INTRODUCTION.

Nous rappellerons ici quelques notations et théorèmes élémentaires de la Théorie générale des ensembles et de l'Algèbre de la Logique. Les notions de la Théorie des ensembles seront d'emploi constant (excepté l'opération $(\mathcal{A})$, qui est d'un caractère plus spécial). L'Algèbre de la Logique, dans la majorité des §§ (surtout dans ceux de nature „géométrique") ne sera pas employée, tandis que nous en ferons usage dans certains problèmes (surtout liés à la Théorie des fonctions) où l'emploi des notations logiques s'impose d'une façon très naturelle et permet de simplifier les raisonnements (p. ex. aux §§ 27, 33—35).

A la première lecture, on peut omettre tout ce qui concerne l'Algèbre de la Logique.

§ 1. Opérations de la Logique et de la Théorie des ensembles.

I. Algèbre de la Logique. α et β étant deux propositions, α' désigne la *négation* de α (c'est à dire „non α"), $\alpha+\beta$ la *somme* logique („α ou β"), $\alpha\cdot\beta$ le *produit* logique („α et β"); $\alpha\rightarrow\beta$ veut dire que α entraîne β *(implication)*, $\alpha\equiv\beta$ veut dire que α équivaut à β.

Citons, à titre d'exemple, les théorèmes suivants: $\alpha''\equiv\alpha$ (loi de double négation), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\beta'\rightarrow\alpha')$ (loi de contraposition), $(\alpha\cdot\beta)'\equiv\alpha'+\beta'$, $(\alpha+\beta)'\equiv(\alpha'\cdot\beta')$ (lois de de Morgan), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\alpha'+\beta)$, $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\equiv\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Chaque proposition admet l'une des deux valeurs 0 (le „faux") ou 1 (le „vrai"). On a $\alpha\cdot\alpha'\equiv 0$ (principe de contradiction), $\alpha+\alpha'\equiv 1$ (principe du tiers exclu).

II. Algèbre de la Théorie des ensembles. Soit 1 un ensemble donné (ce sera dans la suite l'*espace* considéré). Les éléments de cet ensemble (les *points*) seront désignés par des minuscules latines $a, b, x, y, \ldots$; les sous-ensembles de l'ensemble 1 seront désignés par des majuscules $A, B, X, \ldots$; les familles de sous-ensembles (ensembles du deuxième rang) par $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}, \ldots$ [1]).

$x \varepsilon X$ signifie que x est un élément de l'ensemble X. On désigne respectivement par $X+Y$, $X \cdot Y$ (ou XY), $X-Y$: l'ensemble composé d'éléments qui appartiennent soit à X, soit à Y, l'ensemble formé par la partie commune de X et Y, l'ensemble des éléments qui appartiennent à X, mais pas à Y. L'ensemble vide est désigné par 0. On écrit $X \subset Y$, lorsque X est un sous-ensemble de Y. Le „complémentaire de X" $= X' = 1 - X$.

On a ainsi les équivalences suivantes:

$$(x \varepsilon A)' \equiv (x \varepsilon A'), \quad (x \varepsilon A) + (x \varepsilon B) \equiv x \varepsilon (A+B), \quad (x \varepsilon A) \cdot (x \varepsilon B) \equiv x \varepsilon A \cdot B,$$

$$1 \equiv (x \varepsilon 1), \qquad 0 \equiv (x \varepsilon 0),$$

$$(A \subset B) \equiv [(x \varepsilon A) \rightarrow (x \varepsilon B)], \qquad (A = B) \equiv [(x \varepsilon A) \equiv (x \varepsilon B)],$$

les symboles $'$, $+$, $\cdot$, 1, 0, ayant dans le membre gauche le sens logique et dans le membre droit le sens de la Théorie des ensembles.

Citons les formules suivantes:

$$A = AB + A - B, \quad AB \subset A \subset A + B, \quad (A+B)' = A'B', \quad (AB)' = A' + B',$$

$$(A = B) \equiv (A \subset B) \cdot (B \subset A),$$

$$(A \subset B) \equiv (A + B = B) \equiv (AB = A) \equiv (A - B = 0).$$

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints*, lorsque $AB = 0$. L'ensemble composé d'un seul élément a est désigné par (a).

III. Fonctions propositionnelles. Soit $\varphi(x)$ une fonction propositionnelle dont la variable x parcourt l'espace 1, supposé $\neq 0$ ($\varphi(x)$ exprime une condition; elle devient une proposition vraie pour toute valeur de x satisfaisant à cette condition; elle devient

[1]) Les différents caractères mettent en évidence les différents *types logiques* des variables.

une proposition fausse dans le cas contraire; si, par ex. dans l'espace des nombres réels, on considère la propriété d'être un nombre positif, on a $\varphi(x) \equiv (x > 0)$).

$\sum_x \varphi(x)$ veut dire: il existe un x tel que $\varphi(x)$ (c. à d. un x satisfaisant à la condition considérée).

$\prod_x \varphi(x)$ veut dire: quel que soit x, on a $\varphi(x)$ (c. à d. que la condition est vérifiée par chaque x).

Par exemple: $\prod_x (x + 2 > x)$, $\sum_x (x^2 = x)$.

On a les formules suivantes, faciles à vérifier:

$\left(\sum_x \varphi(x)\right)' \equiv \prod_x \varphi'(x)$ (formule de de Morgan généralisée),

$$\left(\prod_x \varphi(x)\right) \rightarrow \left(\sum_x \varphi(x)\right), \quad \sum_x \varphi(x) + \sum_x \psi(x) \equiv \sum_x [\varphi(x) + \psi(x)],$$

$$\prod_x \varphi(x) \cdot \prod_x \psi(x) \equiv \prod_x [\varphi(x) \cdot \psi(x)], \quad \sum_x [\varphi(x) \cdot \psi(x)] \rightarrow \sum_x \varphi(x) \cdot \sum_x \psi(x),$$

$$\prod_x \varphi(x) + \prod_x \psi(x) \rightarrow \prod_x [\varphi(x) + \psi(x)].$$

Rien n'empèche de considérer toute proposition α comme une fonction propositionnelle (qui est soit identiquement vraie, soit identiquement fausse). On a $\sum_x \alpha \equiv \alpha \equiv \prod_x \alpha$, $\sum_x [\alpha \cdot \varphi(x)] \equiv \alpha \cdot \sum_x \varphi(x)$, $\alpha + \prod_x \varphi(x) \equiv \prod_x [\alpha + \varphi(x)]$.

IV. Opérateur $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$. L'ensemble des x qui satisfont à la condition φ est désigné par $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$. Par ex. $\underset{x}{E}\,(x > 0)$ est l'ensemble des nombres positifs, $\underset{x}{E}\,(x^2 = x)$ se compose de deux nombres: 0 et 1.

On a l'identité

1. $$t \,\varepsilon \underset{x}{E}\, \varphi(x) \equiv \varphi(t),$$

d'où on déduit facilement en vertu des équivalences du N° II les formules:

2. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x)]' = [\underset{x}{E}\, \varphi(x)]'$$

3. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) + \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) + \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

4. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cdot \underset{x}{E}\, \psi(x).$$

Ainsi, par ex., on prouve la dernière égalité comme suit:

$$t \varepsilon \underset{x}{E}[\varphi(x)\cdot\psi(x)] \equiv \varphi(t)\cdot\psi(t) \equiv [t \varepsilon \underset{x}{E}\varphi(x)]\cdot[t \varepsilon \underset{x}{E}\psi(x)] \equiv$$
$$\equiv t \varepsilon \underset{x}{E}\varphi(x)\cdot\underset{x}{E}\psi(x).$$

En outre, $\underset{x}{E}\,0 = 0$, $\underset{x}{E}\,1 = 1$, les symboles du membre gauche ayant, comme toujours, le sens logique et ceux du membre droit le sens mathématique.

V. Opérations infinies. Soit A_ι un ensemble dépendant d'un paramètre ι (qui parcourt un ensemble donné) [1]). Les ensembles $\sum_\iota A_\iota$ („somme des ensembles A_ι") et $\prod_\iota A_\iota$ („produit des ensembles A_ι") sont définis par les identités:

$$\sum_\iota (t \varepsilon A_\iota) \equiv [t \varepsilon \sum_\iota A_\iota], \qquad \prod_\iota (t \varepsilon A_\iota) \equiv [t \varepsilon \prod_\iota A_\iota].$$

En remplaçant dans les formules du N° III les fonctions propositionnelles $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ par A_ι et B_ι, x par ι et $\rightarrow$ par $\subset$, on obtient des formules concernant les opérations $\sum_\iota A_\iota$ et $\prod_\iota A_\iota$ de la Théorie des ensembles; citons comme exemple la régle de de Morgan généralisée: $(\sum_\iota A_\iota)' = \prod_\iota A'_\iota$.

En cas où le paramètre n parcourt l'ensemble des nombres naturels, on emploie les symboles $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ par analogie aux séries et aux produits infinis de l'Analyse.

VI [2]). Opération ($\mathcal{A}$) [3]). Supposons qu'on a fait correspondre à chaque système fini d'entiers positifs $k_1, \ldots, k_n$ un ensemble

---

1) D'habitude l'indice ι parcourra un ensemble arbitraire, dénombrable ou non; cependant i, k, n etc. désigneront un nombre naturel variable.

2) La lecture du N° VI peut être remise jusqu'à celle du § 11.

3) Voir les notes de MM. Souslin et Lusin dans les Comptes Rendus, Paris, t. 164 (1917), p. 88 ss.; voir aussi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, § 19.

L'importance de l'opération ($\mathcal{A}$) tient surtout au fait que, malgré sa généralité, il y a des propriétés importantes (telles que la mesurabilité, la propriété de Baire, cf. § 11) qui en sont des invariants.

$A_{k_1 \ldots k_n}$. L'ensemble-somme de tous les produits de la forme $\prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n}$ est dit „résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur le système des ensembles $A_{k_1 \ldots k_n}$".

L'opération ($\mathcal{A}$) est une opération indénombrable (la sommation étant indénombrable). Les opérations dénombrables $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\prod_{n=1}^{\infty}$ en sont des cas particuliers, cas, où l'on pose soit $A_{k_1 \ldots k_n} = B_{k_1}$, soit $A_{k_1 \ldots k_n} = B_n$.

Soit $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^n, \ldots]$ une suite variable de nombres naturels (on peut considérer $\mathfrak{z}$ comme le nombre irrationnel dont le développement en fraction continue est $\frac{1|}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^2} + \ldots + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^n} + \ldots$).

Le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) s'exprime alors par la formule

$$R = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n}.$$

Le système d'ensembles $\{A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n}\}$ est dit *régulier*, lorsque

$$A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n \mathfrak{z}^{n+1}} \subset A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n}.$$

Citons les formules suivantes concernant l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur un système régulier [1]):

1. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{m\,\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}$$

et d'une façon plus générale:

1a. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \ldots \mathfrak{y}^i\, m\, \mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \ldots \mathfrak{y}^i\, \mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k};$$

2. $A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} \subset B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}$ *entraîne* $\sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k} \subset \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} B_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}$;

3. *la sommation* $\sum_{\mathfrak{z}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^k}$ *est dénombrable*

---

1) Cf. N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur quelques propriétés des ensembles* ($\mathcal{A}$), Bull. Acad. Sc. Cracovie 1918, p. 35.

(l'ensemble des systèmes finis de nombres naturels étant dénombrable);

4. $$A-\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{k=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k}\subset\sum_{\mathfrak{z}}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k}-\sum_{m=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k m}),$$

où l'on pose $A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k}=A$ pour $k=0$.

Pour prouver cette dernière inclusion, supposons que $p\,\varepsilon\, A$ et que p n'appartienne pas au membre droit de l'inclusion; donc, en symboles logiques:

$$\prod_{\mathfrak{z}}\prod_{k=0}^{\infty}[(p\,\varepsilon\, A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k})\rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}(p\,\varepsilon\, A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k m})],$$

ce qui veut dire que, $m_1\ldots m_k$ étant un système fini ($k\geqslant 0$) d'indices tels que $p\,\varepsilon\, A_{m_1\ldots m_k}$, il existe un indice m tel que $p\,\varepsilon\, A_{m_1\ldots m_k m}$. Or, comme $p\,\varepsilon\, A$, on en conclut que, pour un certain indice m_1, $p\,\varepsilon\, A_{m_1}$; d'où pour la même raison $p\,\varepsilon\, A_{m_1 m_2}$ etc. Il existe par conséquent une suite infinie d'indices $m_1, m_2, \ldots$ telle que $p\,\varepsilon\prod\limits_{k=1}^{\infty}A_{m_1\ldots m_k}$, donc $p\,\varepsilon\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{k=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^k}$, ce qui prouve que p n'appartient pas au membre gauche de l'inclusion 4, c. q. f. d.

5. *Si deux ensembles $A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}$ et $A_{\mathfrak{y}^1\ldots\mathfrak{y}^n}$, pourvus de différents systèmes de n indices, sont toujours disjoints, on a*

$$\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{n=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{z}}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}.$$

En effet, l'inclusion $\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}\subset\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{\mathfrak{z}}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}$ a lieu toujours (même si le système n'est pas régulier; v. d'ailleurs § 2, IV). Supposons donc que p appartienne au membre droit. Il existe alors un et un seul indice m_1 tel que $p\,\varepsilon\, A_{m_1}$; d'une façon analogue, il existe un couple d'indices l_1, m_2 tel que $A_{l_1 m_2}$. Comme $A_{l_1 m_2}\subset A_{l_1}$, il vient $p\,\varepsilon\, A_{l_1}$ et on en conclut que $l_1=m_1$. On démontre de la même façon qu'il existe un indice m_3 tel que $p\,\varepsilon\, A_{m_1 m_2 m_3}$ etc. En désignant par $\mathfrak{z}$ la suite infinie $m_1, m_2, m_3, \ldots$, on voit bien que pour chaque n on a $p\,\varepsilon\, A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}$, d'où $p\,\varepsilon\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_{\mathfrak{z}^1\ldots\mathfrak{z}^n}$.

§ 2. Produit cartésien.

I. Définitions [1]. *Le produit cartésien* (qu'il ne faut pas confondre avec le produit = partie commune) des ensembles A et B est l'ensemble $A\times B$ composé de tous les couples ordonnés a, b où $a\,\varepsilon\, A$ et $b\,\varepsilon\, B$. D'une façon analogue, étant donnée une suite finie ou infinie d'ensembles $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, leur produit cartésien se compose de toutes les suites finies (formées de n termes) ou infinies dont les termes sont extraits successivement des ensembles donnés. On désigne ce produit par $\underset{k=1}{\overset{n}{P}}A_k$ et $\underset{n=1}{\overset{\infty}{P}}A_n$ respectivement.

En cas où $A_1=\ldots=A_n=A$, on pose $A_1\times\ldots\times A_n=A^n$. Si tous les termes du produit cartésien infini $\underset{n=1}{\overset{\infty}{P}}A_n$ sont identiques à A, on écrit

$$\underset{n=1}{\overset{\infty}{P}}A_n=A^{\aleph_0}.$$

Ainsi, par ex., le plan des nombres complexes est le „carré" de l'espace des nombres réels; $\mathcal{J}$ désignant l'intervalle 01, $\mathcal{J}^2$ désigne un carré, $\mathcal{J}^3$ un cube, $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ le „cube fondamental" de Hilbert (voir § 14). On verra aussi que, en cas où A se compose de deux éléments, $A^{\aleph_0}$ peut être conçu comme l'ensemble non-dense de Cantor; si A désigne l'ensemble des nombres naturels, $A^{\aleph_0}$ est l'ensemble des nombres irrationnels (v. § 1, VI).

II. Formules de calcul. En s'appuyant sur les équivalences: $\{(xy)\,\varepsilon\, A\times B\}\equiv\{(x\,\varepsilon\, A)\cdot(y\,\varepsilon\, B)\}$, $\{(x_1, x_2, \ldots)\,\varepsilon\,\underset{n}{P}A_n\}\equiv\prod\limits_n(x_n\,\varepsilon\, A_n)$, on prouve facilement que

1. $$(A+B)\times(C+D)=A\times C+A\times D+B\times C+B\times D$$

et d'une façon générale:

1a. $$(\sum_\iota A_\iota)\times(\sum_\varkappa B_\varkappa)=\sum_{\iota\varkappa}(A_\iota\times B_\varkappa);$$

2. $$(AC)\times(BD)=(A\times B)\cdot(C\times D),$$

2a. $$(\prod_\iota A_\iota)\times(\prod_\varkappa B_\varkappa)=\prod_{\iota\varkappa}(A_\iota\times B_\varkappa),$$

[1] Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 37.

2b. $$\prod_{\iota} \underset{n}{P} A_{\iota, n} = \underset{n}{P} \prod_{\iota} A_{\iota, n};$$

3. $$(A - B) \times C = A \times C - B \times C;$$

4. $[A \subset B \text{ et } C \subset D] \equiv [A \times C \subset B \times D]$ (si $A \neq 0 \neq C$),

4a. *Si* $A \times C = B \times D$, *on a* $A = B$ *et* $C = D$ (à moins qu'un de ces ensembles ne soit vide),

4b. *Si* $\underset{n}{P} A_n = \underset{n}{P} B_n$, *on a* $A_n = B_n$ (si $A_k \neq 0 \neq B_k$ pour chaque k).

Si A est un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{X}$ et B de l'espace $\mathcal{Y}$ (ou, plus généralement, si $A_n \subset \mathcal{X}_n$), on a les formules suivantes:

5. $$(A \times B)' = A' \times \mathcal{Y} + \mathcal{X} \times B',$$

5a. $$(\underset{n}{P} A_n)' = \sum_n \mathfrak{A}_n^*$$

où $$\mathfrak{A}_n^* = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_{n-1} \times (\mathcal{X}_n - A_n) \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots;$$

6. $$A \times B = (A \times \mathcal{Y}) \cdot (\mathcal{X} \times B),$$

6a. $$\underset{n}{P} A_n = \prod_n \mathfrak{A}_n$$

où $$\mathfrak{A}_n = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_{n-1} \times A_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots$$

III. Axes, coordonnées, projections. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces donnés, nous les appelons (par analogie à la Géométrie analytique) *axes* du produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Chaque point $\mathfrak{z}$ du produit $\mathfrak{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ étant de la forme (x, y), on appelle x et y les *coordonnées* de $\mathfrak{z}$ (l'abscisse et l'ordonnée). La projection „parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$" d'un ensemble $\mathfrak{E}$ contenu dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est l'ensemble des abscisses des points de $\mathfrak{E}$; c'est donc l'ensemble $\underset{x}{E} \sum_y [(x, y) \in \mathfrak{E}]$.

Les définitions précédentes se généralisent aussitôt au cas du produit d'un nombre arbitraire de termes. En particulier, $\mathfrak{z}$ étant un point de l'ensemble $\underset{n}{P} \mathcal{X}_n$, la n-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$ est désignée par $\mathfrak{z}^{(n)}$; de sorte que

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{z}^{(n)}, \ldots$$

(les parenthèses seront, d'ailleurs, souvent omises).

IV. Fonctions propositionnelles de plusieurs variables. Une fonction propositionnelle $\varphi(x, y)$ de deux variables dont l'une parcourt l'espace $\mathcal{X}$ et l'autre l'espace $\mathcal{Y}$ peut être considérée comme fonction d'une seule variable $\mathfrak{z}$ qui parcourt le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Les formules du § 1, III restent donc valables, lorsqu'on considère des fonctions de plusieurs variables et remplace la variable x par le système des variables. On a en outre:

$$\sum_{xy} \varphi(x, y) \equiv \sum_x \sum_y \varphi(x, y) \equiv \sum_y \sum_x \varphi(x, y),$$

$$\prod_{xy} \varphi(x, y) \equiv \prod_x \prod_y \varphi(x, y) \equiv \prod_y \prod_x \varphi(x, y),$$

$$\sum_x \varphi(x) \cdot \sum_x \psi(x) \equiv \sum_{xx^*} [\varphi(x) \cdot \psi(x^*)],$$

$$\prod_x \varphi(x) + \prod_x \psi(x) \equiv \prod_{xx^*} [\varphi(x) + \psi(x^*)],$$

$$\sum_x \varphi(x) + \prod_x \psi(x) \equiv \sum_x \prod_{x^*} [\varphi(x) + \psi(x^*)] \equiv \prod_{x^*} \sum_x [\varphi(x) + \psi(x^*)]$$

$$\sum_x \varphi(x) \cdot \prod_x \psi(x) \equiv \sum_x \prod_{x^*} [\varphi(x) \cdot \psi(x^*)] \equiv \prod_{x^*} \sum_x [\varphi(x) \cdot \psi(x^*)]$$

$$\sum_x \prod_y \varphi(x, y) \to \prod_y \sum_x \varphi(x, y).$$

Si les variables x et y parcourent le même espace ($\mathcal{X} = \mathcal{Y}$), on a la table suivante des inclusions:

$$\begin{tikzcd}
 & \sum_x \prod_y \varphi(x, y) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_y \sum_x \varphi(x, y) \arrow[dr] & \\
\prod_{xy} \varphi(x, y) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_x \varphi(x, x) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \sum_x \varphi(x, x) \arrow[r] & \sum_{xy} \varphi(x, y). \\
 & \sum_y \prod_x \varphi(x, y) \arrow[ur] \arrow[r] & \prod_x \sum_y \varphi(x, y) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exemple. Le fait qu'une fonction f de variable réelle est continue en chaque point s'exprime de cette façon:

$$\prod_{\epsilon} \prod_x \sum_{\delta} \prod_h \{[|h| < \delta] \to [|f(x+h) - f(x)| < \epsilon]\},$$

x et h parcourant l'ensemble des nombres réels et ϵ et δ étant > 0.

En renversant l'ordre des opérateurs $\prod_x$ et $\sum_{\delta}$, on obtient la définition de la continuité uniforme.

V. Relations entre les opérateurs $\underset{x}{E}$ et $\underset{x}{\sum}$.

1. $$\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\varphi(x,y)=\underset{y}{\sum}\,\underset{x}{E}\,\varphi(x,y).$$

En effet, d'après § 1, IV, 1, $t\,\varepsilon\,\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\varphi(x,y)\equiv\underset{y}{\sum}\varphi(t,y)$. En désignant par A_y l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x,y)$, on a $\varphi(t,y)\equiv t\,\varepsilon\,\underset{x}{E}\,\varphi(x,y)\equiv t\,\varepsilon\,A_y$, d'où d'après § 1, V:

$$\underset{y}{\sum}\varphi(t,y)\equiv\underset{y}{\sum}(t\,\varepsilon\,A_y)\equiv t\,\varepsilon\,\underset{y}{\sum}A_y\equiv t\,\varepsilon\,\underset{y}{\sum}\,\underset{x}{E}\,\varphi(x,y).$$

D'une façon analogue:

2. $$\underset{x}{E}\,\underset{y}{\prod}\varphi(x,y)=\underset{y}{\prod}\,\underset{x}{E}\,\varphi(x,y).$$

3. *L'ensemble $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\varphi(x,y)$ est la projection de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$*[1].

En effet, si l'on pose $\mathfrak{E}=\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$, on a l'équivalence $\varphi(x,y)\equiv\{(x,y)\,\varepsilon\,\mathfrak{E}\}$; donc l'ensemble $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\varphi(x,y)$, comme identique à $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\{(x,y)\,\varepsilon\,\mathfrak{E}\}$, est la projection de $\mathfrak{E}$ (voir III).

VI. Multiplication cartésienne par un axe. On a l'identité:

$$\underset{xy}{E}\,\varphi(y)=\mathcal{X}\times\underset{y}{E}\,\varphi(y).$$

Ainsi, par exemple, $\underset{xy}{E}\,[\varphi(x)+\psi(y)]=\underset{xy}{E}\,\varphi(x)+\underset{xy}{E}\,\psi(y)=$ $=\left[\underset{x}{E}\,\varphi(x)\right]\times\mathcal{Y}+\mathcal{X}\times\underset{y}{E}\,\varphi(y)$ (cf. § 1, IV, 3). De même (cf. II, 6):

$$\underset{xy}{E}\,[\varphi(x)\cdot\psi(y)]=\{[\underset{x}{E}\,\varphi(x)]\times\mathcal{Y}\}\cdot\{\mathcal{X}\times\underset{y}{E}\,\psi(y)\}=\underset{x}{E}\,\varphi(x)\times\underset{y}{E}\,\psi(y).$$

Exemples. 1. Soient A l'ensemble des nombres entiers et R celui des nombres rationnels. On a, par définition:

$$R=\underset{x}{E}\,\underset{y}{\sum}\,\underset{z}{\sum}\{(y\,\varepsilon\,A)\cdot(z\,\varepsilon\,A)\cdot(xz=y)\cdot(z\neq 0)\}.$$

---

[1]) Ces énoncés se trouvent dans la note de M. A. Tarski et moi, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. 17 (1931), p. 243. L'importance de la proposition 3 tient au fait que la projection est une opération continue.

Posons $\mathfrak{E}=\underset{xyz}{E}\,\{(y\,\varepsilon\,A)\cdot(z\,\varepsilon\,A)\cdot(xz=y)\cdot(z\neq 0)\}$. D'après § 1, IV, 4, cet ensemble est la partie commune de quatre ensembles: 1⁰ de l'ensemble $\underset{xyz}{E}\,(y\,\varepsilon\,A)=\mathcal{X}\times\underset{y}{E}\,(y\,\varepsilon\,A)\times\mathcal{Z}$, c. à d. de l'ensemble des plans parallèles au plan $\mathcal{X}\times\mathcal{Z}$ et passant par les points entiers de l'axe $\mathcal{Y}$, 2⁰ de l'ensemble $\underset{xyz}{E}\,(z\,\varepsilon\,A)$, qui est également un ensemble constitué par des plans, 3⁰ du paraboloïde hyperbolique défini par l'équation $y=xz$, 4⁰ de l'ensemble $\underset{xyz}{E}\,(z\neq 0)$, c. à d. de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ diminué du plan $z=0$.

D'après V, 3, l'ensemble R s'obtient de $\mathfrak{E}$, en le projetant d'abord sur le plan $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et puis, en projetant cette projection sur l'axe $\mathcal{X}$.

2. Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$,... une suite de fonctions continues. L'ensemble des points de convergence de cette suite est par définition:

$$C=\underset{x}{E}\,\underset{k}{\prod}\,\underset{n}{\sum}\,\underset{m}{\prod}\left\{|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right\}.$$

En posant $A_{n,m,k}=\underset{x}{E}\left\{|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right\}$, on a donc $C=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{m=1}^{\infty}A_{n,m,k}$. L'ensemble $A_{n,m,k}$ étant fermé, on en conclut que C est un $F_{\sigma\delta}$.

§ 3. Fonctions.

I. Notations. Soit $f(x)$ une fonction dont les arguments appartiennent à l'espace $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathcal{Y}$. Posons: $A=$ l'ensemble des *arguments*, $V=$ l'ensemble des *valeurs*. On a donc $A\subset\mathcal{X}$ et $V\subset\mathcal{Y}$.

X étant un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, $f(X)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{Y}$ qui correspondent aux éléments de X. En symboles:

$$\{y\,\varepsilon\,f(X)\}\equiv\underset{x}{\sum}(x\,\varepsilon\,X)\;[y=f(x)].$$

Inversement, si $Y\subset\mathcal{Y}$, on désigne par $f^{-1}(Y)$ l'ensemble de tous les x dont les valeurs appartiennent à Y. En symboles:

$$\{x\,\varepsilon\,f^{-1}(Y)\}\equiv\{f(x)\,\varepsilon\,Y\},\quad\text{d'où}\quad f^{-1}(Y)=\underset{x}{E}\,\{f(x)\,\varepsilon\,Y\}.$$

D'une façon analogue, $\boldsymbol{X}$ étant une *famille* d'ensembles (ensemble du deuxième rang), $f(\boldsymbol{X})$ désigne la famille qui s'en obtient, en remplaçant les ensembles X qui lui appartiennent par $f(X)$.

II. Formules de calcul. On prouve facilement que:

1. $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$ 1a. $f(\sum_\iota X_\iota)=\sum_\iota f(X_\iota)$

2. $f(X_1\cdot X_2)\subset f(X_1)\cdot f(X_2)$ 2a. $f(\prod_\iota X_\iota)\subset\prod_\iota f(X_\iota)$

3. $f(X_1)-f(X_2)\subset f(X_1-X_2)$ 4. *si* $X_1\subset X_2$, $f(X_1)\subset f(X_2)$

5. $\{f(X)=0\}\equiv\{XA=0\}$

6. $f^{-1}(Y_1+Y_2)=f^{-1}(Y_1)+f^{-1}(Y_2)$ 6a. $f^{-1}(\sum_\iota Y_\iota)=\sum_\iota f^{-1}(Y_\iota)$

7. $f^{-1}(Y_1\cdot Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cdot f^{-1}(Y_2)$ 7a. $f^{-1}(\prod_\iota Y_\iota)=\prod_\iota f^{-1}(Y_\iota)$

8. $f^{-1}(Y_1-Y_2)=f^{-1}(Y_1)-f^{-1}(Y_2)$

9. $Y_1\subset Y_2$ *entraîne* $f^{-1}(Y_1)\subset f^{-1}(Y_2)$

10. $\{f^{-1}(Y)=0\}\equiv\{YV=0\}$

11. $XA\subset f^{-1}f(X)$ 12. $ff^{-1}(Y)=YV$

13. $f(X)\cdot Y=f[X\cdot f^{-1}(Y)]$.

A titre d'exemple nous établirons la formule 13. Supposons que $y\,\varepsilon\, f(X)\cdot Y$, c. à d. qu'il existe un $x\,\varepsilon\, X$ tel que $y=f(x)\,\varepsilon\, Y$, donc que $x\,\varepsilon\, f^{-1}(Y)$. Par conséquent $y\,\varepsilon\, f[X\cdot f^{-1}(Y)]$. Ainsi, $f(X)\cdot Y\subset f[X\cdot f^{-1}(Y)]$. Inversement, d'après les formules 2 et 12 $f[X\cdot f^{-1}(Y)]\subset f(X)\cdot ff^{-1}(Y)=f(X)\cdot Y$, d'où la formule 13.

En restreignant les arguments de la fonction f à un sous-ensemble E de A, on obtient une *fonction partielle*, désignée par $f|E$ [1]). On a les propositions suivantes:

14. $g=f|E$ *entraîne* $g^{-1}(Y)=E\cdot f^{-1}(Y)$

15. *si* $\mathcal{X}=\sum_\iota E_\iota$ *et* $f_\iota=f|E_\iota$, *on a* $f^{-1}(Y)=\sum_\iota f_\iota^{-1}(Y)$.

En effet, 14 résulte des équivalences

$$[x\,\varepsilon\, g^{-1}(Y)]\equiv[g(x)\,\varepsilon\, Y]\equiv[x\,\varepsilon\, E]\cdot[f(x)\,\varepsilon\, Y]\equiv[x\,\varepsilon\, E\cdot f^{-1}(Y)]$$

et, quant à 15, on a $f^{-1}(Y)=\sum_\iota f^{-1}(Y)\cdot E_\iota=\sum_\iota f_\iota^{-1}(Y)$.

[1]) ou bien par $f(x|E)$; v. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 194.

III. Fonctions biunivoques. Lorsque la condition $f(x_1)=f(x_2)$ entraîne l'égalité $x_1=x_2$, la fonction f est dite *biunivoque*. La fonction inverse $x=f^{-1}(y)$ transforme alors d'une façon biunivoque l'ensemble V en A. On a évidemment:

$$f^{-1}f(x)=x \quad pour \quad x\,\varepsilon\, A \quad et \quad ff^{-1}(y)=y \quad pour \quad y\,\varepsilon\, V,$$

$$\{x_1=x_2\}\equiv\{f(x_1)=f(x_2)\} \quad et \quad \{x\,\varepsilon\, X\}\equiv\{f(x)\,\varepsilon\, f(X)\} \quad pour \quad X\subset A.$$

Dans les formules 2, 2a, 3 et 11, le signe d'inclusion peut être remplacé par celui d'identité.

IV. Fonctions topologiques. Dans la suite, nous emploierons, outre les fonctions propositionnelles primitives de la Logique et de la Théorie des ensembles: $x=y$, $x\,\varepsilon\, X$ (étendues à tous les types d'ordre des variables: $X\,\varepsilon\,\boldsymbol{X}$ etc.), la fonction propositionnelle primitive *topologique* $x\,\varepsilon\,\overline{X}$ (où $\overline{X}$, nommé *fermeture* de l'ensemble X, est un sous-ensemble de l'espace). Les trois opérations logiques $+$, $'$, et $\sum$, effectuées sur ces fonctions primitives, *suffisent pour construire la Topologie toute entière;* toute fonction propositionnelle ainsi obtenue sera dite *topologique*.

On a vu au N⁰ précédent que, $f(x)$ étant une transformation biunivoque de l'espace $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, la relation $x_1=x_2$ équivaut à $f(x_1)=f(x_2)$ et la relation $x\,\varepsilon\, X$ à $f(x)\,\varepsilon\, f(X)$. Supposons, en outre, que la relation $x\,\varepsilon\,\overline{X}$ équivale à $f(x)\,\varepsilon\,\overline{f(X)}$. La transformation f est dite alors une *homéomorphie* [1]).

On vérifie que, *f étant une homéomorphie, toute fonction propositionnelle topologique concernant l'espace $\mathcal{X}$, équivaut à la fonction propositionnelle qui s'en obtient, en substituant $f(x)$ à x, $f(X)$ à X etc.*

En d'autres termes: *tout ce qui se laisse exprimer à l'aide des fonctions propositionnelles topologiques est un invariant de l'homéomorphie.*

Ainsi, par ex., considérons la propriété de l'espace $\mathcal{X}$ d'être dense en soi. Elle s'exprime par la condition $\prod_x x\,\varepsilon\,\overline{\mathcal{X}-(x)}$. Posons $y=f(x)$. La fonction f étant supposée une homéomorphie, on en conclut que $\prod_y y\,\varepsilon\,\overline{f(\mathcal{X})-(y)}$, donc $\prod_y y\,\varepsilon\,\overline{\mathcal{Y}-(y)}$, ce qui signifie que l'espace $\mathcal{Y}$ est dense en soi.

La condition que l'ensemble X, situé dans l'espace $\mathcal{X}$, soit fermé s'exprime par l'égalité $X=\overline{X}$. Il vient $f(X)=\overline{f(X)}$, ce qui signifie que l'ensemble qui correspond à X est, dans l'espace $\mathcal{Y}$, fermé.

[1]) Nous reviendrons sur cette notion au § 13, VIII.

V. **Notations auxiliaires.** Les notations dont il était question jusqu'à présent suffisent théoriquement — comme nous l'avons dit — pour y fonder la Topologie. Mais pour des raisons pratiques on se sert en outre des autres notations, qui sont d'un caractère auxiliaire [1]).

C'est ainsi, par exemple, que l'on pourrait se passer de la notation $f(x)$ qui est employée pour désigner une fonction variable. Toute fonction est, en effet, un ensemble de *paires ordonnées* (satisfaisant à certaines conditions) et la paire ordonnée ab est par définition identique à l'ensemble $[(a, b), (a)]$; une fonction est donc un *ensemble* du 3-me ordre.

Le cas des notations des *nombres naturels* (ou réels) est analogue. Si l'on suppose que l'espace considéré est infini [2]) (ce qui est, en général, légitime), les nombres naturels se laissent définir dans cet espace d'une façon *intrinsèque*. Notamment, en classant les sous-ensembles finis de l'espace selon leur puissance, on définit une suite de classes qui peut être considérée comme la suite des „nombres naturels". A l'aide de l'ensemble des nombres naturels (ainsi conçus), on définit par des procédés classiques l'ensemble des nombres rationnels, réels, complexes etc. (ainsi, par exemple, la propriété d'un espace topologique d'être une image continue de l'intervalle 01 de nombres réels est — à ce point de vue — une propriété intrinsèque: pour être formulée sans variables auxiliaires, elle demanderait, bien entendu, l'emploi des variables d'ordre très élevé).

Quant à l'emploi des *nombres transfinis*, ils interviennent en Topologie toujours de façon qu'on peut les éliminer à l'aide de la méthode générale d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques [3]).

---

[1]) Bien que, au point de vue logique, les notations auxiliaires ne soient pas indispensables, elles sont très utiles dans le développement d'un système mathématique.

[2]) Cette hypothèse peut s'exprimer ainsi: il existe une famille d'ensembles $\boldsymbol{X} \neq 0$ telle que, pour chaque $X \varepsilon \boldsymbol{X}$, il existe un ensemble Y satisfaisant aux conditions: $Y \varepsilon \boldsymbol{X}$, $Y \subset X$, $Y \neq X$. Voir A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), p. 49.

[3]) exposée dans mon ouvrage de Fund. Math. 3 (1922), p. 76—108.