MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

TOM II

THÉORIE DE L'INTÉGRALE

PAR

STANISŁAW SAKS
CHARGÉ DE COURS À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

AVEC UNE NOTE DE

STEFAN BANACH
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

WARSZAWA 1933

DRUK M. GARASIŃSKI, WARSZAWA, BRACKA 20.

PRÉFACE.

La théorie moderne des fonctions réelles s'est dégagée de l'Analyse classique dans la deuxième moitié du XIX-ème siècle grâce aux recherches d'abord peu coordonnées, portant sur les fondements du calcul infinitésimal, et aux découvertes des fonctions jouissant des propriétés les plus étranges et inattendues.

La méfiance contre ce nouveau champ d'investigation, qui s'offrait aux analystes, a trouvé son expression typique dans l'attitude de H. Poincaré. „*Autrefois*—écrivait cet illustre géomètre—*quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères et on n'en tirera jamais que celà*".

Cet avis n'a été point isolé. Ch. Hermite s'exprimait plus carrément encore. „*Je me détourne* — disait-il dans une lettre à T. J. Stieltjes—*avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées*". Dans les recherches qui opéraient avec des fonctions non-analytiques, des fonctions rebelles aux lois qu'on voulait croire générales, on voyait presque la propagation du désordre et de l'anarchie là où les générations passées cherchaient l'ordre et l'harmonie. Même les premières tentatives d'établir une théorie positive ont eu un acceuil plutôt sceptique: on craignait que la pédanterie trop minutieuse à formuler les hypothèses des théorèmes ne compromette l'élégance des méthodes classiques et que les discussions des détails ne finissent par voiler les grandes idées de l'Analyse. Il est vrai que les premières recherches n'allaient pas bien au delà de l'appareil traditionnel qui, fixé depuis Cauchy et Riemann, se pliait difficilement aux besoins des problèmes nouveaux. Mais quoi qu'il en soit, elles ont réussi d'ouvrir la voie aux applications des méthodes de la Théorie des ensembles à l'Analyse, et la grande autorité de Camille Jordan a „*donné à la jeune école*—comme l'a dit M. H. Lebesgue dans sa leçon d'ouverture au Collège de France — *des encouragements précieux qui ont largement compensé les quelques reproches qu'elle a dû subir*".

R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue — voici les noms qui représentent la Théorie des fonctions réelles non seulement comme objet des recherches, mais aussi comme une méthode. Ces noms indiquent en même temps les idées magistrales de la théorie. Les noms de Baire et de Borel sont liés à jamais avec la méthode de classification — en une hiérarchie transfinie — des fonctions et des ensembles élémentaires à l'aide de certaines opérations simples, auxquelles on les soumet. D'excellents exposés de ce sujet se trouvent dans les traités de MM. Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Fonctions d'ensemble, Intégrale de Lebesgue, Classes de Baire,* 1916, F. Hausdorff, *Mengenlehre,* 1927, H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen,* 1933 (édition récente), dans la monographie de M. C. Kuratowski, qui paraîtra comme tome III de la Collection présente, enfin dans le livre de M. W. Sierpiński, *Topologja ogólna* (en polonais), dont la traduction anglaise va paraître dans l'édition de *Toronto University Press.*

L'autre direction de recherches, issue directement de l'étude des fondements du Calcul intégral, se rattache plus intimement encore aux grands courants de l'Analyse du siècle passé. A plusieurs reprises on s'efforçait de généraliser l'ancien procédé d'intégration de Cauchy-Riemann, mais c'est à M. Lebesgue que nous devons un véritable progrès en cette matière. Cependant, le mérite de M. Lebesgue ne se réduit pas seulement à la création d'une notion nouvelle et plus générale de l'intégrale, ni même à la mise de cette notion en connexion étroite avec la théorie de la mesure: la valeur de son oeuvre consiste en premier lieu dans sa théorie de la dérivabilité, qu'il a construite parallèlement à celle de l'intégrale. C'est grâce à elle que la découverte de M. Lebesgue a trouvé tant d'applications dans des branches les plus diverses de l'Analyse et, au point de vue métodologique, a permis de rapprocher les deux idées fondamentales d'intégrale, à savoir celle *d'intégrale définie* et celle de *fonction primitive*, séparées — semblait-il — à jamais dès le moment où l'intégration a sorti du domaine des fonctions continues.

C'est la théorie lebesguienne qui constitue le sujet du volume présent. En la détachant de celle de Baire, nous ne voulons point creuser un abîme artificiel entre deux pensées qui

par la nature même des choses sont appelées à se pénétrer mutuellement. Au contraire, nous aurons maintes occasions, surtout dans les parties finales de ce livre, à montrer explicitiment comment la théorie de Lebesgue vient se lier non seulement aux résultats, mais aussi aux méthodes de la théorie de Baire. L'idée d'intégrales de Denjoy n'est-elle au fond une reprise hardie de l'idée qui guidait Baire? Pendant que Baire par l'application itérée du passage à la limite à partir des suites de fonctions continues élargit la classe des fonctions, Denjoy construit une hiérarchie transfinie d'opérations intégrales, partant de l'algorythme de Lebesgue et dont les échelons successifs sont liés par deux opérations: l'une correspondant exactement à l'intégrale généralisée de Cauchy et l'autre à l'intégrale généralisée de Harnack-Jordan.

A l'heure actuelle, où la Théorie des fonctions réelles — non sans avoir perdu un peu de son charme de première jeunesse — a cessé d'être une science „nouvelle", il paraît superflu d'en discuter ici l'importance. On sait qu'elle a permis de révéler la régularité et l'harmonie (p. ex. l'existence d'une limite, d'une dérivée, d'une tangente) là où les méthodes anciennes ne laissaient plus rien à espérer. Il suffit de mentionner les théorèmes, devenus classiques aujourd'hui, sur la manière dont se comporte une fonction holomorphe sur la frontière ou à l'approche de la frontière du cercle de convergence. Et les nombreuses branches de l'Analyse, à n'en citer que l'analyse harmonique, équations intégrales, opérations fonctionnelles, n'ont perdu point leur élégance là où elles se sont inspirées des méthodes de la théorie des fonctions réelles. Tout au plus, nous avons appris d'admirer dans les raisonnement non seulement l'habileté du calcul, mais aussi la généralité, qui par une abstraction apparente permet souvent de saisir la véritable teneur du problème.

Le but des remarques qui précèdent a été d'indiquer la place que le sujet de ce volume occupe dans la Théorie des fonctions réelles. Reste à dire quelques mots sur la structure du livre. Il contient la majeure partie, modifiée et complétée par plusieurs chapitres, d'un cours fait par l'auteur à l'Université de Varsovie (et qui a été publié en polonais dans un livre à part [1])). Sa lec-

[1]) *Zarys teorji całki,* Warszawa 1930, Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego, Instytutu Popierania Nauki.

ture n'exige que la connaissance de quelques principes élémentaires de la théorie des ensembles, qu'on trouve d'habitude dans des cours du calcul infinitésimal. Le peu de la théorie des ensembles de points est d'ailleurs résumé ici dans un des paragraphes du début.

Le contenu de ce livre se compose de deux parties. La première (Chapitre I — V) est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue, en tant que d'instrument indispensable au mathématicien d'aujourd'hui. Cette partie est complétée, à titre d'application, par la théorie de l'aire des surfaces $z = w(x, y)$ selon L. Tonelli (Chapitre VI). La seconde partie traite les généralisations de la notion d'intégrale dues à O. Perrón et A. Denjoy (Chapitres VII—X). La théorie des intégrales de Denjoy est basée sur la définition dite *descriptive* de ces intégrales (comme de certaines fonctions primitives), ce qui a permis à l'auteur d'éviter l'introduction des nombres transfinis. A la fin de cette partie (Chapitre XI), on trouvera des théorèmes concernant les fonctions de deux variables, à savoir: le théorème déjà classique de H. Rademacher sur l'existence de la différentielle totale (accompagné de ses généralisations plus récentes) et le théorème de H. Looman et D. Menchoff, d'après lequel une fonction continue complexe $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui admet partout des dérivées partielles finies et satisfait aux équations de Cauchy-Riemann est holomorphe.

L'Annexe est consacré à la théorie de l'intégrale lebesguienne dans les espaces abstraits. Les démonstrations de la plupart des théorèmes y sont remplacées par les renvois aux raisonnements tout à fait analogues de la première partie de ce livre. Ainsi l'Annexe peut être lu avec profit sumultanément aux Chapitres I—V: au point de vue purement méthodologique il pourrait même être placé au début (comme contenant des notions plus générales). Toutefois, il a semblé préférable pour des raisons didactiques de commencer par des notions plus intuitives et concrètes.

Le livre se termine par une Note sur la théorie de la mesure, publiée récemment par A. Haar. Cette Note a été écrite pour ce livre par M. S. Banach, auquel l'auteur de ce volume tient à exprimer ici sa gratitude la plus affectueuse. On y trouvera une application nouvelle et remarquable de la théorie générale des opérations linéaires.

Les chiffres dans les renvois bibliographiques se rapportent à la liste des ouvrages cités, qui se trouve à la fin du livre. Les astérisques devant les titres et les numéros indiquent que ces parties du livre peuvent être omises à la première lecture.

Plusieurs pages de ce livre sont pénétrées des suggestions et des méthodes que je dois aux excellentes leçons universitaires de mon maître, M. W. Sierpiński. L'influence de ses idées m'a guidé souvent dans mes travaux personnels. Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ici ma vive reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu contribuer à ma tâche, en particulier, à mon ami M. A. Zygmund, qui s'est chargé de la lecture du manuscrit et de la revision des épreuves. Je remercie également MM. K. Kuratowski et H. Steinhaus pour leurs remarques bienveillantes et les indications bibliographiques.

Stanisław Saks.

Warszawa, Mai 1933.

ERRATA.

pages	lignes		
9	9	*remplacer*	définie *par* à variation bornée
15	11	*remplacer*	$\overline{E}_\varepsilon(F; R)$ *par* $\overline{E}_\varepsilon(F_2; R)$
21	6	*remplacer*	Soit en effet *par* En effet, prolongeons $\varphi(y)$ à toutes les valeurs de y par la condition $\varphi(y) = \varphi[y - E(y)] + E(y)$ où $E(y)$, désigne l'entier de y, et posons
87	6	*remplacer*	$f(x)$ *par* $F(x)$
101	4	*remplacer*	Young [1] *par* Young [2], S. Kempisty [1; 2]
105	8*	*supprimer*	$E_n \subset \sum_{i=1}^{k_n} Q_i^{(n)}$,
106	8*, 7*	*remplacer*	les intervalles $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_k^*$) que la subdivision $\mathbf{I}^*$ *par* la subdivision $\mathbf{I}^*$) que cette subdivision
106	5*	*après le signe* $\mathbf{I}^*$ *ajouter*	(abstraction faite des côtés situés sur la frontière de R_0)
106	3*	*remplacer*	points *par* points intérieurs
107	4	*remplacer*	points *par* points intérieurs
117	13*	*remplacer*	à *par* aux valeurs absolues des expressions
125	4	*remplacer*	$2\pi h_n$ *par* πh_n
125	5	*remplacer*	2π *par* π
134	13*	*remplacer les signes*	$>$ *par* $\geqslant$
136	16*	*remplacer*	$\underline{F} - \overline{F}$ *par* $\overline{F} - \underline{F}$
136	3*	*remplacer*	$\int_{R_0}$ *par* $\int_{R}$
143	8*	*remplacer*	Denjoy [6 et 7] *par* Denjoy [6]
159	10*, 9*	*remplacer ces lignes par:*	I_k, par b_m un point quelconque de $E \cdot I_{i_m}$ et enfin par J_m où $m = 0, 1, \ldots, r-1$ l'intervalle $[b_m, b_{m+1}]$, on a les évaluations
197	2*	*remplacer*	l'inégalité *par* l'égalité

* L'astérisque indique qu'il faut compter en remontant.

CHAPITRE I.

Fonctions de figure élémentaire.

Fonctions d'ensemble. Remarques préliminaires.

§ 1. En dehors des fonctions ayant pour argument un nombre variable ou, plus généralement, un système variable de n nombres (point de l'espace à n dimensions), nous allons traiter dans ce livre les fonctions où le rôle de la variable indépendante jouent certains *ensembles* de points. La nature de ces ensembles sera précisée au § 6. Pour le moment, il est à noter que dans plusieurs cas particuliers importants les fonctions de ce genre ont été envisagées déjà par l'Analyse classique, bien que leur étude tout à fait générale n'ait pris naissance que lors du développement de la Théorie des ensembles et en relation étroite avec les parties de l'Analyse qui s'appuient directement sur cette théorie.

Etant donnée p. ex. une fonction $f(x)$ intégrable dans chaque intervalle, on obtient, en faisant correspondre à chaque intervalle I la valeur de l'intégrale de $f(x)$ sur I, une fonction $F(I)$ qui est une fonction d'intervalle. D'une façon analogue, la considération des intégrales multiples des fonctions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables conduit aux fonctions d'ensembles situés dans des espaces à un nombre plus élevé des dimensions; le rôle d'argument I d'une telle fonction $F(I)$ peut jouer n'importe quel ensemble pour lequel l'intégrale de la fonction donnée $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est définie [1]).

[1]) Il est évident que les ensembles qui peuvent être ainsi considérés comme des valeurs de l'argument I de la fonction $F(I)$ constituent une classe plus ou moins étendue, suivant la définition de l'intégrale qu'on adopte. Or, quelle que soit la définition de l'intégrale que l'on aura choisie parmi celles connues à l'heure actuelle, toute fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, intégrable dans un domaine, l'est toujours dans chaque „cube" contenu dans ce domaine.

On le déduit facilement de (6.7), p. 270, en se rappelant que les ensembles congruents avec des ensembles fermés sont fermés et que les ensembles congruents avec les ensembles de mesure nulle sont d'après 5°, p. 267, et (6.2), p. 269, de mesure nulle.

OUVRAGES CITÉS.

Alexandroff, P.

[1] *Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes* Math. Z. 20, 213—222 (1924).

[2] *L'intégration au sens de M. Denjoy considérée comme recherche des fonctions primitives*, Rec. math. Soc. math. Moscou, 31, 465—476 (1924).

Auerbach, H.

[1] *Démonstration nouvelle d'un théorème de M. Banach sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, Fundam. Math., 7, 263 (1925).

Baire, R.

[1] *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. Mat. pura appl. (3), 3, 1—122 (1899).

Banach, S.

[I] *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[1] *Sur un théorème de M. Vitali*, Fundam. Math., 5, 130—136 (1924).

[2] *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, ibid., 6, 170—188 (1924).

[3] *Sur une classe de fonctions continues*, ibid., 8, 166—173 (1926).

[4] *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, ibid., 7, 225—237 (1925).

[5] *Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie*, C. R. Acad. Sci. Paris, 173, 457—459 (1921).

[6] *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, Fundam. Math., 3, 128—132 (1922).

[7] *Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen*, ibid., 15, 97—101 (1930).

Banach, S. et **Kuratowski, C.**

[1] *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundam. Math. 14, 127—131, (1929).

Bary, N.

[1] *Sur les fonctions jouissant de la propriété (N)*, C. R. Acad. Sci. Paris, 189, 441—443 (1929).

[2] *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, Math. Ann., 103, 185—248, 598—653 (1930).

Bary, N. et **Menchoff, D.**

[1] *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues*, Ann. Mat. pura appl. (4), 5, 19—54 (1928).

Bauer, H.

[1] *Der Perronsche Integralbegriff und seine Beziehung zum Lebesgueschen*, Mh. Math. Phys., 26, 153—198 (1915).

Besicovitch, A. S.

[1] *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points*, Math. Ann., 98, 422—464 (1928).

[2] *Discussion der stetigen Funktionen im Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit*, Bull. Acad. Sci. URSS, 97—122, 527—540 (1925).

[3] *On sufficient conditions for a function to be analytic, and on behaviour of analytic functions in the neighborhood of non-isolated singular points*, Proc. London Math. Soc. (2) 32, 1—9 (1931).

Blumberg, H.

[1] *A theorem on arbitrary functions of two variables with applications*, Fundam. Math., 16, 17—24 (1930).

Borel, E.

[I] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898.

[1] *Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives*, Ann. Ecole norm., 36 (1919).

Burkill, J. C.

[1] *The fundamental theorem of Denjoy integration*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 21, 659—663 (1923).

[2] *Functions of intervals*, Proc. London Math. Soc. (2), 22, 275—310 (1924).

[3] *The expressions of area as an integral*, ibid. (2), 22, 311—336 (1924).

[4] *The derivates of functions of intervals*, Fundam. Math., 5, 321—327 (1924).

[5] *The approximately continuous Perron integral*, Math. Z., 34, 270—278 (1931).

Burkill, J. C. et **Haslam-Jones, U. S.**

[1] *The derivates and approximative derivates of measurable functions*, Proc. London Math. Soc. (2), 32, 346—355 (1931).

[2] *Note on the differentiability of functions of two variables*, J. London Math. Soc., 7, 297—305 (1932).

Carathéodory, C.

[I] *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1918.

[II] *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 2. Aufl., 1927.

[1] *Über das lineare Mass von Punktmengen- eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 404—426 (1914).

Cohen, L. W.

[1] *A new proof of Lusin's theorem*, Fundam. Math, 9, 122—123 (1927).

Daniell, P. J.

[1] *Differentiation with respect to a function of limited variation*, Trans. Amer. Math. Soc., 19, 353—362 (1918).

[2] *Stieltjes derivatives*, Bull. Amer. Math. Soc., 26, 444—448 (1919).

Denjoy, A.

[1] *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, J. Math. pures appl. (7), 1, 105—240 (1915).

[2] *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris, 154, 859—862 (1912).

[3] *Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale*, ibid., 154, 1075—1078 (1912).

[4] *Sur la dérivation et son calcul inverse*, ibid., 162, 377—380 (1916).

[5] *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. France, 43, 161—248 (1915).

[6] *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non-sommables*, Ann. Ecole norm., 33, 127—222 (1916); 34, 181—238 (1917).

[7] *Sur l'intégration riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris, 169, 219—220 (1919).

[8] *Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue*, ibid., 193, 695—698 (1931).

Dini, U.

[1] *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa 1878.

Egoroff, D. Th.

[1] *Sur les suites des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris, 152, 244—246 (1911).

Faber, G.

[1] *Über stetige Funktionen* II., Math. Ann., 69, 372—443 (1910).

Fatou, P.

[1] *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta math., 30, 335—400 (1906).

Fichtenholz, G.

[1] *Sur une fonction de deux variables sans intégrale double*, Fundam. Math., 6, 30—36 (1924).

Fréchet, M.

[1] *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France, 43, 249—267 (1915).

[2] *Note on the area of a surface*, Proc. London Math. Soc. (2), 24, XLVIII (1926).

[3] *Sur l'aire des surfaces polyédrales*, Ann. Soc. Polon. math., 3, 1—3 (1925).

[4] *Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes*, Fundam. Math., 7, 210—224 (1925).

Fubini, G.

[1] *Sugli integrali multipli,* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., 16_1, 608—614 (1907).

[2] *Sulla derivazione per serie,* ibid., 24_1, 204—206 (1915).

Geöcze, Z. de

[1] *Quadrature des surfaces courbes,* Math. naturwiss. Ber. Ungarn, 26, 1—88 (1910).

Gillespie, D. C.

[1] *The Cauchy definition of a definite integral,* Ann. of Math. (2), 17, 61—63 (1915).

Goldowsky, G.

[1] *Note sur les dérivées exactes,* Rec. math. Soc. math. Moscou, 35, 35—36 (1928).

Goursat, E.

[1] *Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy,* Trans. Amer. Math. Soc., 1, 14—16 (1900).

Haar, A.

[1] *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen,* Ann. of Math. (2), 34, 147—169 (1933).

Hahn, H.

[I] *Theorie der reellen Funktionen,* 1. Band, Berlin 1921.

[1] *Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung,* Mh. Math. Phys., 16, 161—166 (1905).

Hake, H.

[1] *Über de la Vallée Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron,* Math. Ann., 83, 119—142 (1921).

Harnack, A.

[1] *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourierschen Reihe,* Math. Ann. 19, 235—279 (1881).

[2] *Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabeln mit ihren Ableitungen,* II, ibid., 24, 217—252 (1884).

Haslam-Jones, U. S.

[1] *Derivate planes and tangent planes of a measurable function,* Quart. J. Math., Oxford Ser., 3, 120—132 (1932).

Hausdorff, F.

[I] *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914.

[II] *Mengenlehre,* 2. Aufl., Berlin 1927.

[1] *Dimension und äusseres Mass,* Math. Ann., 79, 157—179 (1919).

Heffter, L.

[1] *Zum Beweis des Cauchy-Goursatschen Integralsatzes,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen), 312—316 (1903).

Hildebrandt, T. H.

[1] *On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals,* Bull. Amer. Math. Soc. (2), 24, 113—144 (1917), 177—202 (1918).

[2] *On the interchange of limit and Lebesgue integral for a sequence of functions,* Trans. Amer. Math. Soc., 33, 441—443 (1931).

Hobson, E. W.

[I] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series,* Vol. I., 3d edition, Cambridge 1927.

Jeffery, R. L.

[1] *The integrability of a sequence of functions,* Trans. Amer. Math. Soc., 33, 433—440 (1931).

[2] *Non-absolutely convergent integrals with respect to functions of bounded variation,* ibid., 34, 645—675 (1932).

Jordan, C.

[I] *Cours d'analyse,* 3-me éd., Paris 1909.

[1] *Sur la série de Fourier,* C. R. Acad. Sci. Paris, 92, 228—230 (1881).

Kamke, E.

[I] *Das Lebesgue'sche Integral,* Leipzig 1925.

[1] *Zur definition der approximativ stetigen Funktionen,* Fundam. Math., 10, 431—433 (1927).

Kempisty, S.

[1] *Sur les intégrales d'une fonction d'intervalle,* Księga pamiątkowa I-go Polskiego Zjazdu Matematycznego Lwów 1927, 93—97.

[2] *Sur les dérivées des fonctions des systèmes simples d'intervalles,* Bull. Soc. Math. France, 60, 1—21 (1932).

Khintchine, A.

[1] *Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy,* C. R. Acad. Sci. Paris, 162, 287—291 (1916).

[2] *Sur le procédé d'intégration de M. Denjoy,* Rec. math. Soc. math. Moscou, 30, 543—557 (1918).

[3] *Sur la dérivation asymptotique,* C. R. Acad. Sci. Paris, 164, 142—144 (1917).

[4] *Recherches sur la structure des fonctions mesurables,* Rec. math. Soc. math. Moscou, 31, 265—285 et 377—433 (1924).

[5] *Recherches sur la structure des fonctions mesurables,* Fundam. Math., 9, 212—279 (1927).

Knopp, K.

[1] *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der Diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten,* Math. Ann., **95**, 409—426 (1926).

Kolmogoroff, A.

[1] *Untersuchungen über den Integralbegriff,* Math. Ann., **103**, 654—696 (1930).

[2] *La définition axiomatique de l'intégrale,* C. R. Acad. Sci. Paris, **180**, 110—111 (1925).

[3] *Beiträge zur Masstheorie,* Math. Ann., **107**, 351—366 (1932).

Kuratowski, C. et **Ulam, S.**

[1] *Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire,* Fundam. Math., **19**, 247—251 (1932).

Lampariello, G.

[1] *Sulle superficie continue che amettono area finita,* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., 3_1, 294—298 (1926).

Lebesgue, H.

[I] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* Paris 1904.

[II] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* 2-me éd., Paris 1928.

[1] *Intégrale, Longueur, Aire,* Ann. Mat. pura appl. (3), **7**, 231—359 (1902).

[2] *Sur les fonctions dérivées,* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., 15_2, 3—8 (1906).

[3] *Encore une observation sur les fonctions dérivées,* ibid., **16**, 92—100 (1907).

[4] *Sur la recherche des fonctions primitives,* ibid., $\mathbf{16}_1$, 283—290 (1907).

[5] *Sur l'intégration des fonctions discontinues,* Ann. Ecole norm. (3), **27**, 361—450 (1910).

[6] *Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces,* Fundam. Math., **8**, 160—165 (1926).

[7] *Sur la recherche des fonctions primitives,* Acta math., **49**, 245—262 (1926).

[8] *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration,* Ann. Ecole norm., **35**, 191—250 (1918).

Levi, B.

[1] *Ricerche sulle funzioni derivate,* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., $\mathbf{15}_1$, 433—438 (1906).

Lichtenstein, L.

[1] *Sur la définition générale des fonctions analytiques,* C. R. Acad. Sc. Paris, **150**, 1109—1110 (1910).

[2] *Ueber einige Integrabilitätsbedingungen zweigliedriger Differentialausdrücke mit einer Anwendung auf den Cauchyschen Integralsatz,* S.-B. Berlin. math. Ges., **9**, 84—100 (1910).

Looman, H.

[1] *Ueber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 97—108 (1923).

[2] *Ueber eine Erweiterung des Cauchy-Goursatschen Integralsatzes,* Nieuw. Arch. Wiskde (2), **14**, 234—239 (1925).

[3] *Ueber die Perronsche Integraldefinition,* Math. Ann., **93**, 153—156 (1925).

Lusin, N.

[I] *Intégrale et série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915.

[1] *Sur les propriétés des fonctions mesurables,* C. R. Acad. Sci. Paris, **154**, 1688—1690 (1912).

[2] *Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy,* ibid., **155**, 1475—1478 (1912).

Lusin, N. et **Sierpiński, W.**

[1] *Sur quelques propriétés des ensembles (A),* Bull. Acad. Sci. Cracovie, 35—48 (1918).

Mazur, S.

[1] *O metodach sumowalności* (en polonais), Księga pamiątkowa I-go Polskiego Zjazdu Matematycznego Lwów 1927, 102—107.

Mazurkiewicz, S.

[1] *Sur les fonctions qui satisfont à la condition (N),* Fundam. Math., **16**, 348—352 (1930).

Menchoff, D.

[1] *Sur la représentation conforme des domaines plans,* Math. Ann., **95**, 641—670 (1926).

[2] *Sur les fonctions monogènes,* Bull. Soc. Math. France, **59**, 141—182 (1931).

Montel, P.

[1] *Sur les suites infinies de fonctions,* Ann. Ecole norm. (3), **24**, 233—334 (1907).

[2] *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes,* C. R. Acad. Sci. Paris, **156**, 1820—1822 (1913).

Morera, G.

[1] *Sulla definizione di funzione di una variabile complessa,* Atti Accad. Sci. Torino, **37**, 99—102 (1902).

Nalli, P.

[I] *Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definita di una funzione limitata o no,* Palermo 1914.

Neubauer, M.

[1] *Ueber die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen,* Mh. Math. Phys., **38**, 139—146 (1931).

Nikodym, O.

[1] *Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles,* Fundam. Math., 10, 116—168 (1927).

[2] *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon,* ibid.,15, 131—179 (1930).

Perron, O.

[1] *Ueber den Integralbegriff,* S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss, 16 (1914).

Pompeiu, T.

[I] *Sur la continuité des fonctions de variable complexe,* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2), 7, 264—315 (1905).

Rademacher, H.

[1] *Eineindeutige Abbildungen und Messbarkeit,* Mh. Math. Phys., 27, 183—291 (1916).

[2] *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit I,* Math. Ann., 79, 340—359 (1919).

[3] *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit II,* ibid., 81, 52—63 (1920).

[4] *Bemerkungen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zum Moreraschen Satz,* Math. Z., 4, 177—185 (1919).

Radó, T.

[1] *Sur l'aire des surfaces courbes,* Acta Litt. Sci. Szeged, 3, 131—169 (1927).

[2] *Sur le calcul des surfaces courbes,* Fundam. Math., 10, 197—210 (1927).

[3] *Sur un problème relatif à un théorème de Vitali,* ibid., 11, 228—229 (1928).

[4] *Ueber das Flächenmass rektifizierbarer Flächen,* Math. Ann., 100, 445—479 (1928).

[5] *O polu powierzchni krzywych,* Mathesis Polska, 7, 1—18 (1932).

Radon, J.

[1] *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen,* S.-B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1295—1438 (1913).

Rajchman, A. et **Saks, S.**

[1] *Sur la dérivabilité des fonctions monotones,* Fundam. Math., 4, 204—213 (1923).

Ridder, J.

[1] *Ueber Derivierten und Ableitungen,* C. R. Soc. Sci. Varsovie, 23, 1—11 (1930).

[2] *Ueber den Cauchyschen Integralsatz für reelle und komplexe Funktionen,* Math. Ann., 102, 132—156 (1929).

[3] *Ueber den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehung zu den R-, L- und D- Integralen,* Math. Z., 34, 234—269 (1931).

[4] *Ueber approximative Ableitungen bei Punkt- und Intervallfunktionen,* Fundam. Math., 15, 324—328 (1930).

Riesz, F.

[1] *Sur l'intégrale de Lebesgue,* Acta math., 42, 191—205 (1920).

[2] *Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires,* Acta Litt. Sci. Szeged., 1, 18—26 (1922).

[3] *Elementarer Beweis des Egoroffschen Satzes,* Mh. Math. Phys., 35, 243—248 (1928).

[4] *Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent,* Acta Litt. Sci. Szeged, 5, 208—221 (1932).

[5] *Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle,* Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongress Zürich 1932, I, 258—269.

Romanowski, P.

[1] *Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis,* Fundam. Math., 19, 38—44 (1932).

Rosenthal, A.

[I] *Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen* (Sonderabdruck aus der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften), Leipzig - Berlin.

[1] *Ueber die Singularitäten der reellen ebenen Kurven,* Math. Ann., 73, 480—521 (1913).

Ruziewicz S.

[1] *Sur les fonctions qui ont même dérivée et dont la différence n'est pas constante,* Fundam. Math., 1, 148—151 (1920).

Saks, S.

[1] *Sur les nombres dérivés des fonctions,* Fundam. Math., 5, 98—104 (1924).

[2] *Sur certaines classes de fonctions continues,* ibid., 17, 124—151 (1931).

[3] *Sur les fonctions d'intervalle,* ibid., 10, 211—224 (1927).

[4] *Sur l'aire des surfaces $z=f(x,y)$,* Acta Litt. Sci. Szeged., 3, 170—176 (1927).

Saks, S. et **Zygmund, A.**

[1] *Sur les faisceaux des tangentes à une courbe,* Fundam. Math., 6, 117—121 (1924).

[2] *On functions of rectangles and their application to the analytic functions,* Ann. Scuola norm. super. Pisa, 3, (1934).

Schauder, J.

[1] *The theory of surface measure,* Fundam. Math., 8, 1—48 (1926).

Scheeffer, L.

[1] *Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen,* Acta math., 5, 183—194, 279—296 (1884).

Schoenflies, A.

[I] *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten,* Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1900.

Sierpiński, W.

[1] *Un exemple élémentaire d'une fonction croissante qui a presque partout une dérivée nulle,* Giorn. Mat. Battaglini (3), 7, 314—334 (1916).

[2] *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, Bull. Acad. Sci. Cracovie, 97—152 (1919).

[3] *Démonstration de quelques théorèmes sur les fonctions mesurables*, Fundam. Math., 3, 314—321 (1922).

[4] *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, ibid., 1, 112—115 (1920).

[5] *Sur la densité linéaire des ensembles plans*, ibid., **9**, 172—185 (1927).

[6] *Sur l'ensemble des points angulaires d'une courbe $y=f(x)$*, Bull. Acad. Sci. Cracovie, 850—855 (1912).

[7] *Démonstration de la dénombrabilité des valeurs extrêmales d'une fonction*, C. R. Soc. Sci. Varsovie, 5, 232—237 (1912).

[8] *Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues*, Fundam. Math., 3, 123—127 (1922).

[9] *Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative*, ibid., 4, 124—127 (1923).

[10] *Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles*, ibid., 4, 167—171 (1923).

[11] *Démonstration d'un théorème sur les fonctions additives d'ensemble*, ibid., 5, 262—264 (1924).

[12] *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, ibid., 20, 214—220 (1933).

Steinhaus, H.

[1] *Sur l'existence de la dérivée*, Bull. Acad. Sci. Cracovie, 62—65 (1919).

Stepanoff, W.

[1] *Ueber totale Differenzierbarkeit*, Math. Ann., 90, 318—320 (1923).

[2] *Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables*, Rec. math. Soc. math. Moscou, 30, 487—489 (1924).

[3] *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*, ibid., 32, 511—526 (1925).

Stieltjes, T. J.

[1] *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1), 8, 1—122 (1884).

Tonelli, L.

[1] *Sulla rettificazione delle curve*, Atti Accad. Sci. Torino, 43, 399—416 (1908).

[2] *Sull'integrazione per parti*, Atti Accad. naz. Lincei (5), 18_2, 246—253 (1909).

[3] *Successioni di curve e derivazione per serie*, ibid. (5), 25_2, 22—30, 85—91 (1916).

[4] *Sul differenziale dell'arco di curva*, ibid. (5), 25_1, 207—213 (1916).

[5] *Sur la quadrature des surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris, **182**, 1198—1200 (1926).

[6] *Sulla quadratura delle superficie*, Atti Accad. naz. Lincei (6), 3_1, 357—363, 445—450, 633—658 (1926).

[7] *Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie*, ibid. (6), 5, 313—318 (1927).

[8] *Sulle derivate esatte*, Mem. Ist. Bologna (8), 8, 13—15 (1930/31).

[9] *Sul teorema di Green*, Atti Accad. naz. Lincei (6), 1_1, 482—488 (1925).

Ulam, S.

[1] *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fundam. math., 16, 140—150 (1930).

[2] *Zum Massbegriffe in Produkträumen*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongress Zürich 1932, II, 118—119.

Vallée-Poussin, Ch. J. de la

[I] *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, Paris 1916.

[1] *Sur l'intégrale de Lebesgue*, Trans. Amer. Math. Soc., 16, 435—501 (1915).

[2] *Sur la définition de la différentielle totale et sur les intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (*A*), 38, 67—72 (1914).

Vitali, G.

[1] *Sulle funzioni integrali*, Atti Accad. Sci. Torino, 40, 753—766 (1905).

[2] *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, ibid., 43, 75—92 (1908).

[3] *Analisi delle funzioni a variazione limitata*, Rend. Circ. mat. Palermo, 46, 388—408 (1922).

[4] *Una proprietà delle funzioni misurabili*, Ist. Lombardo Rend. (2), 38, 599—603 (1905).

[5] *Sulle funzioni continue*, Fundam. Math., 8, 175—188 (1926).

Volterra, V.

[1] *Sui principii del calcolo integrale*, Giorn. Mat. Battaglini, 19, 333—372 (1881).

Wolff, J.

[1] *Ueber die Loomansche Erweiterung eines Satzes von Pompeiu*, Niew Arch. Wiskde (2), 14, 337—339 (1925).

Young, G. C.

[1] *A note on derivates and differential coefficients*, Acta math., 37, 141—154 (1916).

[2] *On the derivates of a function*, Proc. London Math. Soc. (2), 15, 360—384 (1916).

Young, G. C. et **Young, W. H.**

[1] *On the existence of a differential coefficient*, Proc. London Math. Soc. (2), 9, 325—335 (1911).

Young, R. C.

[1] *On Riemann integration with respect to a continuous increment*, Math. Ann., 29, 217—233 (1928).

[2] *Functions of Σ defined by addition or functions of intervals in n-dimensional formulation*, ibid., 29, 171—216 (1928).

Young, W. H.

[1] *On the general theory of integration*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 204, 221—252 (1905).

[2] *Integration with respect to a function of bounded variation*, Proc. London Math. Soc. (2), 13, 109—150 (1914).

[3] *On the area of surfaces*, Proc. Roy. Soc. London (*A*), 96, 72—81 (1920).

[4] *On the triangulation method of defining the area of a surface*, Proc. London Math. Soc. (2), 19, 117—152 (1921).

[5] *On non-absolutely convergent, not necessarily continuous integrals*, ibid., (2) 16, 175—218 (1918).

INDEX TERMINOLOGIQUE.

TABLE DES MATIÈRES.