfrak{F}^1 \dots \mathfrak{F}^l}$$

(3a) si  $B \in \mathbf{B}$  et  $\sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} X_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^l \mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n} \subset B$ , l'ensemble  $Z_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^l} - B$  est de I-re catégorie.

On peut supposer, en outre, que

$$Z_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i} \subset X_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i},$$

puisque l'ensemble  $Z_{\eta^1 \dots \eta^i} X_{\eta^1 \dots \eta^i}$  satisfait évidemment aux conditions imposées à  $Z_{\eta^1 \dots \eta^i}$ .

En tenant compte de l'identité X = Z - (Z - X) et du fait que Z est un  $F_5$ , tout revient à prouver que Z - X est de I-re catégorie. Or, en appliquant successivement les propositions (1), (4) et § 1, VI, 4, il vient

$$Z - X = Z - \sum_{\mathfrak{y}} \prod_{i=1}^{\infty} X_{\mathfrak{y}^{1} \dots \mathfrak{y}^{i}} \subset Z - \sum_{\mathfrak{y}} \prod_{i=1}^{\infty} Z_{\mathfrak{y}^{1} \dots \mathfrak{y}^{i}} \subset$$

$$\subset \sum_{\mathfrak{y}} \sum_{i=0}^{\infty} (Z_{\mathfrak{y}^{1} \dots \mathfrak{y}^{i}} - \sum_{m=1}^{\infty} Z_{\mathfrak{y}^{1} \dots \mathfrak{y}^{i} m}).$$

La sommation  $\sum_{\eta}\sum_{i=0}^{\infty}$  étant dénombrable (§ 1, VI, 3), il reste à prouver que l'ensemble  $(Z_{\eta^1\dots\eta^i}-\sum_{m=1}^{\infty}Z_{\eta^1\dots\eta^i\,m})$  est de I-re catégorie. Mais c'est une conséquence de (3a) où l'on peut poser  $B=\sum_{m=1}^{\infty}Z_{\eta^1\dots\eta^i\,m}$  en vertu de la formule

$$\sum_{\mathfrak{J}}\prod_{n=1}^{\infty}X_{\mathfrak{J}^{1}\ldots\mathfrak{J}^{l}\mathfrak{J}^{1}\ldots\mathfrak{J}^{n}}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{J}}\prod_{n=1}^{\infty}X_{\mathfrak{J}^{1}\ldots\mathfrak{J}^{l}\mathfrak{m}\mathfrak{J}^{1}\ldots\mathfrak{J}^{n}}\subset\sum_{m=1}^{\infty}Z_{\mathfrak{J}^{1}\ldots\mathfrak{J}^{l}\mathfrak{m}},$$

qui résulte des propositions § 1, VI, 1a et (2a).

<sup>1)</sup> Voir: O. Nikodym, Sur une propriété de l'opération (Sl), Fund. Math. 7 (1925), p. 149 et C. R. Soc. Sc. de Varsovie, voir 19 (1926), p. 294; N. Lusin et W. Sierpiński, Sur quelques propriétés des ensembles (A), Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 35; E. Szpilrajn, l. cit.; N. Lusin, C. R. Paris vol. 164 (1917).

58

Corollaire. La propriété de Baire au sens restreint est un invariant de l'opération (A).

En effet, E étant un ensemble fixe, on a selon (1)

$$E \cdot X = \sum_{\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} (E \cdot X_{\lambda^1} \dots \lambda^n).$$

Donc, si l'on suppose que  $E \cdot X_{\delta^1 \dots \delta^n}$  jouit de la propriété de Baire relativement à E, il en est de même de  $E \cdot X$  d'après le théorème précédent.

Remarques. L'invariance de la propriété de Baire est un cas particulier d'un théorème de la Théorie générale des ensembles.

Soit, notamment, S une famille de sous-ensembles d'un espace donné satisfaisant aux conditions suivantes:  $1^0$  la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à S appartient à S,  $2^0$  le complémentaire d'un ensemble appartenant à la famille S lui appartient également,  $3^0$  à chaque ensemble X (de l'espace donné) correspond un ensemble Z de la famille S tel que les conditions  $X \in S \in S$  et  $Y \in Z - S$  entraînent  $Y \in S$ .

Dans ces hypothèses, la propriété d'appartenir à la famille S est un invariant de l'opération  $(S^{(l)})^1)_*$ 

La famille des ensembles jouissant de la propriété de Baire est une famille S (d'après III et IV). Un autre exemple important d'une famille S fournit la famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. En effet, les conditions  $1^0$  et  $2^0$  sont évidemment réalisées; la condition  $3^0$  l'est également, car on peut prendre comme Z un ensemble  $G_{\delta}$  ayant la mesure égale à la mesure extérieure de X et l'ensemble Z-S est alors de mesure nulle.

La mesurabilité au sens de Lebesgue est donc un invariant de l'opération (A).

## § 12. Séries alternées d'ensembles fermés.

#### I. Formules de la Théorie générale des ensembles 2). Soit

$$(1) X_0, X_1, \dots, X_{\xi}, \dots, X_{\alpha}$$

une suite transfinie d'ensembles décroissants, c. à d. tels que la condition  $\xi > \zeta$  entraı̂ne  $X_{\xi} \subset X_{\zeta}$ . Supposons, en outre, que:

$$(2) X_0 = 1$$

(3)  $X_{\lambda} = \prod_{\xi < \lambda} X_{\xi}$ , si  $\lambda$  est un nombre-limite ou bien si  $\lambda = \alpha$ .

On prouve facilement que

(4) 
$$1 = X_0 - X_1 + X_1 - X_2 + \dots + X_{\xi} - X_{\xi+1} + \dots + X_{\alpha} = \sum_{\xi < \alpha} (X_{\xi} - X_{\xi+1}) + X_{\alpha}.$$

Séries alternées d'ensembles fermés.

Les ensembles  $(X_0-X_1+X_2-X_3+...)$  et  $(X_1-X_2+X_3-X_4+...+X_\alpha)$  étant disjoints, il vient:

(4a) 
$$1 - (X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + ...) = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + ... + X_n$$

II. Définition. Un ensemble de la forme

$$E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{\xi} - F_{\xi+1} + \dots$$

où les termes sont fermés décroissants, est dit développable en série alternée d'ensembles fermés décroissants ou, tout court, ensemble développable.

Dans les espaces complets séparables les ensembles développables coïncident avec les ensembles qui sont simultanément des  $F_{\sigma}$  et  $G_{\delta}$  (Chap. III, § 33). Plusieurs propriétés importantes des ensembles  $F_{\sigma}$  et  $G_{\delta}$  sont des conséquences de leur développabilité; c'est une des raisons pour laquelle les ensembles développables méritent une étude spéciale. Cf. aussi § 13, VI.

III. Théorème sur la séparation. Développement en série alternée. E et H étant deux ensembles arbitraires donnés, admettons que la suite (1) remplisse les conditions (2) et (3), ainsi que la condition suivante:

$$X_{\xi+1} = \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} \cdot H}.$$

La suite (1) est évidemment composée d'ensembles fermés. Elle est, en outre, décroissante, puisque  $X_{\xi+1} \subset \bar{X}_{\xi} = X_{\xi}$ . Donc, à partir d'un certain indice, tous ses termes sont identiques; c'est cet indice que nous désignerons par  $\alpha-1$ . Par conséquent

$$X_{\alpha} = \overline{X_{\alpha} \cdot E} \cdot \overline{X_{\alpha} \cdot H}.$$

Posons:  $P_{\xi} = X_{\xi} - \overline{X_{\xi} \cdot E}$ ,  $R_{\xi} = X_{\xi} - \overline{X_{\xi} \cdot H}$ . Donc  $X_{\xi} - X_{\xi+1} = P_{\xi} + R_{\xi}$ , d'où, en vertu de (4),  $1 = \sum_{\xi < \alpha} P_{\xi} + \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} + X_{\alpha}$ , donc  $1 - \sum_{\xi < \alpha} P_{\xi} \subset \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} + X_{\alpha}$ .

<sup>1)</sup> Théorème de M. Szpilrajn, loco cit. p. 300.

<sup>2)</sup> Voir F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 80.

[§ 12, V]

D'autre part,  $P_{\xi} = X_{\xi} - \overline{X_{\xi} \cdot E} \subset X_{\xi} - X_{\xi} \cdot E = X_{\xi} - E \subset 1 - E$ , d'où  $\sum_{\xi < \alpha} P_{\xi} \subset 1 - E$ , donc  $E \subset 1 - \sum_{\xi < \alpha} P_{\xi} \subset \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} + X_{\alpha}$ . D'une façon

analogue,  $\sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} \subset 1 - H$ . On obtient ainsi:  $E - X_{\alpha} \subset \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi}$ ,  $H \cdot \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} = 0$ .

De plus, l'ensemble

$$\sum_{\xi \leq \alpha} R_{\xi} = \sum_{\xi \leq \alpha} (X_{\xi} - \overline{X_{\xi} \cdot H}) = 1 - \overline{H} + \overline{E} \cdot \overline{H} - \overline{\overline{E} \cdot H} + \overline{E} \cdot \overline{H} \cdot \overline{\overline{E} \cdot H} - \dots$$

est la somme d'une série alternée d'ensembles fermés décroissants, car  $X_{\xi+1} = \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} \cdot H} \subset \overline{X_{\xi} \cdot H}$ .

De là on conclut, en particulier, que

1° si l'équation  $X = \overline{XE} \cdot \overline{XH}$  ne possède que la racine X = 0, il existe un ensemble développable D (à savoir l'ensemble  $D = \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi}$ ) tel que  $E \subset D$  et HD = 0 1).

 $2^0$  en posant H=1-E, on a:

(5) 
$$X_{\xi+1} = \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} - E} = la$$
 frontière de  $X_{\xi} \cdot E$  relative à  $X_{\xi}$ ,

(6) 
$$X_{\alpha} = \overline{X_{\alpha} \cdot E} \cdot \overline{X_{\alpha} - E} \quad et \quad E - X_{\alpha} = \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi},$$

 $\begin{array}{l} \operatorname{car} \sum\limits_{\xi < \alpha} R_{\xi} \subset 1 - H = E \ \operatorname{et} \ R_{\xi} \subset X_{\xi} - X_{\xi + 1}, \ \operatorname{de \ sorte \ que \ l'ensemble} \\ \sum\limits_{\xi < \alpha} R_{\xi}, \ \operatorname{comme \ sous-ensemble \ de} \sum\limits_{\xi < \alpha} (X_{\xi} - X_{\xi + 1}), \ \operatorname{est \ disjoint \ de} \ X_{\alpha}. \\ \operatorname{On \ a \ donc} \sum\limits_{\xi < \alpha} R_{\xi} \subset E - X_{\alpha}. \end{array}$ 

On voit ainsi qu'en retranchant de E le "reste"  $X_{\alpha}$  E, on obtient un ensemble développable. Par conséquent:

 $3^{\circ}$  si le reste  $X_a \cdot E$  s'annule, on a (en posant H = 1 - E):

(i) 
$$E = \sum_{\xi \leq \alpha} R_{\xi} = 1 - \overline{1 - E} + \overline{E} \cdot \overline{1 - E} - \overline{E} - E + \overline{E} \cdot \overline{1 - E} \cdot \overline{E} - E - \dots$$

(ii) 
$$E=1-H=1-\sum_{\xi<\alpha}P_{\xi}=1-\sum_{\xi<\alpha}(X_{\xi}-\overline{X_{\xi}\cdot E})=\sum_{\xi<\alpha}(\overline{X_{\xi}\cdot E}-X_{\xi+1})=$$
  
=  $\overline{E}-\overline{E}\cdot\overline{1-E}+\overline{E\cdot\overline{1-E}}-\overline{E\cdot\overline{1-E}\cdot\overline{E-E}}+\dots$  (d'après I (4a)).

IV. Propriétés du "reste". L'ensemble  $X_{\alpha}$  de la formule (6) est le plus grand ensemble satisfaisant à l'équation

Séries alternées d'ensembles fermés.

$$(7) X = \overline{XE} \cdot \overline{X - E}.$$

En effet, si X satisfait à (7), on a d'abord  $X \subset X_0 = 1$ . Puis, si  $X \subset X_{\xi}$ , il vient  $X \cdot E \subset X_{\xi} \cdot E$  et  $X - E \subset X_{\xi} - E$ , d'où  $\overline{XE} \cdot \overline{X - E} \subset \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} - E}$ , donc, selon (5) et (7),  $X \subset X_{\xi+1}$ . Enfin, si pour chaque  $\xi < \lambda$  ( $\lambda$  nombre limite) on a  $X \subset X_{\xi}$ , il vient  $X \subset \prod_{\xi < \lambda} X_{\xi} = X_{\lambda}$ .

Ainsi, en vertu du principe de l'induction transfinie, X est un sous-ensemble de chaque  $X_{\xi}$ , donc de  $X_{\alpha}$ .

Il est à remarquer que l'égalité (7) équivaut à

$$\overline{XE} = X = \overline{X - E}.$$

Elle implique, en effet, que  $X \subset \overline{XE}$  et  $X \subset \overline{X-E}$  et, on a d'autre part  $\overline{XE} \subset \overline{X}$  et  $\overline{X-E} \subset \overline{X}$ , d'où l'équivalence demandée, puisque, en vertu de (7),  $X = \overline{X}$ .

V. Conditions nécessaires et suffisantes. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que l'ensemble E soit développable:

1º l'égalité (8) implique que X=0; autrement dit, quel que soit l'ensemble fermé  $F\neq 0$ , la frontière de FE relative à F, c. à d. l'ensemble  $\overline{FE}\cdot\overline{F-E}$ , est  $\neq F$ ;

2º quel que soit l'ensemble fermé F, la frontière de FE relative à F est non-dense dans F.

 $3^{0}$  le "reste" s'annule, c. à d.  $X_{\alpha} \cdot E = 0$ .

Démonstration. 1. La condition  $1^0$  est nécessaire. Supposons, en effet, que E soit développable en une série alternée d'ensembles fermés décroissants:

(9) 
$$E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{\xi} - F_{\xi+1} + \dots$$
  $(\xi + 1 < \alpha)$ .

On peut évidemment supposer que les indices limites sont omis dans ce développement. Or, si l'on admet que  $F_0=1$ ,  $F_\lambda=\prod_{\xi<\lambda}F_\xi$  (pour  $\lambda$  limite) et  $F_\alpha=\prod_{\xi<\alpha}F_\xi$ , on conclut de (4) que

(10) 
$$1 - E = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + F_{\alpha}.$$

<sup>1)</sup> Nous nous servirons de cet énoncé pour démontrer un théorème important de Baire sur les fonctions de I-re classe (voir Chap. II, § 27, X).

Nous allons prouver que l'égalité (8) entraîne  $X \subset F_\xi$ , quel que soit  $\xi$ . On a d'abord  $X \subset F_0 = 1$ . Admettons que  $X \subset F_\xi$ . Dans le cas où  $\xi$  est pair, on conclut de la formule (9) que  $XE \subset F_{\xi+1}$  (car toutes les différences qui précèdent  $F_{\xi+1}$  sont disjointes de  $F_\xi$ , donc de X, tandis que tous les termes qui suivent  $F_{\xi+1}$  sont contenus dans  $F_{\xi+1}$ ). Donc  $X = \overline{XE} \subset F_{\xi+1}$ . D'une façon analogue, si  $\xi$  est impair, on conclut de (10) que  $X - E \subset F_{\xi+1}$ , d'où  $X = \overline{X - E} \subset F_{\xi+1}$ . Finalement, si  $X \subset F_\xi$  pour chaque  $\xi < \lambda$ , il vient  $X \subset \prod_{\xi < \lambda} F_\xi = F_\lambda$ .

Il est ainsi établi que  $X \subset F_{\xi}$ , quel que soit  $\xi$ . Par conséquent  $X \subset F_{\alpha}$ . Cela implique en raison de (10) que  $X \subset 1 - E$ , d'où XE = 0, donc  $X = \overline{XE} = 0$ .

2. La condition 1º entraîne 2º. En effet, d'après § 6, II (12), on a  $\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(E\right)\right]}=\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(E\right)\right]}\cdot E=\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(E\right)\right]}-E$ . On en conclut que l'on peut poser dans (8):  $X=\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(E\right)\right]}$ , en tenant compte du fait général que l'égalité  $\overline{X}=\overline{XE}$  entraîne  $\overline{X}=\overline{XE}$  (puisque  $\overline{XE}\subset\overline{XE}\subset\overline{X}$ ). Or, si l'on suppose que l'égalité (8) entraîne X=0, on en conclut que  $\overline{\operatorname{Int}\left[\operatorname{Fr}\left(E\right)\right]}=0$ , donc que la frontière de E ne possède pas de points intérieurs, c. à d. qu'elle est non-dense.

De plus, si l'on considère FE à la place de E et la frontière de FE relative à F, à la place de la frontière de E, on parvient à la conclusion que cette frontière relative est non-dense dans F, car la condition  $1^{\circ}$  entraîne la même condition "relativisée" par rapport à F (cette dernière signifie notamment que la condition  $1^{\circ}$  est réalisée pour tout  $X \subset F$ ).

- 3. La condition  $2^{0}$  entraîne  $3^{0}$ . En effet, en posant  $F=X_{\alpha}$  dans  $2^{0}$ , on en conclut que la frontière de  $X_{\alpha}$ . E relative à  $X_{\alpha}$  est non-dense dans  $X_{\alpha}$ . Elle ne peut donc être identique à  $X_{\alpha}$  que dans le seul cas où  $X_{\alpha}=0$ . Ainsi en vertu de (6), on a  $X_{\alpha}=0$ , d'où  $X_{\alpha}\cdot E=0$ .
  - 4. La condition 3° est suffisante selon III, 3°. Notre théorème est ainsi complètement démontré.

Comme nous l'avons prouvé au § 8, V, pour que la frontière d'un ensemble soit non-dense, il faut et il suffit que cet ensemble soit une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ou encore qu'il soit une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense). On en conclut en vertu du th. précédent, que la condition nécessaire et suffisante pour que E soit un ensemble développable est que, relativement à chaque ensemble fermé F, l'ensemble EF soit une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ou, ce qui est équivalent, qu'il soit une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense).

La condition  $1^{\circ}$  du théorème précédent conduit à la suivante: quel que soit l'ensemble fermé non vide F, il existe dans F un point où soit FE, soit F-E est "localement vide" relativement à F, 1) c. à d. qu'il existe un entourage G de ce point tel qu'on ait soit GFE=0, soit GF-E=0.

En effet, si  $\overline{FE} = F = \overline{F - E}$ , l'inégalité  $GF \neq 0$  entraîne  $GFE \neq 0 \neq GF - E$  (voir § 5, III); la condition en question implique donc 1°. Inversement, si  $p \in F - \overline{FE}$ , on pose  $G = 1 - \overline{FE}$ ; donc GFE = 0. Si  $p \in F - \overline{F - E}$ , on pose  $G = 1 - \overline{F - E}$ .

#### VI. Propriétés des ensembles développables.

1. Les ensembles développables constituent un corps <sup>2</sup>), c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles développables sont des ensembles développables.

C'est une conséquence de la cond. 2° du théorème du N° V et du fait que les ensembles ayant la frontière non-dense constituent un corps (§ 8, V).

2. Chaque ensemble développable jouit de la propriété de Baire au sens restreint.

Car E étant un ensemble développable et F un ensemble fermé, l'ensemble EF est une somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense dans F (cf.  $N^{\circ}V$ ).

3. Si un ensemble frontière est développable, il est non-dense.

Car dans le domaine des ensembles ayant la frontière nondense les notions d'ensemble frontière et d'ensemble non-dense coïncident (§ 8, V).

4. Chaque ensemble clairsemé est développable, car la frontière d'un ensemble clairsemé est non-dense (§ 9, VI, 4).

<sup>1)</sup> Cf. § 7, IV et § 11, IV, 4.

<sup>2)</sup> Cf. F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 82.

64

[§ 12, IX]

VII. Résidus 1). L'ensemble  $X \cdot \overline{\overline{X} - X}$  est dit le *résidu* de X (au sens de M. Hausdorff).

L'ensemble  $X_{\alpha} \cdot E$  (le reste de E) est identique à son résidu. Car E et X étant deux ensembles qui satisfont à la formule (8), XE est identique à son résidu:  $X = \overline{X - E} = \overline{X - XE} = \overline{XE - XE}$ , puisque  $X = \overline{XE}$ ; il en résulte que  $XE = XE \cdot \overline{XE} - \overline{XE}$ .

La condition nécessaire et suffisante pour que E soit un ensemble développable est qu'aucun ensemble  $Y (\neq 0)$  fermé dans E ne soit identique à son résidu.

Supposons, en effet, que  $Y=\overline{Y}\cdot E$  et  $Y=Y\cdot \overline{Y}-Y$ . Par conséquent  $\overline{Y}=\overline{Y}\overline{E}$  et, d'autre part,  $\overline{Y}\subset \overline{Y}-Y=\overline{Y}-\overline{Y}\overline{E}=\overline{Y}-E\subset \overline{Y}$ . Donc  $\overline{Y}\overline{E}=\overline{Y}=\overline{Y}-E$  et, en substituant  $\overline{Y}$  à X dans V,  $1^{\circ}$ , on a Y=0. La condition est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante, car elle implique en vertu de l'énoncé précédent que  $X_{\alpha}\cdot E=0$ , donc d'après V,  $3^{\circ}$ , que l'ensemble E est développable.

Il est à remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit une différence de deux ensembles fermés est que son résidu soit vide.

En effet, d'après § 6, III, X est une différence de deux ensembles fermés, lorsque l'ensemble  $\overline{X}-X$  est fermé, autrement dit, lorsque  $\overline{\overline{X}-X}\subset \overline{X}-X\subset 1-X$ , c. à d. lorsque  $X\cdot \overline{\overline{X}-X}=0$ .

VIII. Résidus d'ordre transfini. E étant un ensemble donné, on forme la suite des résidus de tout ordre de la façon suivante:  $R_1 = \operatorname{le}$  résidu de E,  $R_{\xi+1} = \operatorname{le}$  résidu de  $R_{\xi}$  et  $R_{\lambda} = \prod_{\xi < \lambda} R_{\xi}$  pour  $\lambda$  limite. La suite des résidus ainsi définis étant décroissante, on aboutit à un certain nombre  $\beta$  tel que  $R_{\beta} = R_{\beta+1} = \ldots$  D'après I (4), on a:  $E - R_{\beta} = E - R_1 + R_1 - R_2 + \ldots$ 

Les termes de cette série alternée ne sont pas fermés, mais en vertu de l'identité  $X-\overline{X}-X=\overline{X}-\overline{X}-X=0$ , on a  $R_{\xi}-R_{\xi+1}=\overline{R}_{\xi}-\overline{R}_{\xi}-R_{\xi}$ , donc

(1) 
$$E - R_{\beta} = \overline{E} - \overline{E} - E + \overline{E} + \overline{E} - \overline{E} - \dots + \overline{R}_{\xi} - \overline{R}_{\xi} - \overline{R}_{\xi} + \dots$$

En particulier, si E est développable, le "dernier résidu"  $R_{\xi}$  de E est vide (voir  $N^0$  VII) et la formule (1) présente un développement de E en une série d'ensembles fermés décroissants.

Séries alternées d'ensembles fermés.

## IX. Ensembles localement fermés dans les espaces réguliers.

D'après la définition générale de la localisation, l'ensemble X est dit localement fermé au point p, lorsqu'il existe un entourage E de p tel que l'ensemble EX soit fermé.

Evidemment un ensemble fermé est localement fermé en chaque point. Tout ensemble est localement fermé en chaque point isolé. Si X est fermé au point p et Y est fermé dans X, Y est fermé au point p, car, l'ensemble EX étant fermé, la condition  $Y = \overline{Y} \cdot X$  implique que EY est fermé.

Admettons à présent que l'espace satisfait à l'axiome de régularité, d'après lequel, si p n'appartient pas à un ensemble fermé F, il existe un entourage E de p tel que  $\overline{E} \cdot F = 0$ .

Nous allons démontrer que, dans cette hypothèse, l'ensemble des points où X n'est pas localement fermé est égal à  $\overline{X}-X$ , ce qui implique que le résidu de X coıncide avec l'ensemble des points de X où X n'est pas localement fermé.

Soit, d'abord  $p \in 1 - \overline{X} - X$ . Soit, conformément à l'axiome de régularité, E un entourage fermé de p tel que  $E \cdot \overline{X} - X = 0$ . Il en résulte que  $E \cdot \overline{X} - X = 0$ , d'où  $E \cdot \overline{X} \subset X$ , donc  $E \cdot \overline{X} = E \cdot X$ , ce qui prouve que l'ensemble EX est fermé, donc, que X est fermé au point p.

Supposons, réciproquement, que X soit fermé au point p, donc que  $EX = \overline{EX}$  et  $p \in 1 - \overline{1 - E}$ . Il s'agit de prouver que  $p \in 1 - \overline{X} - X$ . Il suffit évidemment d'établir l'inclusion  $\overline{X - X} \subset \overline{1 - E}$ . Or, en tenant compte de la formule générale  $\overline{X} - \overline{Y} \subset \overline{X - Y}$ , on démontre en effet facilement que  $\overline{X} - X \subset \overline{X} - EX = \overline{X} - \overline{EX} \subset X - EX = \overline{X - E} \subset \overline{1 - E}$ , et parsuite  $\overline{X} - X \subset \overline{1 - E}$ .

Ceci établi, on en conclut en vertu des propositions du Nº VII que:

1º la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit développable, est que chaque ensemble non vide fermé dans E contienne un point où il est localement fermé,

 $2^{0}$  la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit localement fermé en chacun de ses points est qu'il soit une différence de deux ensembles fermés  $^{2}$ ), c. à d. que le résidu de E soit vide, ou encore que  $\overline{E}$  — E soit fermé (voir  $\S$  6, III).

<sup>1)</sup> F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, p. 280.

<sup>1)</sup> On prouve facilement que chaque espace métrique satisfait à cet axiome, de sorte que le contenu du Nº IX reste valable pour les espaces métriques. Voir pour cet axiome L. Vietoris, Mon. f. Math. u. Ph. 31 (1921), p. 173 et H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie, Math. Ann. 88 (1923), p. 301.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Voir la note de M. W. Sierpiński et de moi, Sur les différences de deux ensembles fermés, Tohoku Math. Journ. 20 (1921), p. 22.

C. Kuratowski, Topologie I.

[§ 13, III]

Le "dernier résidu"  $R_{\beta}$  étant identique à son propre résidu, c'est un ensemble qui n'est localement fermé en aucun de ses points. Nous allons démontrer que, parmi les ensembles fermés dans X, l'ensemble  $R_{\beta}$  est le plus grand qui ne soit localement fermé en aucun de ses points.

Supposons, en effet, que l'ensemble Y soit fermé dans X et que  $Y-R_{\beta} \not= 0$ . Il s'agit de prouver que Y contient un point où il est localement fermé. Or on déduit, en tenant compte de la décomposition VIII (1), l'existence d'un indice  $\xi$  tel que  $YR_{\xi}-R_{\xi+1}\not= 0$ . Admettons que  $\xi$  désigne le plus petit indice de ce genre. Par conséquent  $Y\subset R_{\xi}$ , donc Y est fermé dans  $R_{\xi}$  et, l'ensemble  $R_{\xi+1}$  étant le résidu de  $R_{\xi}$ , l'ensemble  $R_{\xi}$  est localement fermé en chaque point de  $R_{\xi}-R_{\xi+1}$ , donc en chaque point de l'ensemble non vide  $YR_{\xi}-R_{\xi+1}$ . Cela implique (comme nous l'avons démontré auparavant) que l'ensemble Y est aussi localement fermé en chaque point de ce dernier ensemble.

## § 13. Continuité. Homéomorphie.

I. Définition 1). Soient  $\mathcal X$  et  $\mathcal Y$  deux espaces satisfaisant aux axiomes I—III. Soit f(x) une fonction ayant  $\mathcal X$  pour l'ensemble des arguments et dont les valeurs appartiennent à  $\mathcal Y$ . La fonction f est dite continue au point x, lorsque, pour chaque ensemble X, la condition  $x \in \overline{X}$  entraı̂ne  $f(x) \in \overline{f(X)}$  2).

En cas où  $\mathfrak N$  et  $\mathcal Y$  désignent des ensembles de nombres réels, la notion de continuité considérée ici coıncide avec celle de l'Analyse classique.

II. Conditions nécessaires et suffisantes. Pour qu'une fonction f soit continue au point x, il faut et il suffit que, Y étant un entourage arbitraire de f(x), l'ensemble  $f^{-1}(Y)$  soit un entourage de x; en d'autres termes, que pour chaque Y

(1) 
$$f(x) \in Int(Y)$$
 entraîne  $x \in Int[f^{-1}(Y)],$ 

ou encore (en remplaçant Y par  $\mathcal{Y} - Y$ ) que

(2) 
$$x \in \overline{f^{-1}(Y)}$$
 entraîne  $f(x) \in \overline{Y}$ .

En effet, on prouve en vertu de § 3, II, 12 que la condition (2) est nécessaire, en posant dans la définition  $X = f^{-1}(Y)$ . La suffisance résulte de § 3, II, 11, en posant dans (2):  $Y = f(X)^{-1}$ .

En tenant compte du fait qu'il existe dans chaque entourage d'un point un ensemble ouvert contenant ce point, on parvient à la condition suivante ("définition de Cauchy"):

- (3) pour que f soit continue au point x, il faut et il suffit qu'à chaque ensemble ouvert H contenant f(x) corresponde un ensemble ouvert G contenant x et tel que  $f(G) \subset H$ .
- III. L'ensemble D des points de discontinuité. Par définition on a  $x \in D$  lorsqu'il existe un ensemble X tel que  $x \in \overline{X}$  et f(x) non- $\in \overline{f(X)}$ , c. à d. tel que  $x \in \overline{X} f^{-1}[\overline{f(X)}]$ . Il vient:

(1) 
$$D = \sum_{X} \{\overline{X} - f^{-1}[\overline{f(X)}]\}, \text{ d'où } f(D) = \sum_{X} [f(\overline{X}) - \overline{f(X)}],$$

la sommation s'étendant à tous les sous-ensembles X de  $\mathfrak{A}$ .

En effet, 
$$f(D) = \sum_{X} f\{\overline{X} - f^{-1}[\overline{f(X)}]\} = \sum_{X} f\{\overline{X} \cdot f^{-1}[\mathcal{Y} - \overline{f(X)}]\} =$$

$$= \sum_{X} [f(\overline{X}) \cdot (\mathcal{Y} - \overline{f(X)})] = \sum_{X} [f(\overline{X}) - \overline{f(X)}], \text{ d'après § 3, II, 13.}$$
En vertu des propositions II (1) et (2), on a:

(2) 
$$D = \sum_{Y} \{f^{-1}[Int(Y)] - Int[f^{-1}(Y)]\} = \sum_{Y} [f^{-1}(Y) - f^{-1}(\overline{Y})],$$

car d'une part la condition  $f(x) \in \text{Int}(Y)$  équivaut à  $x \in f^{-1}[\text{Int}(Y)]$  et d'autre part  $f(x) \in \overline{Y}$  équivaut à  $x \in f^{-1}(\overline{Y})$ .

On peut enfin supposer que dans la première des égalités (2) la variable Y parcourt la famille des ensembles ouverts et que dans la deuxième elle varie dans celle des ensembles fermés.

En effet, si l'on pose  $\operatorname{Int}(Y)=G$ , on a  $f^{-1}[\operatorname{Int}(Y)]-\operatorname{Int}[f^{-1}(Y)]\subset f^{-1}(G)-[\operatorname{Int}f^{-1}(G)]$  et si l'on pose  $\overline{Y}=F$ , on a  $\overline{f^{-1}(\overline{Y})}-f^{-1}(\overline{Y})\subset f^{-1}(F)-f^{-1}(F)$ . Ainsi:

(3) 
$$D = \sum_{G} \{f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)]\} = \sum_{F} [\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)].$$

La première des égalités (3) implique que  $D \subset \mathfrak{X}^1$  (dérivé de  $\mathfrak{X}$ ), car tout point *isolé* de l'espace, comme point intérieur de chaque ensemble qui le contient, n'appartient pas à  $f^{-1}(G)$ —Int  $[f^{-1}(G)]$ .

Les deux égalités suivantes définissent deux classes importantes de fonctions:  $1^0$  D=0 les fonctions continues,  $2^0$   $\overline{\mathfrak{X}-D}=\mathfrak{X}$  les fonctions ponctuellement discontinues.

<sup>1)</sup> Cf. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Chap. 9, § 1.

²) En cas où les espaces  $\mathcal X$  et  $\mathcal Y$  ont des points communs, il est désirable de distinguer entre la fermeture dans  $\mathcal X$  et dans  $\mathcal Y$ . Pour simplifier les notations, nous omettons cette distinction.

 $<sup>^{1}</sup>$ ) Ici n'intervient que l'ax. I, qui est d'ailleurs superflu si f est biunivoque.

IV. Fonctions continues en chaque point. Les fonctions de ce genre s'appellent continues, tout court. On a dans ce cas D=0 et f(D)=0. Les formules III (1)—(3) fournissent aussitôt les conditions suivantes, nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f soit continue:

(1) 
$$f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$$
, quel que soit X,

- (2)  $\overline{f^{-1}(Y)} \subset f^{-1}(\overline{Y})$ , quel que soit Y,
- (3)  $f^{-1}(G)$  est ouvert, quel que soit l'ensemble ouvert G,
- (4)  $f^{-1}(F)$  est fermé, quel que soit l'ensemble fermé F.

Les deux dernières conditions résultent de l'égalité III (3), car la condition D=0 équivaut à l'hypothèse que, pour chaque ensemble ouvert G, on a  $f^{-1}(G)-\operatorname{Int}[f^{-1}(G)]=0$ , donc que  $f^{-1}(G)$  est ouvert; de même l'hypothèse  $\overline{f^{-1}(F)}-f^{-1}(F)=0$  signifie que  $f^{-1}(F)$  est fermé.

En particulier, f(x) étant une fonction continue à valeurs réelles et ab un intervalle, les ensembles  $\underset{x}{E}\{a \leqslant f(x) \leqslant b\}$  et  $\underset{x}{E}\{f(x)=a\}$  sont fermés; l'ensemble  $\underset{x}{E}\{a \leqslant f(x) \leqslant b\}$  est ouvert.

En tenant compte du fait que l'opération  $f^{-1}$  est additive et multiplicative ( $\S$  3, II, 6a et 7a), on déduit de (3) et (4) que

- (5) si Y est respectivement un  $F_{\sigma}$  ou un  $G_{\delta}$ ,  $f^{-1}(Y)$  l'est également.
- V. Relativisation. Fonctions partielles. Rappelons que l'on désigne par f(x|A) la fonction qui s'obtient de f(x), en restreignant à A l'ensemble de ses arguments (§ 3, II). La fonction partielle f(x|A) est dite continue au point x relativement à A, lorsque  $x \in A$  et lorsque la condition  $x \in \overline{XA}$  entraîne  $f(x) \in \overline{f(XA)}$ .
- 1) La continuité d'une fonction dans un point p est une propriété locale, c. à d. que, A étant un entourage de p, la continuité de la fonction partielle f(x|A) dans un point p entraîne celle de la fonction f en ce point.

Soit, en effet,  $p \in \overline{X}$ . On a évidemment X = XA + X - A, d'où  $\overline{X} = \overline{XA} + \overline{X} - \overline{A} \subset \overline{XA} + \overline{X} - \overline{A}$  et, comme par hypothèse p n'appartient pas à  $\overline{X} - \overline{A}$ , il vient  $p \in \overline{XA}$ , d'où, par suite de la continuité de la fonction partielle:  $f(p) \in \overline{f(XA)} \subset \overline{f(X)}$ .

2) Si  $\mathfrak{A} = A + B$ ,  $p \in AB$  et les fonctions f(x|A) et f(x|B) sont continues au point p, la fonction f l'est également.

En effet, si  $p \in \overline{X} = \overline{XA} + \overline{XB}$ , on a soit  $p \in \overline{XA}$ , soit  $p \in \overline{XB}$ . Done  $p \in \overline{f(XA)} \subset \overline{f(X)}$  on bien  $p \in \overline{f(XB)} \subset \overline{f(X)}$ .

3) Si  $\mathcal{X} = A + B$  est une décomposition de  $\mathcal{X}$  en deux ensembles fermés et si les fonctions f(x|A) et f(x|B) sont continues, f est continue sur  $\mathcal{X}$ .

Car, dans le cas où p = AB, la fonction f est continue en p selon la proposition 2) et dans le cas où p non-a A, p est un point intérieur de B, de sorte qu'on arrive alors à la même conclusion en vertu de la proposition 1).

VI. Fonctions caractéristiques. On appelle fonction caractéristique d'un ensemble A une fonction qui admet deux valeurs (les nombres  $\theta$  et I, par ex.), l'une aux points de A et l'autre aux points du complémentaire de A. On a l'égalité suivante:

(1) 
$$\operatorname{Fr}(A) = D,$$

c. à d. que la frontière de A coïncide avec l'ensemble des points de discontinuité de la fonction caractéristique de A.

Soit, en effet, f(x) = a pour  $x \in A$  et f(x) = b pour  $x \in 1-A$ . Il suffit de considérer le cas où  $x \in A$ .

Si l'on suppose que  $x \in Fr(A)$ , l'ensemble  $A = f^{-1}(a)$  n'est pas un entourage de x, bien que l'ensemble composé du point a seul soit un entourage de f(x). Il en résulte selon II que  $x \in D$ .

Inversement, si  $x \in A - Fr(A)$ , on a  $x \in Int(A)$  et, en vertu de la même proposition, x est un point de continuité de la fonction f.

L'identité (1) implique que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit respectivement continue ou ponctuellement discontinue est que cet ensemble soit à la fois fermé et ouvert ou bien possède la frontière non-dense.

Car la condition D=0 équivaut à l'égalité Fr(A)=0, qui signifie que A est simultanément fermé et ouvert.

On en conclut en vertu de § 12, V, 2° que pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé, il faut et il suffit que l'ensemble A soit développable en série alternée d'ensembles fermés décroissants.

Ajoutons aux propriétés topologiques des fonctions caractéristiques les formules suivantes, qui appartiennent à la Théorie

générale des ensembles et dont la démonstration ne présente aucune difficulté  $^1$ ): c(x, A) désignant la fonction caractéristique de A, on a:

1. 
$$c(x, 1) = 1$$
 2.  $c(x, 0) = 0$  3.  $c(x, A') = 1 - c(x, A)$ 

4. 
$$c(x, \sum_{i} A_{i}) = \max_{i} c(x, A_{i})$$
 5.  $c(x, \prod_{i} A_{i}) = \min_{i} c(x, A_{i})$ 

6. 
$$c(x, AB) = c(x, A) \cdot c(x, B)$$

7. 
$$c(x, A - B) = c(x, A) - c(x, AB)$$

8. Limes  $A_n$  désignant l'ensemble  $\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+k}$  (dans le cas où cette égalité a lieu), on a c (x,  $\lim_{n=\infty} A_n) = \lim_{n=\infty} c$   $(x, A_n)$ .

VII. Fonctions biunivoques et continues. Supposons à présent que la fonction f, qui transforme l'espace  $\mathcal X$  en  $\mathcal Y$ , soit biunivoque, c. à d. qu'à des arguments différents correspondent toujours des valeurs différentes de la fonction. Les propriétés suivantes sont des *invariants* des transformations biunivoques et continues:

- 1) la propriété d'être un point d'accumulation de l'espace; en effet,  $x \in \overline{\mathcal{X} x}$  entraîne  $f(x) \in \overline{f(\mathcal{X} x)} = \overline{\mathcal{Y} f(x)}$ , puisque  $f(\mathcal{X} x) = f(\mathcal{X}) f(x)$  (voir § 3, III);
- 2) la propriété d'être dense en soi (c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente);
- 3) La propriété d'être un ensemble frontière dans l'espace, car l'égalité  $\mathfrak{X} = \overline{\mathcal{X}} \overline{X}$  entraîne  $\mathcal{Y} = f(\mathfrak{X}) = f(\overline{\mathcal{X}} \overline{X}) \subset f(\overline{\mathcal{X}} \overline{X}) = \overline{\mathcal{Y}} f(\overline{X})$ .

## VIII. Fonctions bicontinues. Homéomorphie.

La fonction y=f(x) transformant l'espace  $\mathfrak X$  en l'espace  $\mathcal Y$  (tout entier) est dite *bicontinue*, si elle est biunivoque et si la fonction f(x), ainsi que la fonction inverse  $f^{-1}(y)$ , est continue. La transformation est dite alors une homéomorphie  $^2$ ) et les espaces  $\mathfrak X$  et  $\mathcal Y$  s'appellent homéomorphes (ou du même type topologique; cf. aussi  $\S$  3, IV). Dans le cas où  $\mathfrak X=\mathcal Y$ , l'homéomorphie peut être nommée automorphie (topologique).

On voit aussitôt que l'homéomorphie est une relation symétrique, transitive et réflexive.

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction biunivoque f soit bicontinue:

(1) 
$$f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$$
, quel que soit X,

(2) 
$$f^{-1}(\overline{Y}) = \overline{f^{-1}(Y)}$$
, quel que soit Y.

En effet, d'après IV, (1), l'inclusion  $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$  équivaut à la continuité de la fonction f, tandis que l'inclusion  $\overline{f(X)} \subset f(\overline{X})$  équivaut, d'après IV (2), à la continuité de la fonction  $f^{-1}$ . De là résulte la première partie du théorème. Par un raisonnement analogue on en démontre la deuxième  $f^{-1}$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour l'homéomorphie est aussi la suivante:

(3) 
$$\overline{X} = f^{-1}[\overline{f(X)}], \text{ quel que soit } X,$$

qui équivaut évidemment à la condition:

(3a) 
$$\{x \in \overline{X}\} = \{f(x) \in \overline{f(X)}\}.$$

En effet, dans le cas où la fonction f est biunivoque, notre énoncé est vrai, car l'égalité (3) équivaut à (1). Il s'agit donc de prouver que toute fonction satisfaisant à la condition (3) est biunivoque. Posons f(p) = f(q). Il vient:  $\overline{p} = f^{-1}[\overline{f(p)}] = f^{-1}[\overline{f(q)}] = \overline{q}$ , d'où p = q, c. q. f. d.

IX. Propriétés topologiques. Comme nous l'avons indiqué déjà au § 3, IV, chaque propriété topologique de l'espace (c. à d. propriété énoncée à l'aide de l'opération  $\overline{X}$ ) est invariante par rapport aux transformations bicontinues.

D'une façon plus générale, si un point a (ou un ensemble A, ou une famille d'ensembles A, etc.) possède relativement à l'espace  $\mathcal X$  une propriété donnée et si la fonction f transforme l'espace  $\mathcal X$  en l'espace  $\mathcal Y$  d'une façon bicontinue, le point f(a) possède la même propriété relativement à l'espace  $\mathcal Y$ .

<sup>1)</sup> Voir par ex. F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 20.

<sup>2)</sup> selon une dénomination de H. Poincaré, Journ. Ec. Polyt. (2) 1 (1895), p. 9.

<sup>1)</sup> Cette démonstration ne dépend d'aucun axiome topologique. Voir II, renvoi 1).

Ainsi, deux espaces homéomorphes ne peuvent être distingués l'un de l'autre par aucun moyen topologique. D'une façon analogue, si A et B sont deux ensembles situés respectivement dans les espaces  $\mathfrak{X}$ et  $\mathfrak{Y}$  et s'il existe une transformation bicontinue de  $\mathfrak{X}$  en  $\mathfrak{Y}$  qui transforme A en B, les ensembles A et B sont dans leurs espaces, au point de vue topologique, indiscernables. Nous les appellerons topologiquement équivalents (par rapport aux espaces  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$ ).

Il importe de remarquer que deux ensembles peuvent être homéomorphes et, cependant, leur situation dans l'espace peut être différente, de sorte qu'il n'y ait pas d'équivalence entre eux. Par ex. dans l'espace des nombres réels, un ensemble composé d'un point, d'un segment et d'un second point (dans l'ordre indiqué) n'est pas équivalent (tout en étant homéomorphe) à un ensemble composé de deux points et d'un segment qui les suit. Les mêmes ensembles (considérés comme sous-ensembles du plan) sont équivalents par rapport au plan.

Toutes les propriétés de l'espace, de ses sous-ensembles, des points etc. considérées jusqu'ici sont des propriétés topologiques, donc des invariants des transformations homéomorphes de l'espace.

X. Rang topologique. L'espace  $\Re$  est dit topologiquement contenu 1) dans l'espace  $\mathcal{Y}$ , s'il est homéomorphe à un sous-ensemble de  $\mathcal{Y}$ .

Si  $\mathcal X$  est topologiquement contenu dans  $\mathcal Y$  et  $\mathcal Y$  dans  $\mathcal X$ , nous dirons que  $\mathcal X$  et  $\mathcal Y$  ont le même rang topologique <sup>2</sup>). Par contre, si cette relation n'a lieu que dans un seul sens, on dit que le rang topologique de l'un des espaces est supérieur à celui de l'autre.

Bien entendu, deux espaces peuvent avoir le même rang topologique sans qu'ils soient homéomorphes. Tels sont par ex. la droite illimitée et l'intervalle fermé. On a cependant, d'après un théorème de la Théorie des ensembles  $^3$ ), la proposition suivante:  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  ayant le même rang topologique, il existe un ensemble  $A \in \mathcal{X}$  et un ensemble  $B \in \mathcal{Y}$  tels que A est homéomorphe à B et  $\mathcal{X} - A$  à  $\mathcal{Y} - B$ .

Les rangs topologiques de deux espaces peuvent être incomparables. Tel est par exemple le cas d'une circonférence et d'un ensemble composé de trois segments n'ayant qu'une seule extrémité en commun.

XI. Ensembles homogènes. Un ensemble A est dit homogène dans l'espace, si pour chaque couple a, b de ses points, il existe une automorphie f(x), c. à d. une transformation bicontinue de l'espace en lui-même telle que f(a) = b et f(A) = A. En particulier, l'espace entier est homogène, si tous ses points sont topologiquement équivalents (dans le sens du  $N^0$  IX).

Tels sont par ex. une circonférence, un espace euclidien à n dimensions. Ces espaces sont, en outre, bihomogènes, c. à d. qu'il existe une transformation faisant correspondre b à a et a à b simultanément. Il est d'ailleurs à remarquer qu'un espace peut être homogène sans être bihomogène ').

Dans le même ordre d'idées, on prouve 2) que A étant un ensemble fermé et ouvert simultanément, a et b deux points équivalents et tels que a : A et b : 1 - A, les points a et b sont bi-équivalents, c. à d. qu'il existe une transformation bicontinue f de l'espace en lui-même telle que f(a) = b et  $f(b) = a^3$ ).

Un ensemble A peut ne pas être homogène dans l'espace qui le contient, bien qu'il soit homogène quand on le considère comme un espace pour lui-même.

Il résulte facilement de la définition que, A étant un ensemble homogène, chaque propriété topologique qui appartient à un point de A appartient à tous les autres. En particulier, si l'on envisage les propriétés d'être un point intérieur, un point d'accumulation, un point où l'ensemble donné est de I-re catégorie, on en conclut respectivement que tout ensemble homogène A est

- 1º soit un ensemble ouvert, soit un ensemble frontière;
- 2º soit dense en soi, soit isolé;
- 3º soit un ensemble de I-re catégorie, soit un ensemble qui n'est de I-re catégorie en aucun de ses points.

Dans cet ordre d'idées on a le théorème suivant 4):

<sup>1)</sup> d'après M. P. Alexandroff.

<sup>2) = &</sup>quot;type de dimensions" de M. Fréchet (voir Math. Ann. 68, 1910, p. 145-168) = "Homoïe" de M. Mahlo.

<sup>3)</sup> S. Banach, Fund. Math. 6 (1924), p. 236-239.

<sup>1)</sup> Voir ma note *Un problème sur les ensembles homogènes*, Fund. Math. 3 (1922) p. 14-19 (problème de M. Knaster).

<sup>2)</sup> ibidem, p. 16.

<sup>3)</sup> Dans une note *Ueber topologisch homogene Kontinua*, Fund. Math. 15 (1930), p. 102, M. van Dantzig distingue d'autres genres de homogénéité, en particulier l'homogénéité *involutoire*. Ces notions peuvent aussi être localisées.

<sup>4)</sup> Ce théorème présente une extension aux espaces topologiques d'un théorème de M. Banach concernant les groupes topologiques (voir N° suivant). Le théorème de M. Banach a trouvé des applications importantes dans le Calcul fonctionnel. Voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, cette Collection Tome I (1932), p. 20; v. aussi ma note, *Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques*, Studia Math. 4 (1933).

[§ 13, XII]

Théorème. Soit  $\mathfrak{H}$  une famille d'automorphies de l'espace telle qu'à chaque couple de points x,y corresponde une automorphie h appartenant à cette famille et satisfaisant à l'égalité y=h(x). Soit Z un ensemble tel que l'on ait pour chaque élément h de  $\mathfrak{H}$ .

(1) 
$$soit Z = h(Z), soit Z \cdot h(Z) = 0.$$

Dans ces hypothèses, si Z jouit de la propriété de Baire, Z est ou bien un ensemble de I-re catégorie ou bien un ensemble simultanément fermé et ouvert.

Démonstration. Remarquons d'abord (cf. N° IX) que, z étant un point de Z, si Z jouit d'une propriété (topologique) au point z, l'ensemble h(Z) jouit de la même propriété au point h(z). En outre, Z est homogène, car on peut faire correspondre au point  $z_1 \in Z$  une automorphie h telle que  $z_1 = h(z)$  et, comme  $z_1 \in Z \cdot h(Z)$ , il vient en raison de (1): Z = h(Z).

Il en résulte, selon  $3^{\circ}$ , que si Z n'est pas de I-re catégorie, Z n'est de I-re catégorie dans aucun de ses points. On en conclut en vertu de la propriété de Baire (§ 11, IV, cor. 2) qu'il existe un point  $z \in Z$  dans lequel 1-Z est de I-re catégorie. Soit donc G un ensemble ouvert tel que  $z \in G$  et que G-Z soit de I-re catégorie. Nous allons prouver que G-Z=0.

Supposons, par contre, que  $p \in G - Z$ . Soit h une automorphie appartenant à  $\mathfrak H$  et telle que p = h(z). Comme  $p \in h(Z) - Z$ , il vient selon (1):  $Z \cdot h(Z) = 0$ , d'où  $h(Z) \subset 1 - Z$ , donc  $G \cdot h(Z) \subset G - Z$ , ce qui prouve que  $G \cdot h(Z)$  est un ensemble de I-re catégorie. Par conséquent, h(Z) est de I-re catégorie au point p = h(z). Mais cela contredit la remarque faite au début de la démonstration, puisque Z n'est pas de I-re catégorie au point z.

L'inclusion  $G \subset Z$  établie, il en résulte que z est un point intérieur de Z, donc, Z étant homogène, Z est ouvert (selon 1°).

Reste à prouver que Z est fermé.

Soit  $p \in \overline{Z}$  et  $z \in Z$ . Posons, comme auparavant, p = h(z). L'ensemble Z étant ouvert et h étant une automorphie de l'espace, h(Z) est aussi ouvert. Par conséquent les formules  $p \in \overline{Z}$  et  $p \in h(Z)$  entraînent  $Z \cdot h(Z) \neq 0$ , d'où Z = h(Z), donc  $p \in Z$ , c. q. f. d.

XII. Applications aux groupes topologiques. Un espace topologique (satisfaisant aux ax. I—III) s'appelle groupe topologique 1), lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple de points x, y leur "somme" z=x+y de façon que:  $1^0$  (x+y)+z=x+(y+z),  $2^0$  il existe l'élément-zéro y tel que x+y=x=y+x, y0 il existe l'élément y0 tel que y1 es opérations y2 et y3 où continues 2).

Posons  $h_a(x) = a + x$ . On voit aussitôt que la condition  $y = h_a(x)$  entraîne  $x = h_{-a}(y)$ . On en conclut que  $h_a(x)$  est (pour a fixe) une automorphie de l'espace et que la famille  $\phi$  de toutes les fonctions  $h_a$  satisfait à l'hypothèse du théorème du  $N^0XI$ .

On appelle sous-groupe chaque ensemble qui, avec x, contient (-x) et, avec x et y, contient x+y. On vérifie facilement que, Z étant un sous-groupe, la condition XI (1) est réalisée. D'après ce qui précède chaque sous-groupe est homogène (en particulier, chaque groupe topologique est homogène). En vertu du théorème du  $N^0$  XI, tout sous-groupe qui jouit de la propriété de Baire est soit un ensemble de 1-re catégorie, soit un ensemble à la fois fermé et ouvert.

1) V. p. ex. D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra, Math. Ann. 107 (1932), p. 587 — 626, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques.

<sup>2)</sup> Une fonction continue de deux variables est une fonction continue d'une seule variable parcourant un produit cartésien (voir § 23, I). Pour les applications dont il est question ici, il suffit de supposer la continuité selon chacune des variables séparément.