CHAPITRE XI.

Fonctions de deux variables réelles.

Préliminaires.

§ 1. Ce chapitre se compose de deux parties indépendantes l'une de l'autre. La première est consacrée aux conditions pour l'existence de la différentielle approximative et de la différentielle totale. Elle embrasse les théorèmes de H. Rademacher, W. Stepanoff et U. S. Haslam-Jones; tous les résultats qu'on y trouve s'étendent sans modifications essentielles aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. La seconde partie contient, à titre d'application des méthodes de Baire-Lebesgue à la théorie des fonctions analytiques, les théorèmes plus récents sur les conditions d'holomorphie.

Nous nous servirons dans la suite des notations suivantes. Les nombres dérivés approximatifs partiels d'une fonction $F(x,y)$ par rapport à x seront désignés respectivement par $\overline{F}^{+}_{\mathrm{ap}_x}$, $\underline{F}^{+}_{\mathrm{ap}_x}$, $\overline{F}^{-}_{\mathrm{ap}_x}$ et $\underline{F}^{-}_{\mathrm{ap}_x}$. Si ces dérivés sont égaux dans un point (x,y), leur valeur commune, c. à d. la dérivée approximative partielle de $F(x,y)$ par rapport à x, sera désignée par $F'_{\mathrm{ap}_x}(x,y)$. Les symboles analogues seront employés par rapport à y. Pour les nombres dérivés partiels de Dini nous conserverons la notation employée au Chap. VI, à savoir $\overline{F}^{+}_{x}$, $\underline{F}^{+}_{x}$, etc.

Etant donné sur le plan un ensemble arbitraire E, nous poserons par définition pour tout a réel

$$E^{[a]}_x = \mathop{\mathrm{E}}_x[(x,a)\in E] \quad et \quad E^{[a]}_y = \mathop{\mathrm{E}}_y[(a,y)\in E].$$

$E^{[a]}_x$ est donc la projection sur l'axe des x de l'ensemble des

points d'intersection de E avec la droite $y=a$ et $E^{[a]}_y$ en est une sur l'axe des y de celui des points d'intersection de E avec la droite $x=a$.

Un point (ξ, a) sera dit *point de densité de l'ensemble E dans la direction des x*, lorsque le point ξ est un point de densité de l'ensemble linéaire $E^{[a]}_x$. La définition du point de densité dans la direction des y est symétrique.

En désignant le point (x,y) par z, nous écrirons souvent pour abréger $F(z)$ au lieu de $F(x,y)$.

La *continuité* d'une fonction $F(x,y)$ est à entendre toujours comme celle d'une fonction de point (x,y) sur le plan. Nous admettrons enfin, pour simplifier, que les fonctions considérées de deux variables sont toujours définies dans le plan tout entier.

Différentielle totale et différentielle approximative.

§ 2. Une fonction $F(z)$ est dite *totalement différentiable* au point z_0, lorsqu'il existe deux nombres finis A et B tels que

$$(2.1)\qquad \lim_{z\to z_0}\frac{1}{\rho}[F(z)-F(z_0)-A\cdot(x-x_0)-B\cdot(y-y_0)]=0$$

où $z_0=(x_0,y_0)$, $z=(x,y)$ et $\rho=\rho(z_0,z)$; les nombres A et B sont alors des dérivées partielles de $F(x,y)$ par rapport aux variables x et y respectivement, et l'expression linéaire $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)$ porte le nom de la *différentielle totale* de la fonction $F(x,y)$ dans le point $z_0=(x_0,y_0)$.

L'existence d'une différentielle totale d'une fonction $F(x,y)$ dans un point peut être interprétée comme celle d'un plan tangent en ce point à la surface $z=F(x,y)$, mais non perpendiculaire au plan xy. De cette manière la notion de différentiabilité totale des fonctions de deux variables correspond exactement à la notion analogue de dérivabilité des fonctions d'une seule variable. Néanmoins, pendant que toute fonction à variation bornée d'une variable est presque partout dérivable, une fonction à variation bornée, même absolument continue, de deux variables peut n'être totalement différentiable dans aucun point (cf. W. Stepanoff [3, p. 515]).

§ 3. Etant donné un ensemble plan E, nous appellerons un point z son *point de densité extérieure au sens fort*, lorsque $\dfrac{|E\cdot I|}{|I|}$ tend vers 1 avec $\delta(I)\to 0$ où I désigne un intervalle variable qui contient z. D'une façon analogue, z sera dit *point de dispersion de E au sens fort*, lorsque $\dfrac{|E \cdot I|}{|I|}$ tend vers 0 avec $\delta(I) \to 0$, la signification de I étant la même.

En remplaçant dans ces définitions les *intervalles* I quelconques par des *carrés*, on revient manifestement à celles des points de densité extérieure et de dispersion, qui ont été adoptées au Chap. III, § 6. Ainsi tout point de densité extérieure, ou de dispersion, au sens fort l'est également au sens ordinaire, mais non réciproquement. Toutefois, le th. de Lebesgue sur les points de densité (voir Chap. III, § 6, th. 5 et 6) s'étend à ceux au sens fort. Il est facile de l'établir directement, mais nous le déduirons plus loin (voir § 6, p. 231) de certains théorèmes plus généraux.

Les définitions des limites approximatives des fonctions d'une variable réelle se transportent immédiatement sur celles de point sur le plan. Etant donnée une fonction $F(z)$ définie dans l'entourage d'un point z_0, on appelle *limite approximative supérieure* de $F(z)$ au point z_0 la borne inférieure de tous les nombres (finis ou infinis) v pour lesquels le point z_0 est un point de dispersion au sens fort de l'ensemble $\underset{z}{\mathrm{E}}[F(z) > v]$. La définition de la *limite approximative inférieure* est symétrique. Les deux limites seront désignées respectivement par

$$\limsup_{z \to z_0} \operatorname{ap} F(z) \quad \text{et} \quad \liminf_{z \to z_0} \operatorname{ap} F(z).$$

Si elles sont égales, leur valeur commune porte le nom de *limite approximative* de la fonction $F(z)$ au point z_0; nous la désignerons par $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{ap} F(z)$. Si, de plus, cette limite est finie et égale à $F(z_0)$, la fonction $F(z)$ est dite *approximativement continue* au point z_0.

Les propriétés fondamentales des limites approximatives des fonctions d'une variable (cf. Chap. VIII, § 3) s'étendent facilement sur celles des fonctions de deux variables. En particulier:

(3.1) *$F(z)$ étant une fonction mesurable sur un ensemble mesurable E qui admet z_0 comme un point de densité, pour que l'on ait $l = \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{ap} F(z)$, il faut et il suffit que z_0 soit un point de densité de l'ensemble $\underset{z}{\mathrm{E}}[|F(z) - l| < \varepsilon;\ z \in E]$, quel que soit $\varepsilon > 0$.*

A la dérivabilité approximative des fonctions d'une variable vient correspondre dans le domaine des fonctions de deux ou plusieurs variables la *différentiabilité approximative*. Une fonction $F(z)$ est dite approximativement différentiable dans un point z_0, lorsqu'il existe deux nombres finis A et B tels que

$$(3.2) \qquad \lim_{z \to z_0} \operatorname{ap} \frac{1}{\rho}\,[F(z) - F(z_0) - A \cdot (x - x_0) - B \cdot (y - y_0)] = 0$$

où $z_0 = (x_0, y_0)$, $z = (x, y)$ et $\rho = \rho(z_0, z)$; l'expression linéaire $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0)$ porte alors le nom de la *différentielle approximative* de la fonction $F(z)$ dans le point $z_0 = (x_0, y_0)$.

Une notion presque équivalente, à savoir qui correspond aux notions de point de densité et de dispersion *au sens ordinaire*, a été introduite sous le nom de *différentielle asymptotique* par M. W. Stepanoff [3], qui a montré que, *faisant abstraction des ensembles de mesure nulle, la différentiabilité asymptotique d'une fonction mesurable équivaut à sa dérivabilité asymptotique partielle par rapport à chacune des deux variables x et y.*

Nous allons l'établir à présent pour la notion de différentielle approximative, qui vient d'être introduite.

Critère d'existence de la différentielle approximative.

§ 4. Lemme. *Etant donnés un ensemble fermé et borné E et trois fonctions $\Phi_i(x, y, \xi)$, où $i = 1, 2, 3$, continues pour $(x, y) \in E$ et pour $(\xi, y) \in E$ (c. à d. continues sur l'ensemble $\underset{(x,y,\xi)}{\mathrm{E}}[(x, y) \in E;\ (\xi, y) \in E]$ dans l'espace $\mathbf{R}_3$), l'ensemble P de tous les points $(x, y) \in E$ tels que*

$$|\underset{\xi}{\mathrm{E}}[\Phi_1(x, y, \xi) \leqslant 0;\quad \Phi_2(x, y, \xi) \leqslant 0;\quad \Phi_3(x, y, \xi) \leqslant 0;\quad (\xi, y) \in E]| \geqslant a$$

est fermé, quel que soit a.

Démonstration. Soit (x_0, y_0) la limite d'une suite $\{(x_n, y_n)\}$ de points de P. Posons pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$E_n = \underset{\xi}{\mathrm{E}}[\Phi_1(x_n, y_n, \xi) \leqslant 0;\ \Phi_2(x_n, y_n, \xi) \leqslant 0;\ \Phi_3(x_n, y_n, \xi) \leqslant 0;\ (\xi, y_n) \in E]$$

et désignons par $c_n(\xi)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} c_n(\xi)\, d\xi = |E_n| \geqslant a$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, donc en vertu du th. 5, Chap. V, § 4, aussi

$$(4.1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \limsup_n c_n(\xi)\, d\xi \geqslant a.$$

Or, $\limsup_n c_n(\xi)$ n'admettant que les valeurs 0 et 1 et l'ensemble E étant fermé, on en conclut par suite de la continuité des fonctions Φ_1, Φ_2 et Φ_3 que tout point ξ tel que $\limsup_n c_n(\xi) = 1$ appartient à E_0. On a par conséquent en vertu de la formule (4.1) $|E_0| = \int_{-\infty}^{+\infty} c_0(\xi)\, d\xi \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \limsup_n c_n(\xi)\, d\xi \geqslant a$, d'où $(x_0, y_0) \in P$, c. q. f. d.

Théorème 1. *Presque tous les points d'un ensemble mesurable plan E en sont des points de densité linéaire dans les directions des x et des y à la fois.*

Démonstration. Vu le th. 11b), Chap. II, § 6, nous pouvons évidemment admettre que l'ensemble E est fermé et borné.

Désignons par D l'ensemble formé de points de E qui en sont des points de densité linéaire p. ex. dans la direction des x. Pour tout couple α, β de nombres réels et pour tout m naturel désignons de plus par $D_m^{(\alpha,\beta)}$ l'ensemble de tous les points $(x, y) \in E$ tels que $|\underset{\xi}{\mathrm{E}}\, [(\xi, y) \in E;\ \alpha \leqslant \xi - x \leqslant \beta]| \geqslant (1 - m^{-1})(\beta - \alpha)$. Soit enfin $D_{m,n}$ la partie commune de tous les ensembles $D_m^{(\alpha,\beta)}$ où $-n^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant n^{-1}$. On a alors $D = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n}$.

Or, en posant dans le lemme qui précède $\Phi_1(x, y, \xi) = \xi - x - \beta$, $\Phi_2(x, y, \xi) = \alpha - \xi + x$, $\Phi_3(x, y, \xi) = 0$ et, $a = (1 - m^{-1})(\beta - \alpha)$, on en conclut aussitôt que chacun des ensembles $D_m^{(\alpha,\beta)}$, et par conséquent que chacun des ensembles $D_{m,n}$, est un ensemble fermé. D et, par suite, $E - D$ sont donc des ensembles mesurables. Mais en vertu du th. de L e b e s g u e sur les points de densité (Chap. III, § 6, th. 5) l'ensemble $E - D$ est de mesure linéaire nulle sur toute droite $y = \eta$. En vertu du th. de F u b i n i (Chap. IV, § 7, th. 15, ou même seulement en vertu du lemme 5, *ibid.*), l'ensemble $E - D$ est donc de mesure plane nulle, c. q. f. d.

Théorème 2. *Les dérivés partiels approximatifs extrêmes d'une fonction $F(x, y)$ mesurable sur un ensemble mesurable E sont des fonctions mesurables sur E.*

Démonstration. En vertu du th. de L u s i n (Chap. II, § 12, th. 25) l'ensemble E peut être représenté comme une somme d'un ensemble de mesure nulle et d'une suite d'ensembles fermés tels que la fonction $F(x, y)$ soit continue sur chacun d'eux. La démonstration se réduit donc au cas où l'ensemble E est fermé lui-même et la fonction $F(x, y)$ est continue sur E.

Considérons pour fixer les idées le dérivé $\overline{F}^+_{\mathrm{ap}_x}(x, y)$. Etant donnée une valeur réelle arbitraire v, désignons pour tout $m = 1, 2, \ldots$ et pour tout $h > 0$ par $E_m^{(h)}$ l'ensemble des points $(x, y) \in E$ tels que

$$|\underset{\xi}{\mathrm{E}}\, [F(\xi, y) - F(x, y) \leqslant (v + m^{-1})(\xi - x);\ 0 \leqslant \xi - x \leqslant h;\ (\xi, y) \in E]| \geqslant (1 - m^{-1})\, h.$$

En posant $\Phi_1(x, y, \xi) = x - \xi$, $\Phi_2(x, y, \xi) = \xi - x - h$, $\Phi_3(x, y, \xi) = F(\xi, y) - F(x, y) - (v + m^{-1})(\xi - x)$ et $a = (1 - m^{-1})\, h$ dans le lemme, p. 225, on en conclut que chacun des ensembles $E_m^{(h)}$ est fermé. Il en est donc de même, pour tout entier positif n, de l'ensemble $E_{m,n} = \prod_{0 < h < n^{-1}} E_m^{(h)}$.

Ceci établi, soit D l'ensemble composé de points de E qui en sont des points de densité linéaire p. ex. dans la direction des x. En vertu de (3.3), Chap. VIII, p. 146, pour que l'on ait alors $\overline{F}^+_{\mathrm{ap}_x}(x, y) \leqslant v$ dans un point $(x, y) \in D$, il faut et il suffit que x soit pour tout $m = 1, 2, \ldots$ un point de densité à droite de $\underset{\xi}{\mathrm{E}}\, [F(\xi, y) - F(x, y) \leqslant (v + m^{-1})(\xi - x);\ \xi > x;\ (\xi, y) \in D]$. On en déduit facilement que $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\, [\overline{F}^+_{\mathrm{ap}_x}(x, y) \leqslant v;\ (x, y) \in D] = \prod_m \sum_n E_{m,n}$, donc que

$$(4.2) \qquad \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\, [\overline{F}^+_{\mathrm{ap}_x}(x, y) \leqslant v;\ (x, y) \in E] = \prod_m \sum_n E_{m,n} + H,$$

où $H \subset E - D$ et, par suite, $|H| = 0$ en vertu du th. 1. Or, les ensembles $E_{m,n}$ étant, comme nous avons vu, fermés, le membre gauche de la formule (4.2) est mesurable. Ainsi $\overline{F}^+_{\mathrm{ap}_x}(x, y)$ est une fonction mesurable sur E, c. q. f. d.

Le th. 2 ne se laisse pas étendre aux dérivés partiels de D i n i: on montre sans peine qu'une fonction de deux variables peut être mesurable, sans que ses dérivés en question le soient. Cependant *les dérivés partiels de D i n i d'une fonction de B a i r e, sans être nécessairement des fonctions de B a i r e, sont toujours mesurables.* La démonstration de ce théorème fait appel toutefois à la théorie des ensembles analytiques (cf. M. N e u b a u e r [1]). Quant à la mesurabilité seule des dérivés en question, elle est une conséquence d'un théorème général de M. F. H a u s d o r f f [II, p. 274] sur les fonctions de B a i r e.

Le th. 2 est évidemment valable aussi pour les fonctions d'une variable. En outre, *les dérivés de D i n i de toute fonction mesurable d'une variable* sont, par opposition au cas de deux variables, *toujours mesurables* (cf. S. Banach [6] et S. Auerbach [1]). Enfin, si une fonction d'une variable est de classe α de Baire, ses dérivés de Dini sont des fonctions de classe tout au plus $\alpha+2$; ce résultat est dû à M. W. Sierpiński [8].

§ 5. **Théorème 3** (de Stepanoff). *Pour qu'une fonction $F(x,y)$ mesurable sur un ensemble mesurable E soit approximativement différentiable presque partout dans E, il faut et il suffit qu'elle y soit presque partout approximativement dérivable par rapport à x et à y.*

Si elle l'est, l'expression linéaire $(\xi-x)\cdot F'_{\mathrm{ap}_x}(x,y)+(\eta-y)\cdot F'_{\mathrm{ap}_y}(x,y)$ est presque partout dans E la différentielle approximative de $F(x,y)$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Admettons donc que la fonction $F(x,y)$ est approximativement différentiable presque partout dans E. Il s'agit d'en établir la dérivabilité approximative presque partout dans E par rapport à x, le raisonnement pour y étant évidemment symétrique.

Désignons à ce but pour tout $n=1,2,\dots$ par A_n l'ensemble des points $(x,y)\in E$ tels que pour tout carré Q contenant (x,y)

$$\delta(Q)<2n^{-1} \textit{ entraîne } |Q\cdot \underset{(\xi,\eta)}{\mathrm{E}}[|F(\xi,\eta)-F(x,y)|\leqslant n\cdot\delta(Q)]|\geqslant\frac{3}{4}|Q|$$

et posons $A=\sum_n A_n$. On a alors $|E-A|=0$.

Etant donnée maintenant une valeur arbitraire y, considérons pour un n naturel quelconque un couple x_1, x_2 de points de l'ensemble linéaire $\underset{x}{A_n^{[y]}}$ tels que $0<x_2-x_1<n^{-1}$. Pour le carré $Q=[x_1, x_2;\ y, y+x_2-x_1]$ on aura alors à la fois l'inégalité $|Q\cdot\underset{(\xi,\eta)}{\mathrm{E}}[|F(\xi,\eta)-F(x_1,y)|\leqslant n\cdot\delta(Q)]|\geqslant\frac{3}{4}|Q|$ et l'inégalité $|Q\cdot\underset{(\xi,\eta)}{\mathrm{E}}[|F(\xi,\eta)-F(x_2,y)|\leqslant n\cdot\delta(Q)]|\geqslant\frac{3}{4}|Q|$, d'où l'existence d'un point (ξ,η) tel que $|F(\xi,\eta)-F(x_i,y)|\leqslant n\cdot\delta(Q)\leqslant 2n\cdot(x_2-x_1)$ pour $i=1,2$. Il en résulte que $|F(x_2,y)-F(x_1,y)|\leqslant 4n\cdot(x_2-x_1)$. Cette évaluation montre que pour tout y la fonction $F(x,y)$ est (VB) et même (AC) en x sur l'ensemble $\underset{x}{A_n^{[y]}}$, donc (VBG) en x sur $\underset{x}{A^{[y]}}$. Or, E étant par hypothèse un ensemble mesurable, $\underset{x}{E^{[y]}}$ l'est également pour presque toute valeur de y. Il en résulte en vertu du th. 3, Chap. VIII, § 6, que pour presque toutes les valeurs de y la fonction $F(x,y)$ est presque partout dans $\underset{x}{A^{[y]}}$ approximativement dérivable par rapport à x. Comme, de plus, les dérivés approximatifs extrêmes de $F(x,y)$ sont selon le th. 2, p. 226, des fonctions mesurables sur A, la fonction $F(x,y)$ est presque partout dans A approximativement dérivable par rapport à x. Il en est donc de même presque partout dans E, puisque $|E-A|=0$.

La condition est suffisante. Admettons donc à présent que les dérivées approximatives partielles $F'_{\mathrm{ap}_x}(x,y)$ et $F'_{\mathrm{ap}_y}(x,y)$ existent et soient finies presque partout dans E. En vertu du th. 2, p. 226, ces dérivées sont mesurables sur E, de sorte que, abstraction faite tout au plus d'un ensemble de mesure nulle, E est en vertu du th. de Lusin (Chap. II, § 12, th. 25) composé d'une suite d'ensembles fermés tels que la fonction $F(x,y)$, de même que ses dérivées approximatives partielles, sont continues sur chacun d'eux. Nous pouvons donc nous borner au cas où l'ensemble E est fermé et la fonction $F(x,y)$, ainsi que ses deux dérivées approximatives partielles, sont continues sur E.

Ceci admis, posons pour tout point $(x,y)\in E$

$$\Delta(x,y;\xi,\eta)=F(\xi,\eta)-F(x,y)-F'_{\mathrm{ap}_x}(x,y)\cdot(\xi-x)-F'_{\mathrm{ap}_y}(x,y)\cdot(\eta-y)$$

et pour tout m naturel

$$(5.1)\quad E_m(x,y)=\underset{(\xi,\eta)}{\mathrm{E}}[|\Delta(x,y;\xi,\eta)|\leqslant m^{-1}\cdot(|\xi-x|+|\eta-y|);\ (\xi,\eta)\in E].$$

Désignons de plus, pour tout couple m,n de nombres naturels, par $D_{m,n}$ l'ensemble des points $(x,y)\in E$ qui en sont des points de densité dans les directions des x et des y à la fois et qui satisfont en outre aux deux conditions suivantes:

(5.2) $-n^{-1}<\alpha\leqslant 0\leqslant\beta<n^{-1}$ *entraîne, quels que soient* α *et* β, *les inégalités* $|\underset{\xi}{\mathrm{E}}[(\xi,y)\in E_{2m}(x,y);\ \alpha\leqslant\xi-x\leqslant\beta]|\geqslant(1-m^{-1})(\beta-\alpha)$ *et* $|\underset{\eta}{\mathrm{E}}[(x,\eta)\in E_{2m}(x,y);\ \alpha\leqslant\eta-y\leqslant\beta]|\geqslant(1-m^{-1})(\beta-\alpha)$,

$$(5.3)\quad |F'_{\mathrm{ap}_y}(x',y)-F'_{\mathrm{ap}_y}(x,y)|<\frac{1}{2m}\quad \textit{pour}\ (x',y)\in E\ \textit{et}\ |x'-x|\leqslant\frac{1}{n}.$$

On a alors en vertu du th. 1, p. 226, et de (3.4), Chap. VIII, p. 146, (5.4) $$|E-\sum_n D_{m,n}|=0 \quad \textit{pour tout} \quad m=1,2,\ldots$$

En vertu de la continuité des dérivées partielles de $F(x,y)$ sur E l'ensemble des points de E qui ne remplissent pas la condition (5.3) est fermé. En appliquant le lemme, p. 225, on montre qu'il en est de même de l'ensemble des points de E qui remplissent la condition (5.2). Les ensembles $D_{m,n}$ sont par conséquent mesurables. $D^*_{m,n}$ désignant l'ensemble formé de points de $D_{m,n}$ qui en sont des points de densité dans la direction des x, on a donc $|D_{m,n}-D^*_{m,n}|=0$, d'où selon (5.4)

(5.5) $$|E-\sum_n D^*_{m,n}|=0 \quad \textit{pour tout} \quad m=1,2,\ldots$$

Fixons pour l'instant un couple d'indices m, n et un point arbitraire $(x_0,y_0)\in D^*_{m,n}$. Considérons un rectangle quelconque $I=[x_0',x_0'';y_0',y_0'']$ contenant (x_0,y_0) et de diamètre $\delta(I)<n^{-1}$ et soit

(5.6) $$A=\mathop{\mathrm{E}}_{(\xi,\eta)}[(\xi,y_0)\in D_{m,n}\cdot E_{2m}(x_0,y_0);\ (\xi,\eta)\in E_{2m}(\xi,y_0)].$$

Pour tout point $(\xi,\eta)\in A\cdot I$ on a alors selon (5.1), (5.3)

$$|\varDelta(x_0,y_0;\ \xi,y_0)|\leqslant\frac{|\xi-x_0|}{2m},\qquad |\varDelta(\xi,y_0;\ \xi,\eta)|\leqslant\frac{|\eta-y_0|}{2m}$$

et

$$|F'_{\mathrm{ap}_y}(\xi,y_0)-F'_{\mathrm{ap}_y}(x_0,y_0)|\leqslant\frac{1}{2m},$$

d'où l'inégalité $|\varDelta(x_0,y_0;\xi,\eta)|\leqslant|\varDelta(x_0,y_0;\xi,y_0)|+|\varDelta(\xi,y_0;\xi,\eta)|+$ $+|F'_{\mathrm{ap}_y}(x_0,y_0)-F'_{\mathrm{ap}_y}(\xi,y_0)|\cdot|\eta-y_0|\leqslant m^{-1}(|\xi-x_0|+|\eta-y_0|)$. Il en résulte, en vertu de (5.1) que

(5.7) $$A\cdot I\subset E_m(x_0,y_0).$$

D'autre part, (x_0,y_0) étant un point de densité de l'ensemble $D_{m,n}$ dans la direction des x, la condition (5.2) donne pour les intervalles $[x_0',x_0'']$ contenant x_0 et suffisamment petits

$$|\mathop{\mathrm{E}}_{\xi}[(\xi,y_0)\in D_{m,n}\cdot E_{2m}(x_0,y_0);\ x_0'\leqslant\xi\leqslant x_0'']|>(1-2m^{-1})\cdot(x_0''-x_0').$$

Il en résulte d'après (5.6) et (5.2) que sur chacune des droites $x=\xi$ qui correspondent à l'ensemble des valeurs de ξ de mesure linéaire extérieure plus grande que $(1-2m^{-1})(x_0''-x_0')$

l'ensemble $A\cdot I$ est pour des rectangles $I=[x_0',x_0'';y_0',y_0'']$ aux côtés suffisamment petits de mesure linéaire extérieure plus grande que $(1-2m^{-1})$ $(y_0''-y_0')$. L'ensemble $E_m(x_0,y_0)$ étant évidemment mesurable (même fermé), on a par conséquent selon l'inégalité (5.7) $|I\cdot E_m(x_0,y_0)|\geqslant(1-2m^{-1})(1-2m^{-1})(x_0''-x_0')(y_0''-y_0')\geqslant(1-4m^{-1})|I|$, d'où

(5.8) $$\liminf_{\delta(I)\to 0}\frac{|I\cdot E_m(x_0,y_0)|}{|I|}\geqslant 1-4m^{-1}.$$

Or, (x_0,y_0) étant un point arbitraire de $D^*_{m,n}$, la relation (5.8) se trouve remplie en raison de (5.5) presque partout dans E pour tout $m=1,2,\ldots$ Il en résulte immédiatement que presque tous les points (x_0,y_0) de E sont des points de densité de l'ensemble plan $\mathop{\mathrm{E}}_{(\xi,\eta)}\left[\frac{|\varDelta(x_0,y_0;\xi,\eta)|}{|\xi-x_0|+|\eta-y_0|}<\varepsilon;\ (\xi,\eta)\in E\right]$, quel que soit $\varepsilon>0$. Par conséquent, l'expression $F'_{\mathrm{ap}_x}(x_0,y_0)\cdot(\xi-x_0)+F'_{\mathrm{ap}_y}(x_0,y_0)\cdot(\eta-y_0)$ est en vertu de (3.1), p. 224, la différentielle approximative de $F(x,y)$ dans presque tous les points (x_0,y_0) de E, c. q. f. d.

§ 6. Comme cas particulier du th. 3 on a la généralisation suivante du th. de Lebesgue sur les points de densité.

Théorème 4. *Presque tous les points d'un ensemble plan arbitraire E en sont des points de densité extérieure au sens fort, c. à d. que l'on a pour presque tous les points $z\in E$*

(6.1) $$\lim_{\delta(I)\to 0}\frac{|E\cdot I|}{|I|}=1,$$

où I désigne l'intervalle variable contenant z.

Démonstration. Vu le th. 12, Chap. II, § 6, on peut admettre d'emblée que E soit mesurable. Sa fonction caractéristique $c_E(x,y)$ est donc aussi mesurable et on aperçoit aussitôt qu'elle est approximativement dérivable par rapport à x et à y en chaque point de E qui en est un point de densité dans les directions des x et des y à la fois, donc, en vertu du th. 1, p. 226, presque partout dans E. Par conséquent, la fonction $c_E(x,y)$ est en vertu du th. 3 approximativement dérivable presque partout dans E, ce qui équivaut précisément à la propriété de E qu'il fallait établir.

Le th. de Vitali (Chap. II, § 17, th. 13 et 14) ne se prête pas à une généralisation analogue: on ne peut notamment remplacer dans son énoncé la famille de *carrés* par une famille d'*intervalles*. En donnant une solution au problème de C. Carathéodory [I, p. 304], MM. S. Banach [1] et H. Bohr (cf. C. Carathéodory [II, p. 689 — 692]) ont même démontré que *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille* **I** *d'intervalles, situés dans le carré* [0, 1; 0, 1] *et tels que tout point de ce carré est centre d'un intervalle de* **I** *de diamètre aussi petit que l'on veut et que l'aire de la somme de chaque suite d'intervalles extraite de* **I** *qui n'empiètent pas l'un sur l'autre est inférieure à* ε. Cette indépendance du th. 4 de celui de Vitali paraît d'autant plus intéressante que les démonstrations du théorème sur les points de densité pour les ensembles plans font d'habitude appel plus ou moins explicite, soit au th. de Vitali, soit aux moyens à peu près équivalents à lui (voir p. ex. E. W. Hobson [I], Ch. J. de la Vallée-Poussin [I, p. 71], et W. Sierpiński [10]).

Il est à remarquer encore qu'on ne peut pas remplacer dans la formule (6.1) du th. 4 les intervalles I par des rectangles arbitraires aux côtés *non parallèles* aux axes des coordonnées, même si ces rectangles admettent le point considéré z comme leur centre. C'est une conséquence (comme l'a remarqué M. A. Zygmund) de certaines propriétés intéressantes d'un ensemble fermé construit par M. O. Nikodym [1, p. 167—168].

Parmi les conséquences du th. 4 est à signaler le th. suivant de Denjoy sur la continuité approximative (voir A. Denjoy [5] et W. Sierpiński [3; 9]):

Toute fonction mesurable finie est presque partout approximativement continue.

En effet, si, pour fixer les idées, une fonction $F(x, y)$ est finie et mesurable sur un intervalle I, cet intervalle se laisse représenter d'après le th. de Lusin comme somme d'un ensemble de mesure nulle et d'une suite d'ensembles fermés $\{E_n\}$ tels que la fonction $F(x, y)$ est continue sur chaque E_n. Elle est donc aussi approximativement continue dans tout point de densité au sens fort d'un E_n quelconque, donc presque partout dans I.

Si une fonction mesurable et bornée $F(x, y)$ est approximativement continue dans un point (x_0, y_0), on a évidemment

$$\lim_{\delta(I)\to 0} \frac{1}{|I|} \iint_I F(x, y)\, dx\, dy = F(x_0, y_0) \tag{6.2}$$

où I désigne un intervalle variable contenant le point (x_0, y_0).

En vertu du th. de Denjoy l'égalité (6.2) se présente donc presque partout pour toute fonction mesurable et *bornée* $F(x, y)$. Cependant, on peut montrer sur des exemples que *pour une fonction* $F(x, y)$ *sommable, mais non bornée, l'égalité* (6.2) *peut être partout en défaut.*

Le th. de Denjoy est facilement reversible. On peut montrer, en effet, que *l'ensemble des points où une fonction arbitraire est approximativement continue est mesurable et cette fonction est mesurable sur lui* (voir p. ex. W. Stepanoff [2] et E. Kamke [1]). Il en résulte immédiatement que la nécessité de la condition donnée dans l'énoncé du th. 3, p. 228, peut être établie sans l'hypothèse que l'ensemble E soit mesurable: *toute fonction, mesurable ou non, est approximativement dérivable par rapport à x et à y dans presque tous les points où elle est approximativement différentiable.*

Critère pour l'existence de la différentielle totale.

§ 7. Les théorèmes qui vont suivre peuvent être regardés comme des généralisations des théorèmes de Denjoy, établis au Chap. IX, § 3 et 4. A ce but nous allons établir au préalable le lemme suivant, qui constitue lui-même une généralisation du lemme 1, Chap. IX, § 3.

Lemme. *Si z_0 est un point de densité extérieure d'un ensemble E, il existe pour tout nombre positif $\varepsilon \leqslant 1$ un $\vartheta > 0$ tel que pour tout carré Q*

$$\rho(z_0, Q) \leqslant \vartheta \quad \textit{et} \quad \delta(Q) = \varepsilon \cdot \rho(z_0, Q) \tag{7.1}$$

entraînent $|E \cdot Q| > 0$.

Démonstration. Considérons un $\vartheta > 0$ tel que pour tout carré K contenant le point z_0 l'inégalité $\delta(K) \leqslant 8\vartheta$ entraîne l'inégalité $|E \cdot K| > (1 - 2^{-6}\varepsilon^2) \cdot |K|$. Le nombre ϑ ainsi choisi, soient Q un carré quelconque remplissant les inégalités (7.1) et K_0 le carré de centre z_0 et de diamètre $\delta(K_0) = 4(1 + \varepsilon) \cdot \rho(z_0, Q)$. Il vient $\delta(K_0) \leqslant 8\vartheta$, d'où

$$|E \cdot K_0| > (1 - 2^{-6}\varepsilon^2) \cdot |K_0|. \tag{7.2}$$

D'autre part, on voit facilement en vertu de (7.1) que $Q \subset K_0$ et que $|Q| = 4^{-2}(1 + \varepsilon)^{-2}\varepsilon^2 \cdot |K_0| \geqslant 2^{-6}\varepsilon^2 \cdot |K_0|$, d'où, en vertu de (7.2), $|E \cdot Q| = |E \cdot K_0 \cdot Q| > 0$, c. q. f. d.

§ 8. Etant donnés un point quelconque $z = (x, y)$ et un couple arbitraire θ_1, θ_2 de nombres réels, convenons de désigner par $\hat{z}[\theta_1, \theta_2]$ l'ensemble des points $(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)$ où $r > 0$ et $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Si, en outre, $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, ce que nous admettrons toujours dans la suite, l'ensemble $\hat{z}[\theta_1, \theta_2]$ s'appellera *angle* à sommet z. Enfin, A étant un angle à sommet z_0, les limites supérieure et inférieure d'une fonction $F(z)$, lorsque z tend vers z_0 *en parcourant uniquement les points de l'angle A*, seront désignées respectivement par $\limsup_{z\to z_0} {}_A F(z)$ et $\liminf_{z\to z_0} {}_A F(z)$.

Théorème 5. *Une fonction $F(z)$ étant mesurable sur un ensemble mesurable E et P désignant l'ensemble des points $z \in E$ qui sont des sommets des angles $A_z = \hat{z}[\theta_1(z), \theta_2(z)]$ tels que*

$$(8.1) \qquad \lim_{\zeta \to z} \sup_{A_z} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\rho(\zeta, z)} < +\infty,$$

la fonction $F(z)$ admet dans presque tous les points $z \in P$ une différentielle approximative

$$(8.2) \quad D(z; \zeta) = D(x, y; \xi, \eta) = F'_{\mathrm{ap}_x}(z) \cdot (\xi - x) + F'_{\mathrm{ap}_y}(z) \cdot (\eta - y)$$

où $z = (x, y)$ et $\zeta = (\xi, \eta)$, satisfaisant à l'inégalité

$$(8.3) \qquad \lim_{\zeta \to z} \sup \frac{F(\zeta) - F(z) - D(z; \zeta)}{\rho(z, \zeta)} \leqslant 0.$$

De plus, on a alors presque partout dans P

$$(8.4) \quad F'_{\mathrm{ap}_x}(z) = \overline{F}_x^+(z) = \underline{F}_x^-(z) \quad et \quad F'_{\mathrm{ap}_y}(z) = \overline{F}_y^+(z) = \underline{F}_y^-(z).$$

Démonstration. Nous allons l'établir d'abord pour le cas particulier où

$$(8.5) \qquad A_z = \hat{z}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \textit{dans tout point } z \in P,$$

en montrant au préalable que l'ensemble P est mesurable.

En effet, grâce au th. de Lusin on peut admettre que l'ensemble E est fermé et que la fonction $F(z)$ est continue sur lui. Désignons par P_n l'ensemble des points $z \in E$ tels que

$$(8.6) \quad \rho(z, \zeta) < n^{-1} \textit{ entraîne } F(\zeta) - F(z) \leqslant n \cdot \rho(z, \zeta) \textit{ pour tout } \zeta \in A_z.$$

En vertu du th. 12, Chap. II, § 6, il existe un ensemble mesurable E_n contenant P_n et ayant avec P_n les mêmes points de densité extérieure. Or, la fonction $F(z)$ étant continue sur l'ensemble fermé E, on voit aisément que P_n contient tous ses points de densité extérieure. Il en résulte que $|E_n - P_n| = 0$, d'où la mesurabilité de P_n et par conséquent celle de l'ensemble $P = \sum_n P_n$.

Comme fonction mesurable sur l'ensemble mesurable P, la fonction $F(x, y)$ est pour presque tous les y mesurable en x sur l'ensemble linéaire $P_x^{[y]}$.

D'autre part selon (8.5) et (8.1), on a partout dans P $\overline{F}_x^+(x, y) < +\infty$. En vertu du th. 21, Chap. IX, § 12, $F(x, y)$ est donc pour tout y une fonction (VBG) en x sur l'ensemble $P_x^{[y]}$.

Il en résulte en vertu du th. 3, Chap. VIII, § 6, que pour presque tous les points y la fonction $F(x, y)$ est approximativement dérivable par rapport à x presque partout dans $P_x^{[y]}$. Les dérivés approximatifs extrêmes de $F(x, y)$ étant en vertu du th. 2, p. 226, des fonctions mesurables sur P, la fonction $F(x, y)$ est donc approximativement dérivable par rapport à x presque partout dans P. Par raison de symétrie, elle l'est également par rapport à y. En vertu du th. 3, p. 228, l'existence presque partout dans P de la différentielle approximative (8.2) de $F(x, y)$ se trouve ainsi établie.

Pour montrer que cette différentielle satisfait presque partout dans P à la condition (8.3), fixons pour l'instant une valeur de n et soit $\varepsilon < 1$ un nombre positif quelconque. Soit $z_0 = (x_0, y_0)$ un point de densité de P_n et dans lequel l'expression (8.2) est une différentielle approximative de $F(z)$. Le point z_0 est en vertu de (3.1), p. 224, un point de densité de l'ensemble

$$(8.7) \quad H_\varepsilon = \underset{z}{E}[|F(z) - F(z_0) - D(z_0; z)| < \varepsilon \cdot \rho(z_0, z);\ z \in P_n];$$

selon le lemme qui précède il existe donc un nombre positif $\vartheta < n^{-1}$ tel que tout carré Q assujetti aux conditions $\rho(z_0, Q) \leqslant \vartheta$ et $\delta(Q) = \varepsilon \cdot \rho(z_0, Q)$ donne lieu à l'inégalité $|H_\varepsilon \cdot Q| > 0$. On en déduit facilement qu'il existe pour tout point ζ tel que $\rho(z_0, \zeta) \leqslant \vartheta$ un point $z \in H_\varepsilon \cdot \overset{\wedge}{\zeta}\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que

$$(8.8) \qquad \rho(z, \zeta) \leqslant \varepsilon \cdot \rho(z_0, \zeta) \leqslant \varepsilon \cdot \vartheta < n^{-1}.$$

Or, la relation $z \in \overset{\wedge}{\zeta}\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ étant équivalente à $\zeta \in \hat{z}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = A_z$, on a en vertu de (8.6) et (8.8)

$$(8.9) \qquad F(\zeta) - F(z) \leqslant n \cdot \rho(z, \zeta) \leqslant n\, \varepsilon \cdot \rho(z_0, \zeta).$$

D'autre part, comme $z \in H_\varepsilon$, on tire de (8.7) et (8.8)

$$(8.10)\quad F(z)-F(z_0)-D(z_0;z) \leqslant \varepsilon\cdot\rho(z_0,z) \leqslant \varepsilon\cdot[\rho(z_0,\zeta)+\rho(\zeta,z)] \leqslant 2\varepsilon\cdot\rho(z_0,\zeta).$$

Enfin, $D(z_0;z)-D(z_0;\zeta) \leqslant \rho(z,\zeta)\cdot[|F'_{\mathrm{ap}_x}(z_0)|+|F'_{\mathrm{ap}_y}(z_0)|] \leqslant$ $\leqslant \varepsilon\cdot\rho(z_0,\zeta)\cdot[|F'_{\mathrm{ap}_x}(z_0)|+|F'_{\mathrm{ap}_y}(z_0)|]$. En ajoutant membre à membre cette inégalité aux inégalités (8.9) et (8.10), on obtient pour tout ζ tel que $\rho(z_0,\zeta) \leqslant \vartheta$ l'inégalité $F(\zeta)-F(z_0)-D(z_0;\zeta) \leqslant$ $\leqslant \varepsilon\cdot[2+n+|F'_{\mathrm{ap}_x}(z_0)|+|F'_{\mathrm{ap}_y}(z_0)|]\cdot\rho(z_0,\zeta)$, qui entraîne la formule (8.3) dans le point z_0, donc presque partout dans chacun des ensembles P_n et par conséquent presque partout dans leur somme P.

Restent à établir les égalités (8.4). Soit donc encore (x,y) un point quelconque de P dans lequel l'expression (8.2) est une différentielle approximative de $F(x,y)$ et remplit l'inégalité (8.3). En posant alors $\zeta=(\xi,y)$ dans (8.3), on obtient donc l'inégalité $\underline{F}_x^-(x,y) \geqslant F'_{\mathrm{ap}_x}(x,y) \geqslant \overline{F}_x^+(x,y)$. L'inégalité inverse étant évidente, on parvient à la première des égalités (8.4). On en obtient d'une façon analogue la seconde, de sorte que les deux égalités (8.4) se trouvent remplies presque partout dans P.

Ceci établi, passons au cas général. Désignons pour tout couple d'entiers positifs m, n par $P_{m,n}$ l'ensemble de tous les points $z \in P$ tels que $\hat{z}\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right] \subset A_z$. On a alors $P=\sum_{m,n} P_{m,n}$. Or, l'ensemble $P_{m,n}$ se laissant toujours transformer linéairement de façon que les directions $\theta=\frac{m}{n}$ et $\theta=\frac{m+1}{n}$ se trouvent transformées en $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$ respectivement, on conclut de ce qui vient d'être établi dans l'hypothèse supplémentaire (8.5) que la fonction $F(z)$ remplit la condition $\limsup_{\zeta\to z} \frac{F(\zeta)-F(z)}{\rho(z,\zeta)} < +\infty$ presque partout dans chacun des ensembles $P_{m,n}$ et par conséquent presque partout dans leur somme P. Le cas général se trouve ainsi ramené au précédent, ce qui achève la démonstration.

§ 9. Le th. 5 permet d'établir des conditions générales pour l'existence de la différentielle totale d'une fonction. Or, pour

nous affranchir de l'hypothèse concernant la mesurabilité de cette fonction, qui est essentielle dans le th. 5, nous allons démontrer préalablement le théorème suivant.

Théorème 6. *Si tout point z d'un ensemble E est sommet d'un angle $A_z=\hat{z}[\theta_1(z), \theta_2(z)]$ tel que $\limsup_{\zeta\to z}{}_{A_z} F(\zeta) \leqslant F(z)$, la fonction $F(z)$ est semicontinue supérieurement presque partout dans E.*

Démonstration. Nous allons nous borner au cas où la fonction $F(z)$ est finie dans E, le passage au cas où elle y prend aussi des valeurs infinies n'exigeant qu'une modification légère, d'ailleurs évidente, du raisonnement.

Admettons d'abord que

$$(9.1)\qquad A_z=\hat{z}\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \textit{pour tout } z\in E.$$

Etant donné un nombre positif quelconque $\varepsilon<1$, désignons pour tout m naturel par E_m l'ensemble des points z de E tels que

$$(9.2)\quad \zeta\in A_z=\hat{z}\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \textit{ et } \rho(\zeta,z)<m^{-1} \textit{ entraînent } F(\zeta)\leqslant F(z)+\varepsilon$$

et posons

$$(9.3)\quad E_{m,n}=\mathop{\mathrm{E}}_{z}[n\varepsilon\leqslant F(z)\leqslant(n+1)\varepsilon;\ z\in E_n] \textit{ pour } n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

On a donc $E=\sum_{m=1}^{\infty} E_m=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{m,n}$. Fixons pour l'instant un couple d'indices m, n et un point z_0 de $E_{m,n}$ qui soit un point de densité extérieure de $E_{m,n}$. En vertu du lemme, p. 233, il existe un nombre positif $\vartheta<m^{-1}$ tel que tout carré Q assujetti aux conditions $\rho(z_0,Q)\leqslant\vartheta$ et $\delta(Q)=\rho(z_0,Q)$ donne lieu à l'inégalité $|E_{m,n}\cdot Q|>0$. A chaque point ζ tel que $\rho(z_0,\zeta)\leqslant\vartheta<m^{-1}$ on peut donc faire correspondre un point $z\in E_{m,n}\cdot\hat{\zeta}\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ tel que l'on ait $\rho(\zeta,z)\leqslant\rho(z_0,\zeta)<m^{-1}$. On a alors d'une part $z\in E_m$ et $\zeta\in\hat{z}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, d'où, en vertu de (9.2), $F(\zeta)\leqslant F(z)+\varepsilon$. D'autre part,

en vertu de (9.3), on a $|F(z) - F(z_0)| \leqslant \varepsilon$, puisque les deux points z_0 et z appartiennent à $E_{m,n}$. On obtient donc finalement $F(\zeta) \leqslant F(z_0) + 2\varepsilon$ pour tout point ζ tel que $\rho(z_0, \zeta) \leqslant \vartheta$.

Ainsi, dans presque tous les points z_0 de chaque $E_{m,n}$, donc presque partout dans E, on a $\limsup_{\zeta \to z_0} F(\zeta) \leqslant F(z_0) + 2\varepsilon$. Il en résulte, ε étant arbitraire, que la fonction $F(z)$ est semicontinue supérieurement presque partout dans E.

Ceci établi, nous pouvons éliminer facilement, tout comme dans la démonstration du th. 5, l'hypothèse supplémentaire (9.1). Désignons à ce but pour tout couple d'indices m, n par $P_{m,n}$ l'ensemble des points $z \in E$ tels que $\hat{z}\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right] \subset A_z$. On a alors $E = \sum_{m,n} P_{m,n}$. Or, en soumettant l'ensemble $P_{m,n}$ à une transformation linéaire telle que les directions $\theta = \frac{m}{n}$ et $\theta = \frac{m+1}{n}$ se trouvent transformées respectivement en $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on conclut du résultat obtenu dans l'hypothèse (9.1) que la fonction $F(z)$ est semicontinue supérieurement presque partout dans chacun des ensembles $P_{m,n}$, donc aussi presque partout dans leur somme E c. q. f. d.

Théorème 7 (de Haslam-Jones). *Si pour une fonction finie $F(z)$ tout point z d'un ensemble E est sommet de deux angles A'_z et A''_z tels que l'on a respectivement*

$$\limsup_{\zeta \to z} {}_{A'_z} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\rho(\zeta, z)} < +\infty \quad \textit{et} \quad \liminf_{\zeta \to z} {}_{A''_z} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\rho(\zeta, z)} > -\infty,$$

la fonction $F(z)$ est totalement différentiable presque partout dans E.

Démonstration. En vertu du th. 6 la fonction $F(z)$ est semicontinue à la fois supérieurement et inférieurement, donc continue, presque partout dans E. En désignant par C l'ensemble des points du plan où la fonction $F(z)$ est continue, il vient par conséquent $|E - C| = 0$.

D'autre part, l'ensemble C étant en vertu du th. 21, Chap. II, § 10, mesurable et la fonction $F(z)$ continue, donc mesurable sur lui, nous concluons du th. 5 que la fonction $F(z)$ admet presque partout dans $C \cdot E$, donc aussi presque partout dans E, une différentielle approximative $D(z;\zeta)$ qui y satisfait à la condition

$$\limsup_{\zeta \to z} \frac{F(\zeta) - F(z) - D(z;\zeta)}{\rho(z, \zeta)} \leqslant 0 \leqslant \liminf_{\zeta \to z} \frac{F(\zeta) - F(z) - D(z;\zeta)}{\rho(z, \zeta)}.$$

On a donc $\lim_{\zeta \to z} \frac{F(\zeta) - F(z) - D(z;\zeta)}{\rho(z, \zeta)} = 0$. Ainsi $D(z;\zeta)$ est pour presque tous les points $z \in E$ la différentielle totale de $F(z)$, c. q. f. d.

C'est à M. H. Rademacher [2] que nous devons une première condition générale, suffisante pour qu'une fonction *continue* soit presque partout totalement différentiable. M. W. Stepanoff [1; 3] en a éliminé une hypothèse superflue et étendu ce résultat aux fonctions *mesurables* arbitraires. Il a obtenu ainsi une condition plus simple, à la fois nécessaire et suffisante: *pour qu'une fonction mesurable $F(z)$ admette presque partout dans un ensemble mesurable E une différentielle totale, il faut et il suffit que l'on ait $\limsup_{\zeta \to z} \frac{|F(\zeta) - F(z)|}{\rho(z, \zeta)} < +\infty$ dans presque tous les points $z \in E$.* Certains détails de sa démonstration, notamment ceux qui concernent la mesurabilité des dérivés partiels de Dini de la fonction $F(z)$, ont été sujets aux critiques (cf. p. ex. J. C. Burkill et U. S. Haslam-Jones [1]). Une démonstration plus complète, en même temps qu'une généralisation intéressante de ce théorème a été publiée récemment par M. U. S. Haslam-Jones [1].

C'est cette généralisation qui, dans une forme légèrement précisée, est donnée ici comme th. 5, p. 234, et th. 7, p. 238. Ces deux théorèmes peuvent être considérés, comme nous l'avons signalé p. 233, (du moins en ce qui concerne les fonctions mesurables) comme une généralisation sur les fonctions de plusieurs variables des relations entre les nombres dérivés d'une fonction, établies par M. Denjoy pour les fonctions d'une seule variable (voir plus haut, Chap. IX, § 3 et § 4). En posant, en effet, $F(x, y) = F(x)$, on obtient du th. 5, p. 234, les th. 3, 6 et 7 du Chap. IX et du th. 7, p. 238, les th. 4 et 5 du Chap. IX. Le th. 3, Chap. IX, § 3, déduit de la sorte, ne serait toutefois valable que pour des fonctions mesurables, tandis que sa démonstration directe, donnée p. 171, s'applique à des fonctions tout à fait arbitraires.

Fonctions complexes de variable complexe. Fonctions holomorphes.

§ 10. On appelle *fonction complexe de variable complexe* toute fonction de la forme $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ où $u(x,y)$ et $v(x,y)$, dites respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire* de la fonction $f(z)$, sont des fonctions réelles du point (x,y) et où $z = x + iy$.

La fonction $f(z)$ s'appelle *continue* dans un point, lorsque ses deux parties, la réelle et l'imaginaire, sont continues en ce point.

On appelle *fonction complexe additive de figure élémentaire* toute fonction de la forme $F(R) = U(R) + iV(R)$ où $U(R)$ et $V(R)$, dites respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire* de $F(R)$, sont des fonctions réelles additives de la figure R.

La fonction $F(R)$ s'appelle *continue*, lorsque les deux fonctions $U(R)$ et $V(R)$ sont continues (cf. Chap. I, § 7). Elle est dite *dérivable* dans un point z_0, lorsque les deux fonctions $U(R)$ et $V(R)$ sont dérivables dans ce point (cf. Chap. III, § 1); on pose alors $F'(z_0) = U'(z_0) + iV'(z_0)$. Enfin, si les deux dérivées, la supérieure et l'inférieure, de chacune des fonctions U et V sont finies dans un point, on dit que la fonction $F(R)$ est dans ce point *à nombres dérivés finis*.

§ 11. Etant donnée une fonction réelle $w(x, y)$ continue dans un rectangle $I = [a_1, b_1; a_2, b_2]$, nous poserons

$$H_1(w;I) = \int_{a_1}^{b_1} [w(x,b_2) - w(x,a_2)]\,dx \quad et \quad H_2(w;I) = \int_{a_2}^{b_2} [w(b_1,y) - w(a_1,y)]\,dy.$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est une fonction complexe, continue dans I, nous poserons

$$H(f; I) = -[H_1(u; I) + H_2(v; I)] + i\,[H_2(u; I) - H_1(v; I)]$$

et nous appellerons $H(f; I)$ *intégrale curviligne de la fonction f suivant le contour du rectangle I.*

Une fonction $f(z)$ s'appelle *holomorphe* dans un ensemble ouvert G, si elle y est continue et si son intégrale suivant le contour de tout rectangle I contenu dans G est nulle.

L'équivalence de cette définition de l'holomorphie avec celles que l'on adopte d'habitude dans la Théorie des fonctions résulte du théorème bien connu de Morera [1].

§ 12. Le théorème suivant, dû à M. H. Looman [2], est une conséquence immédiate du th. 16, Chap. VII, § 7.

Théoréme 8. *Pour qu'une fonction complexe $f(z)$, continue sur un ensemble ouvert G, soit holomorphe dans G, il faut et il suffit que son intégrale curviligne $H(f; I)$, considérée comme une fonction de l'intervalle $I \subset G$, soit à peu près*[1] *partout dans G à nombres dérivés finis et admette presque partout dans G une dérivée déterminée égale à 0.*

Le th. 8, qui peut être regardé comme une généralisation du théorème de Morera, se démontre par l'application directe à la fonction $H(I) = H(f; I)$ du théorème général sur les fonctions additives continues. Cependant non seulement la fonction $H(I)$ est continue, mais pour tout rectangle $I_0 \subset G$ on a en outre, comme il est aisé d'apercevoir, $\lim\limits_{\delta(I)\to 0} \frac{|H(I)|}{\delta(I)} = 0$ où $I \subset I_0$. C'est pourquoi il suffirait de supposer dans le th. 8 *que $H(I)$ admette une dérivée déterminée nulle presque partout et soit à nombres dérivés finis partout, excepté tout au plus une infinité dénombrable d'ensembles de mesure linéaire finie* (cf. A. S. Besicovitch [3], L. Tonelli [9], S. Saks et A. Zygmund [2]).

***§ 13.** Comme l'a observé M. J. Wolff [1], on peut remplacer dans le th. 8 l'hypothèse que *la dérivée de $H(I)$ s'annule presque partout dans G* par l'hypothèse que *dans presque tous les points $z \in G$ on a $\liminf\limits_{|Q|\to 0} \frac{|H(Q)|}{|Q|} = 0$, où Q désigne un carré quelconque contenant z.*

Cette généralisation du th. 8 peut être rattachée aux généralisations analogues des théorèmes établis dans le Chap. VII. Notamment, il est facile de voir que le théorème de Wolff est une conséquence immédiate de la généralisation suivante du th. 1, Chap. VII, § 2:

$F(R)$ étant une fonction additive et continue de figure, si l'inégalité $\overline{F}(z) < +\infty$ se présente à peu près partout et l'inégalité $\underline{F}(z) \leqslant 0$ presque partout, la fonction $F(R)$ est monotone non positive.

Pour démontrer cet énoncé, considérons l'ensemble G des points au voisinage desquels la fonction $F(R)$ est monotone non positive. L'ensemble G est donc ouvert et il suffit de montrer que l'ensemble fermé $E = CG$ est vide.

Supposons, par contre, que $E \neq 0$ et désignons pour tout n naturel par E_n l'ensemble des points z tels que tout carré Q de diamètre $\delta(Q) \leqslant n^{-1}$ contenant z satisfait à l'inégalité $F(Q) \leqslant n \cdot |Q|$. On a alors $E \subset \sum\limits_n E_n + D$ où D est un ensemble au plus dénom-

[1] voir la définition, p. 126.

brable et, chacun des ensembles E_n étant, comme il est aisé de voir, fermé, E contient en vertu du th. de Baire (Chap. VIII, § 2) une portion qui soit se réduit à un point isolé de E, soit est contenue entièrement dans un E_n. La première alternative étant impossible par suite de la continuité de la fonction $F(R)$, il existe un intervalle I contenant à l'intérieur des points de E et tel que l'on ait $E \cdot I = E_N \cdot I$ pour un certain N.

Or, la fonction $F(R)$ étant évidemment non négative pour toute figure $R \subset I - E \subset G$, on a $\overline{F}(z) \leqslant 0$ pour tout $z \in I - E$. D'autre part, on a $\overline{F}(z) \leqslant N$ pour tout $z \in E_N \cdot I = E \cdot I$. La fonction $F(R) - N \cdot |R|$ est donc selon le th. 1, Chap. VII, § 2, monotone non positive dans I et, comme telle, presque partout dérivable dans I; on a par conséquent $F'(z) = \underline{F}(z) \leqslant 0$ presque partout dans I et, par hypothèse, $\overline{F}(z) < +\infty$ à peu près partout dans I. Il en résulte en vertu du th. 13, Chap. VII, § 7, que $F(R) \leqslant 0$ pour toute figure $R \subset I$, ce qui est cependant impossible, l'intérieur de l'intervalle I contenant des points de E.

Il est à remarquer que ce théorème permet de généraliser à leur tour d'autres théorèmes établis au Chap. VII. En le substituant p. ex. au th. 1 dans la démonstration du th. 13, Chap. VII, § 7, on obtient la généralisation suivante des th. 13 et 15 (ibidem):

Etant donnée dans une figure R_0 une fonction additive et continue $F(R)$ qui remplit à peu près partout les conditions $\overline{F}(z) < +\infty$ et $\underline{F}(z) \leqslant g(z)$ où $g(z)$ est une fonction intégrable $(\mathcal{P})$ sur R_0, on a $F(R_0) \leqslant (\mathcal{P}) \int\limits_{R_0} g(z)\, dz$.

On en déduit la généralisation suivante des th. 14 et 16, Chap. VII, § 7

Etant donnée dans une figure R_0 une fonction additive et continue $F(R)$ qui remplit à peu près partout les conditions $-\infty < \underline{F}(z) \leqslant g(z) \leqslant \overline{F}(z) < +\infty$ où $g(z)$ est une fonction intégrable $(\mathcal{P})$ sur la figure R_0, la fonction $F(R)$ est une intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$. En particulier, lorsque la fonction $g(z)$ est intégrable $(\mathcal{L})$, la fonction $F(R)$ est absolument continue.

Théorème de Looman-Menchoff.

§ 14. Selon le théorème classique de Cauchy, *pour qu'une fonction continue de variable complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe sur un ensemble ouvert G, il faut et il suffit que les dérivées partielles u'_x, u'_y, v'_x et v'_y existent partout dans G, qu'elles y soient continues et qu'elles y remplissent partout les équations de Cauchy:* $u'_x = v'_y$ et $u'_y = -v'_x$.

Une série de recherches (voir p. ex. E. Goursat [1], D. Pompeiù [1], P. Montel [1], L. Lichtenstein [1; 2]) a été consacrée à la réduction de ces conditions, en particulier à celle de la continuité des dérivées partielles, mais c'est à peine récemment que M. H. Looman [2] et M. D. Menchoff ont réussi de supprimer complètement cette condition, sans la remplacer par aucune autre. Il est remarquable qu'un problème classique d'aspect si élémentaire n'ait été résolu que grâce à l'application tout à fait essentielle des méthodes de la théorie des fonctions réelles.

Le raisonnement de M. Looman, bien que basé en principe sur une idée juste, contenait une lacune (cf. à ce sujet p. ex. J. Ridder [2, p. 154]), qui n'a été comblée en définitive que par M. Menchoff [1]). D'autre part, il est à noter que le résultat établi finalement par MM. Looman et Menchoff a été signalé sans démonstration par M. Montel [2] déjà en 1913, même dans la forme plus générale suivante: *la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $u\,dx + v\,dy$, dans laquelle u et v sont des fonctions continues du point (x, y) dans un domaine D où elle admettent les dérivées partielles finies u'_x et v'_y, soit une différentielle totale, est que la relation $u'_x = v'_y$ soit vérifiée presque partout dans D.* Cependant les démonstrations de ce théorème ne sont pas connues que dans des hypothèses bien plus restrictives (cf. L. Heffter [1], Ch. J. de la Vallée-Poussin [2] et J. Ridder [2]).

Or, il est à observer que les méthodes de Looman-Menchoff fournissent aussi une démonstration du théorème de Montel dans l'hypothèse supplémentaire que non seulement les dérivées partielles u'_x et v'_y, mais aussi v'_x et u'_y existent et sont à peu près partout finies (ou, plus généralement, que *tous* les nombres dérivés partiels des fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont à peu près partout finis). On doit cette remarque à M-lle L. Lawrence.

§ 15. Nous allons baser la démonstration du th. de Looman-Menchoff sur l'évaluation suivante.

Lemme. *Soient $w(x, y)$ une fonction réelle continue dans un carré Q et F un sous-ensemble fermé de Q tel que si pour un point $(x, y) \in F$ les points $(x+h, y)$ et $(x, y+k)$ appartiennent à Q, on a*

$$(15.1)\quad |w(x+h, y) - w(x, y)| \leqslant M|h| \quad \text{et} \quad |w(x, y+k) - w(x, y)| \leqslant M|k|,$$

où M est une constante. Soit enfin $J = [a_1, b_1;\, a_2, b_2]$ le plus petit

[1]) M. Menchoff n'a pas publié sa démonstration, mais a bien voulu la communiquer à l'auteur de ce livre. Les méthodes de cette démonstration ont été considérablement développées et approfondies dans les mémoires ultérieurs de M. Menchoff [1; 2]. On y trouve des conditions très générales pour qu'une transformation biunivoque et bicontinue soit une transformation conforme.

rectangle (qui peut dégénérer en un segment ou en un point) contenant F.

Dans ces hypothèses, on a

$$\left.\begin{aligned}&\left|\int_{a_1}^{b_1}[w(x,b_2)-w(x,a_2)]\,dx-\iint_F w'_y(x,y)\,dx\,dy\right|^{1)}\\ &\left|\int_{a_2}^{b_2}[w(b_1,y)-w(a_1,y)]\,dy-\iint_F w'_x(x,y)\,dx\,dy\right|\end{aligned}\right\}\leqslant 5M\cdot|Q-F|. \tag{15.2}$$

Démonstration. Soit (x', a_2) et (x'', b_2) deux points de F situés respectivement sur les côtés $y=a_2$ et $y=b_2$ du rectangle J. En appliquant les formules (15.1) à chacun des sommandes du membre droit de l'inégalité $|w(\xi,a_2)-w(\xi,b_2)|\leqslant|w(\xi,a_2)-w(x',a_2)|+|w(x',a_2)-w(x',b_2)|+|w(x',b_2)-w(x'',b_2)|+|w(x'',b_2)-w(\xi,b_2)|$ et en désignant par l la longueur du côté de Q, on obtient

$$|w(\xi,a_2)-w(\xi,b_2)|\leqslant 4Ml \quad \textit{pour tout } \xi\in[a_1,b_1]. \tag{15.3}$$

Soit A l'ensemble des valeurs ξ de l'intervalle $[a_1, b_1]$ telles que la droite $x=\xi$ rencontre des points de F. Pour ces valeurs de ξ l'inégalité (15.3) peut être complétée comme suit.

Désignons par $w_{(\xi)}(y)$ la fonction de y, identique à $w(\xi,y)$ dans l'ensemble formé de $F_y^{[\xi]}$ et des points a_2 et b_2, et linéaire dans les intervalles contigus à cet ensemble; soit, en outre, $l_{(\xi)}$ la somme des longueurs de ces intervalles. La fonction $w_{(\xi)}(y)$ étant absolument continue (remplissant même, en raison de (15.1), la condition de Lipschitz), on a

$$w(\xi,b_2)-w(\xi,a_2)=w_{(\xi)}(b_2)-w_{(\xi)}(a_2)=\int_{a_2}^{b_2}w'_{(\xi)}(y)\,dy. \tag{15.4}$$

Or, pour tout $\xi\in A$ on a $|w'_{(\xi)}(y)|\leqslant M$ presque partout dans $[a_2, b_2]$, et en particulier $w'_{(\xi)}(y)=w'_y(\xi,y)$ [2] presque partout dans $F_y^{[\xi]}$ pour presque tous les $\xi\in A$, d'où selon (15.4)

[1] En vertu de (15.1) les dérivées partielles $w'_y(x,y)$ et $w'_x(x,y)$ existent presque partout dans E, conformément au th. de Denjoy (Chap. IX, § 3, th. 4) ou bien aux th. 18, Chap. IX, § 10 et th. 10, Chap. VIII, § 13.

[2] Pour l'existence de ces deux dérivées voir [1].

$$\left|w(\xi,b_2)-w(\xi,a_2)-\int_{F_y^{[\xi]}}w'_y(\xi,y)\,dy\right|\leqslant M\,l_{(\xi)}$$

ce qui donne par l'intégration par rapport à ξ sur l'ensemble A

$$\begin{aligned}&\left|\int_A[w(\xi,b_2)-w(\xi,a_2)]\,d\xi-\iint_F w'_y(\xi,y)\,d\xi\,dy\right|\leqslant\\ &\leqslant M\cdot\int_A l^{(\xi)}\,d\xi\leqslant M\cdot|J-F|\leqslant M\cdot|Q-F|.\end{aligned} \tag{15.5}$$

D'autre part, l'intégration de (15.3) par rapport à ξ sur l'ensemble $B=[a_1,b_1]-A$ donne l'inégalité $\left|\int_B[w(\xi,b_2)-w(\xi,a_2)]\,d\xi\right|\leqslant\leqslant 4Ml\cdot|B|\leqslant 4M\cdot|Q-F|$, qui, ajoutée à (15.5), fournit la première des formules (15.2). La deuxième se déduit d'une façon tout à fait symétrique.

Théorème 9 (de Looman-Menchoff). *Si les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$, continues dans un ensemble ouvert G, admettent tous les nombres dérivés partiels finis à peu près partout dans G et satisfont aux équations $u'_x=v'_y$ et $u'_y=-v'_x$ presque partout dans G, la fonction $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, où $z=x+iy$, est holomorphe dans G.*

Démonstration. Admettons, pour simplifier, que G soit le plan entier et désignons par E l'ensemble des points au voisinage desquels la fonction $f(z)$ est holomorphe. Il s'agit de prouver que l'ensemble $F=CE$ est vide.

Supposons par contre que $F\neq 0$. L'ensemble E étant ouvert par définition, son complémentaire F est un ensemble fermé (et même parfait, c. à d. sans points isolés). Désignons pour tout n naturel par F_n l'ensemble des points $z=(x,y)$ dans lesquels aucune des valeurs absolues

$$|u(x+h,y)-u(x,y)|,\qquad |u(x,y+h)-u(x,y)|,$$
$$|v(x+h,y)-v(x,y)|,\qquad |v(x,y+h)-v(x,y)|$$

ne dépasse $|nh|$ pour $|h|\leqslant n^{-1}$. Par suite de la continuité des fonctions u et v, chacun des ensembles F_n est fermé. Les dérivés partiels de $u(x,y)$ et de $v(x,y)$ étant à peu près partout finis, on a $G=\sum_n F_n+D$, où D est un ensemble au plus dénombrable. En vertu du th. de Baire (Chap. VIII, § 2) l'ensemble F contient donc une portion qui est soit composée d'un seul point isolé, soit contenue entièrement dans un F_n. La première alternative étant impossible, puisque l'ensemble F ne contient pas de points isolés, il existe un intervalle I_0 contenant dans son intérieur des points de F et tel que l'on a $F \cdot I_0 \subset F_N$ pour un certain N. Or, soit Q un carré de diamètre $\delta(Q) \leqslant N^{-1}$ situé dans l'intérieur de I_0 et contenant un point $z_0 = (x_0, y_0)$ de F. En désignant par J_0 le plus petit rectangle qui contient l'ensemble $F \cdot Q \subset F_N$, on conclut donc en vertu du lemme qui précède que

$$\left| H_1(u; J_0) - \iint\limits_{F.Q} u'_y \, dx\, dy \right| \leqslant 5N \cdot |Q - F|$$

et

$$\left| H_2(v; J_0) = \iint\limits_{F.Q} v'_x \, dx\, dy \right| \leqslant 5N \cdot |Q - F|,$$

ce qui donne par addition membre à membre, la condition $u'_y + v'_x = 0$ étant remplie par hypothèse presque partout dans l'ensemble F, $|H_1(u; J_0) + H_2(v; J_0)| \leqslant 10\, N \cdot |Q - F|$. D'une façon analogue on a $|H_1(v; J_0) - H_2(u; J_0)| \leqslant 10\, N \cdot |Q - F|$, d'où finalement

$$|H(f; J_0)| \leqslant 20\, N \cdot |Q - F|. \tag{15.6}$$

La fonction d'intervalle $H(I) = H(f; I)$ est évidemment additive et devient par extension une fonction additive de figure. Comme la figure $Q \ominus J_0$ ne contient dans son intérieur aucun point de F, la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de cette figure, d'où, par continuité, $H(Q \ominus J_0) = 0$ et par conséquent, selon (15.6), $|H(Q)| \leqslant 20\, N \cdot |Q - F|$. Il en résulte aussitôt que la fonction $H(I)$ est à nombres dérivés finis dans chaque point $z_0 \in F$ situé à l'intérieur de I_0 et que, lorsque z_0 est en particulier un point de densité de F, la fonction $H(I)$ admet dans z_0 une dérivée déterminée égale à 0.

D'autre part, pour tout carré Q disjoint de F on a $H(Q) = 0$, de sorte qu'en dehors de F la dérivée de la fonction $H(I)$ s'annule identiquement. En vertu du th. 8, p. 240, la fonction $f(z)$ serait par conséquent holomorphe à l'intérieur de I_0, ce qui est cependant impossible, l'intérieur de cet intervalle contenant des points de F.