ANNEXE.

Intégrale de Lebesgue dans les espaces abstraits.

Généralités.

§ 1. On sait depuis les travaux de MM. J. Radon et M. Fréchet que la notion d'intégrale lebesguienne peut être définie dans tout espace *abstrait* où une *mesure* est définie pour les ensembles formant une famille *additive.*

La plupart des propriétés de l'intégrale de Lebesgue, notamment celles qui ne sont pas indissolublement liées avec les propriétés métriques des espaces euclidiens, subsistent pour l'intégrale ainsi introduite dans un espace abstrait. Nous allons voir p. ex. que les intégrales indéfinies de Lebesgue y coïncident avec les fonctions d'ensemble additives au sens complet et absolument continues (th. de Radon-Nikodym). Nous verrons aussi que le th. de Fubini sur la réduction de l'intégrale multiple peut être énoncé pour les espaces qui sont des produits combinatoires des espaces abstraits. La possibilité de définir la mesure dans l'espace-produit par les mesures données dans les espaces-facteurs a été signalée pour la première fois par M. S. Ulam [2].

Fonctions additives au sens complet.

§ 2. Etant donné un espace X quelconque, une famille $\mathfrak{X}$ d'ensembles de cet espace sera dite *additive*, lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

(1°) *l'ensemble vide appartient à la famille* $\mathfrak{X}$,

(2°) *si un ensemble* E *appartient à* $\mathfrak{X}$, *son complémentaire* CE (pris, bien entendu, par rapport à l'espace X, c. à d. l'ensemble $X-E$) *appartient aussi à* $\mathfrak{X}$, (3°) *la somme d'une suite (finie ou dénombrable) d'ensembles appartenant à $\mathfrak{X}$ appartient à $\mathfrak{X}$.*

Il résulte aussitôt de ces conditions que l'espace X appartient à toute famille additive $\mathfrak{X}$ et que le produit d'une suite d'ensembles appartenant à une famille additive $\mathfrak{X}$ appartient aussi à $\mathfrak{X}$.

Les ensembles appartenant à une famille additive $\mathfrak{X}$ s'appelleront également *ensembles mesurables* ($\mathfrak{X}$). Nous les appellerons aussi ensembles *mesurables* tout court dans le cas de l'espace X et de la famille additive $\mathfrak{X}$ fixes.

§ 3. Une fonction réelle finie $F(E)$ définie pour les ensembles mesurables ($\mathfrak{X}$) sera dite *fonction additive au sens complet* ou *complètement additive* d'ensemble mesurable ($\mathfrak{X}$), si l'on a pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles mesurables ($\mathfrak{X}$) et disjoints $F(\sum\limits_n E_n) = \sum\limits_n F(E_n)$.

Il en résulte aussitôt que pour toute suite *monotone* $\{E_n\}$ d'ensembles mesurables ($\mathfrak{X}$) une telle fonction $F(E)$ satisfait à la relation $\lim\limits_n F(E_n) = F(\lim\limits_n E_n)$.

Les bornes supérieure et inférieure des valeurs qu'une fonction complètement additive $F(E)$ d'ensemble mesurable ($\mathfrak{X}$) prend pour les sous-ensembles mesurables ($\mathfrak{X}$) d'un ensemble arbitraire E_0 seront dites respectivement *variation supérieure* et *variation inférieure* de la fonction F sur l'ensemble E_0 et désignées par $\overline{W}(F; E_0)$ et $\underline{W}(F; E_0)$.

Ces variations sont toujours finies. En effet, si l'on suppose p. ex. que $\overline{W}(F; X) = +\infty$, on pourrait définir par induction une suite descendante $\{E_n\}$ d'ensembles mesurables tels que

$$(3.1)\quad \overline{W}(F; E_n) = +\infty \quad \textit{et} \quad |F(E_n)| \geqslant n-1 \quad \textit{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons notamment $E_1 = X$ et admettons qu'un ensemble E_n où $n \geqslant 1$ soit défini conformément aux conditions (3.1). Considérons un ensemble mesurable $A \subset E_n$ tel que $F(A) \geqslant |F(E_n)| + n$. Dans le cas où $\overline{W}(F; A) = +\infty$, on n'a qu'à poser $E_{n+1} = A$. Dans le cas contraire on a $\overline{W}(F; E_n - A) = +\infty$ et on posera $E_{n+1} = E_n - A$. D'autre part, on a toujours les relations $F(A) \geqslant n$ et $|F(E_n - A)| \geqslant |F(A)| - |F(E_n)| \geqslant n$ simultanément, de sorte qu'on obtient en tout cas $|F(E_{n+1})| \geqslant n$. Enfin, $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ La suite $\{E_n\}$ est donc descendante et remplit la condition (3.1).

Or, en posant $E_0 = \lim\limits_n E_n$, on aurait $|F(E_0)| = \lim\limits_n |F(E_n)| = \infty$, ce qui est évidemment impossible, puisque toute fonction additive est finie par définition.

Les deux variations d'une fonction complètement additive d'ensemble mesurable sont donc finies. On voit aisément qu'elles sont aussi des fonctions additives d'ensemble mesurable. Il en résulte, en outre, que toute fonction $F(E)$ complètement additive d'ensemble mesurable est non seulement *finie* (comme la définition l'exige), mais aussi *bornée*.

D'autre part, on aperçoit aussitôt que pour tout ensemble E mesurable on a la décomposition $F(E) = \overline{W}(F; E) + \underline{W}(F; E)$, qui correspond à la décomposition jordanienne de la fonction additive à variation bornée de figure élémentaire (cf. Chap. I, § 10). On en tire la généralisation suivante du th. 1, Chap. I, § 11:

(3.2) *Toute fonction complètement additive d'ensemble mesurable ($\mathfrak{X}$) est une différence de deux fonctions complètement additives non négatives d'ensemble mesurable ($\mathfrak{X}$).*

Théorème 1. *$F(E)$ étant une fonction complètement additive d'ensemble mesurable, il existe toujours un ensemble mesurable A tel que $\underline{W}(F; A) = 0 = \overline{W}(F; CA)$ ou, ce qui revient au même, que $F(E) \geqslant 0$ pour tout ensemble mesurable $E \subset A$ et $F(E) \leqslant 0$ pour tout ensemble mesurable $E \subset CA$.*

Démonstration. Considérons pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un ensemble E_n tel que $F(E_n) \geqslant \overline{W}(F; X) - 2^{-n}$, donc que $\underline{W}(F; E_n) \geqslant -2^{-n}$ et $\overline{W}(F; CE_n) \leqslant 2^{-n}$. En posant $A_n = \prod\limits_{m=n}^{\infty} E_m$, on a par conséquent

$$\underline{W}(F; A_n) \geqslant \underline{W}(F; E_n) \geqslant -\frac{1}{2^n} \quad \textit{et} \quad \overline{W}(F; CA_n) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \overline{W}(F; CE_m) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Or, la suite $\{A_n\}$ étant monotone ascendante, la suite $\{CA_n\}$ est descendante. En posant $A = \lim\limits_n A_n$, on obtient donc les relations $\underline{W}(F; A) = \lim\limits_n \underline{W}(F; A_n) \geqslant 0$ et $\overline{W}(F; CA) = \lim\limits_n \overline{W}(F; CA_n) \leqslant 0$, c. q. f. d.

Ce théorème est dû à M. H. Hahn [I, p. 404]; cf. aussi W. Sierpiński [11].

La famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et la mesure de Lebesgue sont des exemples classiques d'une famille additive d'ensembles et d'une fonction complètement additive d'ensemble.

Comme il a été observé au Chap. II, § 1, la mesure de Lebesgue est issue d'une extension de *l'aire de figure élémentaire* sur une famille plus vaste d'ensembles. Plus généralement, toute fonction additive et continue de figure (voir Chap. I, § 7) peut être étendue en une fonction complètement additive, définie dans une famille additive d'ensembles.

En effet, considérons pour fixer les idées, sur le plan, une fonction additive continue $F(R)$ de figure élémentaire, d'abord *non négative*. Désignons pour tout ensemble plan E par $F(E)$ la borne inférieure des sommes des valeurs de $F(I)$ pour les intervalles I d'une famille variable $\mathbf{I}$ au plus dénombrable et formée d'intervalles couvrant conjointement l'ensemble E. Ainsi étendue sur tous les ensembles du plan, la fonction d'ensemble $F(E)$ jouit de toutes les propriétés de la mesure extérieure, énoncées dans les théorèmes du Chap. II, § 3—6. Par analogie à la définition du Chap. II, § 4, p. 26, on peut appeler un ensemble E *mesurable par rapport à la fonction* F, s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble ouvert G tel que $F(G-E) < \varepsilon$. Les ensembles mesurables par rapport à F forment une famille additive d'ensembles, sur laquelle se transportent, avec leurs démonstrations, tous les théorèmes du Chap. II, § 4—6, établis pour les ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Enfin, si on se restreint à une partie *bornée* du plan, p. ex. au carré $Q = [0,1;0,1]$ la fonction $F(E)$ ne prendra pour les ensembles $E \subset Q$ mesurables par rapport à cette fonction que des valeurs finies et sera par conséquent une fonction *additive au sens complet* dans la famille de ces ensembles.

Considérons à présent une fonction quelconque de figure, additive, continue et à variation bornée. Soient $F(R)$ cette fonction, $W_1(R)$ sa variation supérieure et $W_2(R)$ la valeur absolue de sa variation inférieure. Appelons maintenant *mesurables par rapport à* F les ensembles qui le sont simultanément (dans le sens précédent) par rapport aux fonctions de figure $W_1(R)$ et $W_2(R)$ [1]. Si on se restreint encore aux sous-ensembles du carré Q mesurables par rapport à F, on obtient une famille additive d'ensembles dans laquelle la fonction $F(E) = W_1(E) - W_2(E)$ est complètement additive. Cette famille dépend évidemment de la fonction $F(R)$. Cependant, elle contient en tout cas (comme le montrent les th. 3—5, Chap. II, § 4) tous les ensembles boreliens (et même tous les ensembles analytiques).

Dans le cas particulier où la fonction $F(R)$ s'annule identiquement, tous les ensembles plans sont évidemment mesurables par rapport à cette fonction. Cependant, excepté ce cas trivial, aucune fonction additive et continue de figure ne se laisse étendre sur tous les ensembles plans de façon à en devenir une fonction additive au sens complet. C'est une conséquence du théorème remarquable suivant, établi par MM. S. Banach et K. Kuratowski [1] à l'aide de l'hypothèse du continu: *étant donné un espace X quelconque de puissance du continu, il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction d'ensemble qui soit complètement additive dans la famille de tous les ensembles $E \subset X$ et qui s'annule pour les ensembles se réduisant à un point.*

[1] M. Ch. J. de la Vallée-Poussin [I] les appelle *ensembles normaux par rapport à la fonction F.*

Pour des généralisations ultérieures de ce théorème voir S. Banach [7], S. Ulam [1] et W. Sierpiński [12].

Fonctions mesurables.

§ 4. Une fonction $f(x)$ de point dans un espace X sera dite *mesurable* $(\mathfrak{X})$ ou, lorsque la famille $\mathfrak{X}$ est fixée, *mesurable* tout court, si pour tout a réel l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > a]$ est mesurable $(\mathfrak{X})$.

On voit aisément que toutes les propriétés fondamentales des fonctions mesurables, énoncées dans les th. 15—20, Chap. II, § 9, subsistent pour les fonctions mesurables $(\mathfrak{X})$ dans le sens qui vient d'être adopté.

En outre, en convenant, pour abréger, d'appeler *fonction élémentaire* toute fonction finie dont l'ensemble des valeurs est au plus dénombrable, on a l'énoncé suivant, qui nous sera utile pour la définition de l'intégrale lebesguienne dans les espaces abstraits.

(4.1) *Toute fonction $f(x)$ mesurable, non négative et finie est limite d'une suite monotone et uniformément convergente de fonctions $\{f_n(x)\}$ mesurables, non négatives et élémentaires.*

En effet, posons pour tout couple m, n d'entiers non négatifs $E_{m,n} = \underset{x}{\mathrm{E}}[2^{-n} m \leqslant f(x) < 2^{-n}(m+1)]$ et pour n positif $f_n(x) = 2^{-n} m$ où $x \in E_{m,n}$ et $m = 0, 1, 2, \ldots$ Ainsi définies, les fonctions $f_n(x)$ sont évidemment mesurables, élémentaires et non négatives, et la convergence uniforme de la suite $\{f_n(x)\}$ vers $f(x)$ résulte de l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| < 2^{-n}$, qui se présente pour tout $x \in X$.

Mesure et intégrale.

§ 5. Etant donnée une fonction arbitraire $\mu(E)$ d'ensemble mesurable $(\mathfrak{X})$, non négative et complètement additive, le nombre $\mu(E)$ s'appellera *mesure* (μ) de l'ensemble E.

Les sous-ensembles (mesurables ou non) des ensembles mesurables E qui sont *de mesure* (μ) *nulle* (c. à d. tels que $\mu(E) = 0$) seront dits également *de mesure* (μ) *nulle.*

Si une propriété se présente pour les points d'un ensemble E, sauf tout au plus dans un ensemble $H \subset E$ de mesure (μ) nulle, nous dirons que cette propriété se présente *presque partout* dans E.

Si tout ensemble de mesure (μ) nulle appartient à la famille $\mathfrak{X}$, cette famille sera dite *complète* (cf. M. F r é c h e t [4]). Etant donnée une famille additive $\mathfrak{X}$ quelconque, dans laquelle une mesure μ est définie, il existe toujours la plus petite famille additive et complète qui contient $\mathfrak{X}$. C'est notamment la famille de tous les ensembles qui ne diffèrent des ensembles $E \in \mathfrak{X}$ que tout au plus par des ensembles de mesure (μ) nulle. Nous désignerons par $\underline{\mathfrak{X}}$ la famille complète ainsi obtenue de la famille $\mathfrak{X}$ donnée. La mesure μ s'étend sur la famille $\underline{\mathfrak{X}}$ d'une manière évidente.

En particulier, si l'on prend comme $\mathfrak{X}$ la famille des ensembles mesurables au sens de B o r e l (dans un espace euclidien) et comme μ la mesure de B o r e l (qui coïncide pour ces ensembles avec celle de L e b e s g u e), on obtient comme $\underline{\mathfrak{X}}$ la famille des ensembles mesurables au sens de L e b e s g u e. De cette manière la définition de la mesure proposée en 1898 par M. E. B o r e l [I, p. 46—50] a déterminée en quelque sorte celle qui a été introduite d'une façon plus simple quelques années plus tard par M. H. L e b e s g u e [1] pour une famille plus vaste d'ensembles. Pour les questions de priorité voir E. B o r e l [1] et H. L e b e s g u e [8].

§ 6. Etant données une famille additive $\mathfrak{X}$ d'ensembles situés dans un espace X et une mesure $\mu(E)$ définie pour les ensembles $E \in \mathfrak{X}$, extensible aussitôt, comme nous venons d'observer, à la famille complétée $\underline{\mathfrak{X}}$, nous allons faire correspondre à μ un procédé d'intégration lebesguienne qui sera défini en particulier pour toutes les fonctions mesurables ($\underline{\mathfrak{X}}$) non négatives.

Soit d'abord $g(x)$ une fonction mesurable ($\underline{\mathfrak{X}}$), non négative et élémentaire, qui prend ses valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ respectivement dans les ensembles mesurables ($\underline{\mathfrak{X}}$) disjoints $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Nous entendrons alors par *l'intégrale définie* (μ) *de la fonction* $g(x)$ *sur l'espace* X le nombre (fini ou infini)

$$(6.1) \qquad (\mu)\int_X g(x)\,dx = \sum_n v_n \cdot \mu(X_n).$$

Cette définition implique aussitôt que si une suite de fonctions mesurables ($\underline{\mathfrak{X}}$), élémentaires et non négatives, tend uniformément vers 0, la suite de leurs intégrales définies (μ) sur l'espace X converge vers 0. On en conclut que, plus généralement, si deux suites $\{g_n(x)\}$ et $\{h_n(x)\}$ de telles fonctions convergent uniformément vers une limite commune, les suites des intégrales

$\left\{(\mu)\int_X g_n(x)\,dx\right\}$ et $\left\{(\mu)\int_X h_n(x)\,dx\right\}$ sont aussi convergentes et ont des limites identiques.

En tenant compte de (4.1), p. 251, on peut donc faire correspondre d'une façon univoque à toute fonction $f(x)$ mesurable ($\underline{\mathfrak{X}}$), non négative et finie, une *intégrale définie* (μ) *de* $f(x)$ *sur* X, donnée par l'égalité

$$(6.2) \qquad (\mu)\int_X f(x)\,dx = \lim_n\, (\mu)\int_X f_n(x)\,dx$$

où $\{f_n(x)\}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables ($\underline{\mathfrak{X}}$), non négatives et élémentaires, uniformément convergente vers la fonction $f(x)$.

De plus, si une fonction $f(x)$ mesurable ($\underline{\mathfrak{X}}$) est presque partout finie, nous pouvons considérer les fonctions mesurables ($\underline{\mathfrak{X}}$) et non négatives [1])

$$g(x) = \begin{cases} \overset{*}{f}(x), & si\ f(x) \neq \pm\infty \\ 0, & si\ f(x) = \pm\infty \end{cases} \quad et \quad h(x) = \begin{cases} |\underset{*}{f}(x)|, & si\ f(x) \neq \pm\infty \\ 0, & si\ f(x) = \pm\infty; \end{cases}$$

quand les intégrales définies (μ) de $g(x)$ et de $h(x)$ sont toutes les deux finies, la fonction $f(x)$ sera dite *sommable* (μ) *sur* X et on posera par définition

$$(6.3) \qquad (\mu)\int_X f(x)\,dx = (\mu)\int_X g(x)\,dx - (\mu)\int_X h(x)\,dx.$$

Enfin, nous poserons pour toute fonction mesurable ($\underline{\mathfrak{X}}$), non négative et devenant infinie dans un ensemble de mesure (μ) positive

$$(6.4) \qquad (\mu)\int_X f(x)\,dx = +\infty.$$

Ceci fait, on peut définir à son tour la notion d'intégrale définie (μ) sur un ensemble E quelconque. Etant donnée une fonction $f(x)$, soit $f_E(x) = f(x)$ pour $x \in E$ et $f_E(x) = 0$ partout

---

1) Pour les notations cf. Chap. IV, § 4, p. 64.

ailleurs. Si la fonction $f_E(x)$ ainsi définie est mesurable $(\underline{\mathfrak{X}})$ et sommable (μ) sur X dans le sens des définitions qui précèdent, nous poserons

$$(6.5) \qquad (\mu)\int_E f(x)\,dx = (\mu)\int_X f_E(x)\,dx$$

et la fonction $f(x)$ sera dite *sommable* (μ) *sur l'ensemble* E.

Il est évident que l'intégrale définie (6.5) de toute fonction $f(x)$ sommable (μ) sur l'espace X tout entier se trouve bien déterminée sur chaque ensemble E qui est mesurable $(\underline{\mathfrak{X}})$ et on aperçoit sans peine que cette intégrale est une fonction complètement additive d'ensemble mesurable $(\underline{\mathfrak{X}})$; nous l'appellerons *intégrale indéfinie* (μ) *de la fonction* $f(x)$.

§ 7. Admettons à présent que la mesure μ soit fixée, ce qui nous permettra de supprimer le signe (μ) dans les formules et dans les théorèmes.

Les définitions introduites entraînent aussitôt les propriétés fondamentales de l'intégrale lebesguienne, énoncées dans les th. 1—4, Chap. IV, § 2. Il est manifeste aussi que

(7.1) $\{f_n(x)\}$ *étant une suite de fonctions sommables, uniformément convergente vers une fonction* $f(x)$, *abstraction faite d'un ensemble de mesure nulle, la fonction* $f(x)$ *est également sommable et on a* $\int_E f\,dx = \lim_n \int_E f_n\,dx$ *pour tout ensemble mesurable* E.

Le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones de fonctions subsiste également pour l'intégrale dans l'espace abstrait:

(7.2) $\{f_n(x)\}$ *étant une suite non décroissante de fonctions mesurables* $(\underline{\mathfrak{X}})$ *et non négatives, convergente presque partout vers une fonction* $f(x)$, *on a* $\int_E f\,dx = \lim_n \int_E f_n\,dx$ *pour tout ensemble* E *mesurable* $(\underline{\mathfrak{X}})$. *Il en est de même des suites non croissantes, à condition toutefois que les fonctions* $f_n(x)$ *soient sommables.*

On le déduit facilement de (7.1), en appliquant le th. de Egoroff (Chap. II, § 11, th. 24), dont la démonstration reste valable dans les espaces abstraits. La discussion du cas où les fonctions $f_n(x)$ et $f(x)$ admettent des valeurs infinies ne présente aucune difficulté.

Il est à remarquer cependant que les démonstrations de l'énoncé (7.2) qui ont été données dans les chapitres consacrés à l'intégrale $(\mathcal{L})$ ne sont pas susceptibles d'application immédiate à l'intégrale dans des espaces abstraits (cf. Chap. IV, p. 63 et Chap. V, p. 83). Mais, dès qu'on a démontré cet énoncé par voie directe, les démonstrations des deux théorèmes consécutifs basés sur lui, à savoir du lemme de Fatou et du théorème de Lebesgue (voir Chap. V, § 4, th. 4 et 5), s'étendent d'elles-mêmes aux espaces quelconques.

§ 8. **Lemme.** *$F(E)$ étant une fonction non négative et complètement additive d'ensemble mesurable dans un espace X, il existe pour tout $a>0$ une décomposition de X en une suite d'ensembles mesurables disjoints $X = H + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots$ tels que $\mu(H) = 0$ et que $a\cdot(n-1)\cdot\mu(E) \leqslant F(E) \leqslant a\cdot n\cdot\mu(E)$ pour tout ensemble mesurable $E \subset X_n$.*

Démonstration. En vertu du th. 1, p. 249, on peut faire correspondre à tout entier positif n un ensemble mesurable A_n tel que l'on ait $F(E) - an\cdot\mu(E) \geqslant 0$ pour tout ensemble mesurable $E \subset A_n$ et $F(E) - an\cdot\mu(E) \leqslant 0$ pour tout ensemble mesurable $E \subset CA_n$. En remplaçant, s'il y a lieu, les ensembles A_n par les ensembles $\sum_{m=n}^{\infty} A_m$ respectivement, on peut admettre que les ensembles A_n forment une suite descendante. Posons

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_0 = X \quad et \quad X_n = A_{n-1} - A_n \quad pour\ n = 1, 2, \ldots$$

Ainsi définis, les ensembles $H, X_1, X_2, \ldots$ sont mesurables, disjoints et on a $X = H + \sum_n X_n$. En outre, on voit de suite que tout ensemble mesurable $E \subset X_n = A_{n-1}\cdot CA_n$ remplit l'inégalité $a\cdot(n-1)\cdot\mu(E) \leqslant F(E) \leqslant a\cdot n\cdot\mu(E)$. Enfin, on a pour tout n naturel $H \subset A_n$, donc $F(H) \geqslant a\cdot n\cdot\mu(H)$ et par conséquent $\mu(H) = 0$.

Théorème 2. *Toute fonction complètement additive $F(E)$ d'ensemble mesurable est de la forme*

$$(8.1) \qquad F(E) = F(E\cdot H) + \int_E f(x)\,dx$$

où $f(x)$ est une fonction mesurable et H un ensemble mesurable de mesure nulle.

Démonstration. En vertu de (3.2), p. 249, nous pouvons nous borner au cas de la fonction $F(E)$ non négative. En vertu du lemme qui précède il existe pour tout $m = 1, 2, \ldots$ une décomposition de l'espace $X = H^{(m)} + \sum_n X_n^{(m)}$ en sommandes mesurables, disjoints et satisfaisant aux conditions:

$$\mu(H^{(m)}) = 0, \tag{8.2}$$

$$2^{-m}(n-1)\cdot\mu(E) \leqslant F(E) \leqslant 2^{-m} n\cdot\mu(E) \tag{8.3}$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset X_n^{(m)}$.

Considérons deux ensembles quelconques $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m+1)}$ appartenant à deux partages consécutifs de l'espace X. Si $j = 2i$ ou bien $j = 2i - 1$, le second de ces ensembles et contenu dans le premier, abstraction faite tout au plus d'un ensemble de mesure nulle. Si, par contre, $2i \neq j \neq 2i-1$, ces deux ensembles sont disjoints l'un de l'autre, en négligeant encore les ensembles de mesure nulle. Il en résulte, en posant

$$f_m(x) = \begin{cases} 2^{-m}(n-1) & \textit{pour } x \in X_n^{(m)} \quad \textit{où } n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \textit{pour } x \in H^{(m)}, \end{cases}$$

que l'on a presque partout $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant 2^{-m-1}$, de sorte que, à un ensemble de mesure nulle près, la suite $\{f_m(x)\}$ converge uniformément vers une fonction $f(x)$.

Or, soit $H = \sum_m H^{(m)}$, d'où selon (8.2) $\mu(H) = 0$. Pour tout ensemble mesurable E on déduit donc de la condition (8.3)

$$F(E\cdot H) + \int_E f_m\, dx = F(E\cdot H) + \sum_n 2^{-m}(n-1)\cdot\mu(E\cdot X_n^{(m)}) \leqslant F(E) \leqslant$$

$$\leqslant F(E\cdot H) + \sum_n 2^{-m} n\cdot\mu(E\cdot X_n^{(m)}) \leqslant F(E\cdot H) + \int_E f_m\, dx + 2^{-m}\cdot\mu(E),$$

ce qui donne en vertu de (7.1), p. 254, par le passage à la limite avec $m \to \infty$, la décomposition (8.1), q. f. d.

Le th. 2 peut être rattaché à certaines notions analogues à celles qui ont été introduites au Chap. I pour les fins de la théorie de l'intégrale lebesguienne dans les espaces euclidiens. Appelons notamment *absolument continue* toute fonction complètement additive d'ensemble mesurable qui s'annule pour tout ensemble de mesure nulle; pareillement, appelons *singulière* une fonction $F(E)$ complètement additive d'ensemble mesurable, s'il existe un ensemble H de mesure nulle, tel que l'on ait, pour tout ensemble mesurable E, l'égalité $F(E) = F(E\cdot H)$.

Or, l'intégrale indéfinie étant évidemment une fonction absolument continue, le th. 2 fournit deux corollaires suivants:

Corollaire 1. *Toute fonction complètement additive d'ensemble mesurable est une somme de deux fonctions, dont l'une est absolument continue et l'autre singulière (cette décomposition étant évidemment univoque).*

Corollaire 2. *Toute fonction complètement additive et absolument continue d'ensemble mesurable est une intégrale indéfinie.*

Réciproquement, les corollaires 1 et 2, pris conjointement, donnent le th. 2.

Le corollaire 1 peut être considéré comme une généralisation du th. de Lebesgue sur la décomposition canonique d'une fonction additive à variation bornée de figure élémentaire (cf. Chap. I, § 13, th. 9). Cette généralisation est due à M. H. Hahn [I, p. 422].

Le corollaire 2 a été établi d'abord pour certains cas particuliers par M. J. Radon [1] et M. P. J. Daniell [2], et ensuite en toute généralité par M. O. Nikodym [2].

La fonction $f(x)$ figurant sous le signe d'intégrale dans la formule (8.1) est, comme on voit sans peine, déterminée d'une façon univoque par la fonction $F(E)$, abstraction faite tout au plus d'un ensemble de mesure nulle. Par analogie à la théorie de Lebesgue, nous pouvons l'appeler *dérivée* de la fonction $F(E)$ et écrire $f(x) = F'(x)$. Le th. 4, Chap. III, § 5, sur la dérivation des suites monotones de fonctions additives s'étend alors facilement sur les espaces abstraits: *si une suite monotone $\{F_n(E)\}$ de fonctions complètement additives d'ensemble mesurable converge vers une fonction $F(E)$, on a presque partout $F'(x) = \lim_n F'_n(x)$.*

Espaces-produits.

§ 9. Fixons pour la suite deux espaces abstraits X et Y avec leurs familles additives d'ensembles $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement. Le *produit combinatoire* [1]) $X \times Y$ de ces espaces, portera le nom de leur *espace-produit*. Etant donné un ensemble quelconque

[1]) On appelle *produit combinatoire* de deux ensembles A et B l'ensemble de tous les couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$; on le désigne par $A \times B$.

$E \subset X \times Y$, nous poserons par définition, comme pour les ensembles plans (voir Chap. XI, § 1, p. 222):

$$E^{[y]}_x = \mathop{\mathrm{E}}_x [(x, y) \in E] \quad et \quad E^{[x]}_y = \mathop{\mathrm{E}}_y [(x, y) \in E].$$

Les ensembles $E \subset X \times Y$ de la forme $E = A \times B$ où $A \in \mathfrak{X}$ et $B \in \mathfrak{Y}$ seront dits *élémentaires*. On a les identités évidentes:

$$C(A \times B) = (CA \times B) + (X \times CB)$$

et

$$(A_1 \times B_1) \cdot (A_2 \times B_2) = (A_1 \cdot A_2) \times (B_1 \cdot B_2),$$

où $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont des ensembles tout à fait arbitraires et le complémentaire de leur produit est pris par rapport à l'espace-produit $X \times Y$. On en conclut immédiatement que

(9.1) *La partie commune de deux ensembles élémentaires est un ensemble élémentaire.*

(9.2) *Le complémentaire d'un ensemble élémentaire est toujours une somme de deux ensembles élémentaires disjoints.*

La plus petite famille additive d'ensembles de l'espace $X \times Y$ qui en renferme tous les ensembles élémentaires, c. à d. la partie commune de toutes les familles additives contenant tous ces ensembles, sera désignée par $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Conformément à la convention antérieure (cf. p. 248), les ensembles appartenant à cette famille seront dits *mesurables* $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$.

Théorème 3. *Si l'ensemble E est mesurable $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$, l'ensemble $E^{[y]}_x$ est mesurable $(\mathfrak{X})$, quel que soit $y \in Y$, et l'ensemble $E^{[x]}_y$ est mesurable $(\mathfrak{Y})$, quel que soit $x \in X$.*

Démonstration. Considérons la famille de tous les ensembles E mesurables $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ et tels que $E^{[y]}_x$ soit mesurable $(\mathfrak{X})$ pour tout $y \in Y$ et que $E^{[x]}_y$ soit mesurable $(\mathfrak{Y})$ pour tout $x \in X$. Cette famille est additive et contient en particulier tous les ensembles élémentaires. Elle coïncide donc avec la famille $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ toute entière, puisque cette dernière est par définition la plus petite famille additive qui contient tous les ensembles élémentaires.

Corollaire. *Toute fonction $f(x, y)$ mesurable $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ est pour tout $y \in Y$ mesurable $(\mathfrak{X})$ en x et pour tout $x \in X$ mesurable $(\mathfrak{Y})$ en y.*

Mesure et intégrale dans les espaces-produits.

§ 10. Pour définir dans la famille $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ une mesure, il est commode de caractériser préalablement cette famille encore d'une manière un peu différente. Appelons *famille normale* toute famille $\mathfrak{N}$ d'ensembles de l'espace $X \times Y$ qui satisfait aux conditions:

(10.1) *tout ensemble élémentaire appartient à $\mathfrak{N}$,*

(10.2) *la somme d'une suite d'ensembles disjoints appartenant à $\mathfrak{N}$ appartient à $\mathfrak{N}$,*

(10.3) *la limite d'une suite descendante d'ensembles qui appartiennent à $\mathfrak{N}$ appartient à $\mathfrak{N}$.*

Il est évident que la partie commune de toutes les familles normales en est encore une. Autrement dit: parmi les familles normales il y a une qui est la plus petite. Nous la désignerons par $\mathfrak{N}_0$ et nous allons montrer qu'elle coïncide avec la famille $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Lemme 1. *La partie commune d'une suite quelconque d'ensembles appartenant à la famille $\mathfrak{N}_0$ appartient à la famille $\mathfrak{N}_0$.*

Démonstration. Par suite de la condition (10.3), il suffit de prouver que la partie commune de deux ensembles appartenant à $\mathfrak{N}_0$ appartient à $\mathfrak{N}_0$.

Soit d'abord $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_0$ la famille des ensembles $E \in \mathfrak{N}_0$ dont la partie commune avec tout ensemble élémentaire appartient à $\mathfrak{N}_0$. On voit aussitôt que la famille $\mathfrak{N}_1$ vérifie les conditions (10.2) et (10.3); en vertu de (9.1) elle vérifie aussi la condition (10.1). C'est donc une famille normale et, $\mathfrak{N}_0$ en étant la plus petite, il vient $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_1$, d'où finalement $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_0$.

Soit maintenant $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}_0$ la famille des ensembles $E \in \mathfrak{N}_0$ dont la partie commune avec tout ensemble appartenant à $\mathfrak{N}_0$ appartient à $\mathfrak{N}_0$. Comme $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1$, on aperçoit aussitôt que la famille $\mathfrak{N}_2$ remplit la condition (10.1); il est évident, de plus, qu'elle remplit aussi les conditions (10.2) et (10.3), c. à d. qu'elle est normale. On a donc, comme auparavant, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_0$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Le complémentaire de tout ensemble appartenant à la famille $\mathfrak{N}_0$, appartient aussi à la famille $\mathfrak{N}_0$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{N}_3 \subset \mathfrak{N}_0$ la famille des ensembles $E \in \mathfrak{N}_0$ tels que $CE \in \mathfrak{N}_0$. Pour conclure que $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_0$, il suffit de montrer que la famille $\mathfrak{N}_3$ est normale, c. à d. qu'elle remplit les conditions (10.1) — (10.3).

Or, en vertu de (9.2), p. 258, la famille $\mathfrak{N}_3$ contient tous les ensembles élémentaires et remplit par conséquent la condition (10.1). D'autre part, étant donnée une suite quelconque $\{E_n\}$ d'ensembles disjoints appartenant à $\mathfrak{N}_3$, l'ensemble $E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ appartient évidemment à la famille $\mathfrak{N}_0$ et, en vertu du lemme 1, il en est de même de l'ensemble $CE=\prod_{n=1}^{\infty} CE_n$, de sorte que finalement $E \in \mathfrak{N}_3$. La famille $\mathfrak{N}_3$ satisfait donc à la condition (10.2).

Enfin, $\{E_n\}$ étant une suite descendante d'ensembles appartenant à $\mathfrak{N}_3$, l'ensemble $E=\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ appartient évidemment à $\mathfrak{N}_0$. Considérons d'autre part l'identité

$$CE=\sum_{n=1}^{\infty} CE_n = CE_1+\sum_{n=1}^{\infty}(CE_{n+1}-CE_n)=CE_1+\sum_{n=1}^{\infty} E_n\cdot CE_{n+1}.$$

Les ensembles CE_1 et $E_n \cdot CE_{n+1}$ où $n=1,2,\ldots$ étant deux à deux disjoints et appartenant en vertu du lemme 1 à $\mathfrak{N}_0$, il en est en vertu de (10.2) de même de l'ensemble CE. Ainsi, on a à la fois $E \in \mathfrak{N}_0$ et $CE \in \mathfrak{N}_0$, d'où $E \in \mathfrak{N}_3$. Par conséquent, la famille $\mathfrak{N}_3$ remplit aussi la condition (10.3), ce qui achève la démonstration.

Théorème 4. *La famille $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ coïncide avec la plus petite famille normale $\mathfrak{N}_0$.*

Démonstration. La famille additive $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ étant évidemment normale, on a $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. D'autre part, on prouve aisément à l'aide des lemmes 1 et 2 que la famille $\mathfrak{N}_0$ est additive, de sorte que l'on a réciproquement $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{N}_0$.

§ 11. Admettons à présent que des mesures μ et ν ont été fixées pour les ensembles des familles $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement.

Alors, *pour tout ensemble E mesurable $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ les intégrales*

$$(11.1) \qquad (\mu)\int_X \nu(E_y^{[x]})\,dx \quad et \quad (\nu)\int_Y \mu(E_x^{[y]})\,dy$$

existent, sont finies et égales.

En effet, d'après le th. 3, p. 258, les expressions $\mu(E_x^{[y]})$ et $\nu(E_y^{[x]})$ sont, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ respectivement, bien déterminées et non négatives. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ désignant la famille des ensembles mesurables $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ pour lesquels les intégrales (11.1) existent et sont égales, on montre sans peine, en tenant compte de (7.2), p. 254, et de l'additivité complète de la mesure, que $\mathfrak{M}$ est une famille normale d'ensembles. En vertu du th. 4, on a donc, inversement, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{M}$. Par conséquent $\mathfrak{M}=\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Enfin, il est évident que les valeurs des intégrales (11.1) ne dépassent jamais le nombre $\mu(X)\cdot\nu(Y)$; elles sont donc finies.

Ce résultat nous permet de définir dans l'espace-produit $X \times Y$ une *mesure* pour les ensembles de la famille $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Nous la désignerons par $\mu\nu$, en posant par définition pour tout ensemble E mesurable $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$:

$$(11.2) \qquad \mu\nu(E)=(\mu)\int_X \nu(E_y^{[x]})\,dx=(\nu)\int_Y \mu(E_x^{[y]})\,dy.$$

Il en résulte en particulier que

(11.3) *Pour tout ensemble élémentaire $A \times B$ on a*

$$\mu\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

La mesure $\mu\nu$, définie par la formule (11.2) pour les ensembles mesurables $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$, s'étend aussitôt sur les ensembles mesurables $(\underline{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$ [1]. De plus, la formule (11.2) implique que

(11.4) *Etant donné un ensemble E mesurable $(\underline{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$ de mesure $(\mu\nu)$ nulle, l'ensemble $E_x^{[y]}$ est pour presque tous les $y \in Y$ de mesure (μ) nulle et, d'une façon analogue, l'ensemble $E_y^{[x]}$ est pour presque tous les $x \in X$ de mesure (ν) nulle.*

On peut donc compléter comme il suit le th. 3 et le corollaire, p. 258.

(11.5) *Si l'ensemble E est mesurable $(\underline{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$, l'ensemble $E_x^{[y]}$ est mesurable $(\underline{\mathfrak{X}})$ pour presque tous les $y \in Y$ et l'ensemble $E_y^{[x]}$ est mesurable $(\underline{\mathfrak{Y}})$ pour presque tous les $x \in X$.*

(11.6) *Toute fonction $f(x,y)$ mesurable $(\underline{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}})$ est mesurable $(\underline{\mathfrak{X}})$ en x pour presque tous les $y \in Y$ et mesurable $(\underline{\mathfrak{Y}})$ en y pour presque tous les $x \in X$.*

[1] Cf. § 5, p. 252.

Les énoncés (11.4) et (11.5) permettent à leur tour d'étendre la formule (11.2) sur tous les ensembles E mesurables $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$, sauf que les expressions $\mu(E^{[y]}_x)$ et $\nu(E^{[x]}_y)$ soient définies dans les espaces Y et X respectivement non plus partout, mais, en général, *presque partout*.

Enfin, nous allons établir deux théorèmes suivants sur l'intégrale multiple dans l'espace-produit.

Théorème 5. *Etant donnée une fonction $f(x, y)$ mesurable $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$ et non négative, on a*

$$(\mu\nu)\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(x, y) = (\mu)\int_X \left[(\nu)\int_Y f(x, y)\, dy\right] dx =$$

$$= (\nu)\int_Y \left[(\mu)\int_X f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Démonstration. Dans le cas particulier où $f(x, y)$ est fonction caractéristique (cf. Chap. IV, § 3) d'un ensemble E mesurable $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$, l'égalité qu'il s'agit d'établir est une conséquence immédiate de la formule (11.2), étendue aux ensembles mesurables $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$. Cette égalité s'étend ensuite sur les fonctions mesurables $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$ non négatives et n'admettant qu'un nombre fini de valeurs, car ces fonctions sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de fonctions caractéristiques. De là, l'égalité en question s'étend (cf. Chap. II, § 9, th. 20) par le passage à la limite selon le théorème de Lebesgue (cf. (7.2), p. 254) sur les fonctions arbitraires mesurables $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$ et non négatives.

Théorème 6. *Etant donnée une fonction $f(x,y)$ mesurable $(\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}})$ et sommable $(\mu\nu)$, les intégrales $(\mu)\int_X f(x,y)\, dx$ et $(\nu)\int_Y f(x,y)\, dy$ existent et sont finies pour presque tous les $y \in Y$ et pour presque tous les $x \in X$ respectivement; on a de plus*

$$(\mu\nu)\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(x, y) = (\mu)\int_X \left[(\nu)\int_Y f(x, y)\, dy\right] dx =$$

$$= (\nu)\int_Y \left[(\mu)\int_X f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Ce théorème résulte aussitôt du th. 5, puisque toute fonction sommable peut être représentée comme une différence de deux fonctions sommables non négatives.

Les th. 6 et 5 peuvent être regardés comme des généralisations sur l'espace-produit abstrait des théorèmes de Fubini et de Tonelli (Chap. IV, § 7, th. 16 et 17). En effet, si l'on prend comme $X = Y$ l'intervalle linéaire [0,1] et comme $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ la famille des ensembles mesurables dans cet intervalle, on obtient comme espace-produit $X \times Y = X^2$ le carré $Q = [0,1; 0,1]$ et comme la famille $\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ celle des ensembles mesurables dans ce carré au sens de Lebesgue. On aperçoit aussitôt que, dans ces hypothèses, la famille $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ ne contiendrait pas *tous* les ensembles mesurables (au sens de Lebesgue) du carré Q: c'est pourquoi le passage à la famille *complète* $\underline{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ a été nécessaire.

Notons enfin que certains théorèmes, analogues aux énoncés établis dans ce § sur les ensembles mesurables et les ensembles de mesure nulle, se présentent pour la propriété de Baire et les catégories de Baire. Cf. à ce sujet C. Kuratowski et S. Ulam [1].