CHAPITRE X.

Intégrales de Denjoy.

Préliminaires.

§ 1. Nous allons baser l'étude des propriétés fondamentales des intégrales de Denjoy sur leur définition dite *descriptive*, analogue à la définition descriptive de l'intégrale $(\mathcal{L})$, donnée au Chap. IV, § 1.

Partis de cette définition des intégrales de Denjoy, nous parviendrons à une autre définition équivalente, contenue implicitement dans un des théorèmes (voir plus loin th. 8, p. 209), et qui correspond exactement à la définition *constructive* de Denjoy, sans nécessiter toutefois l'introduction des nombres transfinis. On trouvera une application de ce mode de caractériser les intégrales de Denjoy dans la démonstration du théorème de Hake, qui établit, conjointement avec le théorème de Alexandroff-Looman l'équivalence entre l'intégrale de Denjoy au sens restreint et celle de Perron. Ce n'est qu'à la fin du chapitre que nous donnerons la définition constructive des intégrales de Denjoy, basée explicitement sur l'induction transfinie.

Parmi les nombreuses publications consacrées à la définition des intégrales de Denjoy sont à mentionner (à côté de celles qui ont été citées dans le Chap. VIII) les ouvrages de N. Lusin [I], W. H. Young [5], A. Kolmogoroff [2], H. Lebesgue [7], P. Romanowski [1], R. L. Jeffery [2]; cf. aussi les traités de E. W. Hobson [I], E. Kamke [I] et H. Lebesgue [II] et les articles de P. Nalli [I], T. H. Hildebrandt [1] et A. Rosenthal [I].

Propriétés fondamentales des intégrales de Denjoy.

§ 2. Une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I=[a,b]$ sera dite *intégrable* $(\mathcal{D})$ sur I, s'il existe une fonction $F(x)$ qui est (ACG) sur I et qui satisfait à l'inégalité $f(x)=F'_{\mathrm{ap}}(x)$ presque partout dans I.

La fonction $F(x)$ s'appelle alors *intégrale indéfinie* $(\mathcal{D})$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I et la différence $F(b) - F(a)$ est dite *intégrale définie* $(\mathcal{D})$ ou *intégrale* $(\mathcal{D})$ tout court de $f(x)$ sur I; nous la désignerons par $(\mathcal{D})\int_a^b f(x)\,dx$ ou par $(\mathcal{D})\int_I f(x)\,dx$.

L'intégrale $(\mathcal{D})$ est connue aussi sous le nom de *l'intégrale de Denjoy au sens large* ou de *l'intégrale de Denjoy-Khintchine-Young*. Elle est à distinguer de l'autre intégrale de Denjoy qui s'appelle *intégrale de Denjoy au sens restreint* ou *intégrale de Denjoy-Perron* et qui sera désignée par $(\mathcal{D}^*)$. Sa définition s'obtient de celle de l'intégrale $(\mathcal{D})$, en y remplaçant la fonction (ACG) par la fonction (ACG^*) et la dérivée approximative $F'_{\mathrm{ap}}(x)$ par la dérivée ordinaire $F'(x)$.

M. Denjoy lui-même appelle son procédé d'intégration *totalisation* et ses intégrales les *totales*. En particulier, il appelle *totale complète* l'intégrale $(\mathcal{D}^*)$.

On conclut des définitions précédentes en vertu du corollaire p. 155, Chap. VIII, que les intégrales indéfinies $(\mathcal{D})$ d'une fonction $f(x)$ ou de deux fonctions équivalentes ne peuvent différer l'une de l'autre que par une constante, de sorte que l'intégrale définie $(\mathcal{D})$ est déterminée d'une façon univoque par la fonction à intégrer et ne change de valeur, quand on modifie cette fonction dans un ensemble de mesure nulle. De même, il est évident que

(2.1) *Si deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables $(\mathcal{D})$ dans un intervalle I, il en est autant de toute combinaison linéaire de ces fonctions (à coefficients constants α et β) et on a*

$$(\mathcal{D})\int_I (\alpha\cdot f_1 + \beta\cdot f_2)\,dx = \alpha\cdot(\mathcal{D})\int_I f_1\,dx + \beta\cdot(\mathcal{D})\int_I f_2\,dx.$$

Toutes les remarques précédentes restent évidemment vraies, lorsqu'on y remplace $(\mathcal{D})$ par $(\mathcal{D}^*)$. De plus, comme le montre le th. 19, Chap. IX, § 10,

(2.2) *Si une fonction $f(x)$ est à peu près partout une dérivée finie (même seulement unilatérale) d'une fonction continue $F(x)$, la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D}^*)$ et la fonction $F(x)$ en est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D}^*)$.*

L'intégrale $(\mathcal{D}^*)$ embrasse donc celle de Newton (voir Chap. VII, § 1).

D'une façon analogue, le th. 22, Chap. IX, § 12, montre que

(2.3) *Si une fonction $f(x)$ est à peu près partout une dérivée approximative finie (même seulement unilatérale) d'une fonction continue $F(x)$, la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ et la fonction $F(x)$ en est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$.*

Théorème 1. *Toute fonction intégrable $(\mathcal{D})$ est mesurable et presque partout finie.*

Démonstration. Soient $f(x)$ une fonction intégrable $(\mathcal{D})$ dans un intervalle I et $F(x)$ son intégrale indéfinie. $F(x)$ est donc une fonction (ACG) sur I. Il existe en conséquence une décomposition de I en une suite $\{E_n\}$ d'ensembles fermés tels que $F(x)$ est une fonction (AC) sur chacun d'eux. En vertu du th. 1, Chap. VIII, § 6, il existe pour tout n une fonction $F_n(x)$ à variation bornée sur I et qui coïncide avec $F(x)$ dans E_n. On a donc presque partout dans E_n l'égalité $f(x) = F'_{\mathrm{ap}}(x) = F'_n(x)$ et, la dérivée d'une fonction à variation bornée étant mesurable, $f(x)$ est une fonction mesurable sur chaque E_n, donc sur l'intervalle I tout entier. Qu'elle y est en même temps presque partout finie, c'est alors une conséquence directe du th. 4, Chap. VIII, § 7.

Plus généralement, on montre (bien entendu, par une voie différente) que les dérivés approximatifs extrêmes d'une fonction mesurable arbitraire sont aussi mesurables (voir Chap. XI, § 4).

§ 3. Les rapports entre les fonctions (AC), (ACG) et (ACG^*) déterminent ceux qui se présentent entre les opérations intégrales de Lebesgue et de Denjoy. Notamment:

(3.1) *Toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{L})$ sur un intervalle I est aussi intégrable $(\mathcal{D}^*)$ sur I et on a $(\mathcal{L})\int_I f\,dx = (\mathcal{D}^*)\int_I f\,dx$.*

(3.2) *Toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{D}^*)$ sur I est en même temps intégrable $(\mathcal{D})$ sur I et on a $(\mathcal{D}^*)\int_I f\,dx = (\mathcal{D})\int_I f\,dx$.*

L'énoncé (3.1) est encore à compléter comme il suit.

Théorème 2. *Toute fonction $f(x)$ qui est intégrable $(\mathcal{D})$ et presque partout non négative dans un intervalle I est intégrable $(\mathcal{L})$ sur I.*

Démonstration. En effet, si $F(x)$ est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ d'une fonction presque partout non négative $f(x)$, on a presque partout $F'_{\mathrm{ap}}(x) = f(x) \geqslant 0$ et $F(x)$ est en vertu du th. 6, Chap. VIII, § 10, monotone non décroissante. Par conséquent la fonction $f(x)$, qui en est presque partout la dérivée, est selon le th. 7, Chap. IV, § 2, sommable, c. q. f. d.

Ce th. permet d'étendre aux intégrales de Denjoy le th. de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones de fonctions (cf. aussi le th. analogue pour l'intégrale de Perron, Chap. VII, § 7, th. 12).

Théorème 3. *Etant donnée une suite $\{f_n(x)\}$ presque partout non décroissante de fonctions intégrables ($\mathcal{D}$) dans un intervalle I, et dont les intégrales ($\mathcal{D}$) sur I forment une suite bornée supérieurement, la fonction $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$ est aussi intégrable ($\mathcal{D}$) sur I et on a $(\mathcal{D})\int\limits_I f(x)\,dx = \lim\limits_n (\mathcal{D})\int\limits_I f_n(x)\,dx$.*

Il en est tout à fait de même, en remplaçant ($\mathcal{D}$) par ($\mathcal{D}^*$).

Démonstration. Ce th. se réduit immédiatement au th. précité de Lebesgue. Il suffit notamment d'envisager, au lieu des fonctions $f_n(x)$, les fonctions $f_n(x) - f_1(x)$, qui, en tant qu'intégrables au sens de Denjoy et presque partout non négatives, sont en vertu du th. 2 sommables au sens de Lebesgue.

*Généralisation du théorème de Scheeffer.

§ 4. Comme le montrent p. ex. les énoncés (2.2) p. 198, et (2.3), p. 199, certains théorèmes établis au Chap. IX se laissent interpréter directement en termes de la théorie de l'intégrale. Ajoutons que, d'une façon analogue, le th. 7 du Chap. IX, § 4, permet de formuler comme suit le résultat contenu dans le th. 23, Chap. IX, § 13:

(4.1) *Toute fonction $f(x)$ qui est à peu près partout finie et à peu près partout égale soit à un des quatre dérivés de Dini, soit à une des deux dérivées approximatives extrêmes (bilatérales) d'une fonction continue $F(x)$, est intégrable ($\mathcal{D}$) et $F(x)$ est une intégrale indéfinie ($\mathcal{D}$) de $f(x)$.*

C'est une généralisation du th. de Scheeffer (Chap. VII, § 9) et même de la généralisation de ce théorème, établie au Chap. VII, § 10, p. 141. En effet, nous y avons montré que toute fonction continue $F(x)$ se trouve déterminée (à une constante additive près) par les valeurs, données *presque* partout, de son dérivé $\overline{F}^+(x)$, pourvu, bien entendu, que ce dernier soit *à peu près* partout fini. On y peut évidemment remplacer le nombre $\overline{F}^+(x)$ par chacun des trois autres nombres dérivés de Dini, mais l'hypothèse qu'il s'agissait pour tous les points *d'un même* nombre dérivé a été essentielle dans la démonstration, donnée p. 140—141.

Cependant, nous pouvons dire à présent:

Toute fonction continue $F(x)$ se trouve complètement déterminée (à une constante additive près), si l'on connait presque partout la valeur $\lambda(x)$ d'un nombre de Dini quelconque de $F(x)$, pourvu que $F(x)$ admette à peu près partout un au moins des nombres de Dini fini.

En effet, en vertu de (4.1) la fonction $\lambda(x)$ est alors intégrable ($\mathcal{D}$) et $F(x)$ en est une intégrale indéfinie ($\mathcal{D}$).

Théorème sur l'intégration par parties généralisé.

§ 5. Le th. 15, Chap. IV, § 5, sur l'intégrale de Lebesgue se transporte sur celles de Denjoy par la seule substitution dans son énoncé de la fonction $g(x)$ *intégrable* ($\mathcal{D}$) ou *intégrable* ($\mathcal{D}^*$) à la fonction $g(x)$ *sommable*. La démonstration, basée sur la définition descriptive des intégrales de Denjoy, n'exigerait qu'une modification formelle du raisonnement employé pour l'intégrale lebesguienne.

Il est préférable cependant, en vue de quelques applications, d'aller un peu plus loin et de remplacer simultanément dans le théorème en question la *fonction $F(x)$ absolument continue* par la *fonction $F(x)$ à variation bornée*. La généralisation est alors liée avec la notion d'intégrale de Riemann-Stieltjes.

Nous aurons recours dans la démonstration à des évaluations de l'accroissement et de l'oscillation de la fonction $\Gamma(x)$ définie par la formule

$$\Gamma(x) = F(x)\,G(x) - (\mathcal{S})\int_a^x G(t)\,dF(t) \quad pour\ a \leqslant x \leqslant b,$$

où $F(x)$ est une fonction monotone non décroissante dans l'intervalle $I_0 = [a, b]$ et $G(x)$ une fonction arbitraire bornée et intégrable sur I_0 au sens de Riemann-Stieltjes par rapport à $F(x)$. Nous allons montrer notamment que pour tout sous-intervalle $I = [\alpha, \beta]$ de I_0 on a les relations suivantes, où $M = M(|F|; I_0)$:

$$(5.1)\quad |\Gamma(\beta)-\Gamma(\alpha)| \leqslant M\cdot|G(\beta)-G(\alpha)| + \omega(G;I)\cdot[F(\beta)-F(\alpha)],$$

$$(5.2)\quad \omega(\Gamma;I) \leqslant M\cdot\omega(G;I) + \omega(G;I)\cdot[F(\beta)-F(\alpha)].$$

En vertu du théorème de la moyenne pour l'intégrale de Stieltjes (Chap. V, § 7, th. 14) on a, en effet, pour tout intervalle $I' = [\alpha', \beta']$ situé dans l'intervalle I l'égalité $\Gamma(\beta') - \Gamma(\alpha') =$

$$= [G(\beta') - G(\alpha')]\cdot F(\beta') + [F(\beta') - F(\alpha')]\cdot G(\alpha') - (\mathcal{S})\int_{\alpha'}^{\beta'} G\, dF =$$

$= [G(\beta') - G(\alpha')]\cdot F(\beta') + [G(\alpha') - \mu]\cdot[F(\beta') - F(\alpha')]$, où le nombre μ est compris entre les bornes des valeurs de $G(x)$ dans I'. Par conséquent $|\Gamma(\beta') - \Gamma(\alpha')| \leqslant M\cdot|G(\beta') - G(\alpha')| + \omega(G;I')\cdot[F(\beta') - F(\alpha')]$.

En substituant dans cette inégalité $I = [\alpha, \beta]$ à $I' = [\alpha', \beta']$, on en tire immédiatement (5.1) et, en y remplaçant respectivement les expressions $|\Gamma(\beta') - \Gamma(\alpha')|$, $|G(\beta') - G(\alpha')|$, $F(\beta') - F(\alpha')$ et $\omega(G;I')$ par leurs bornes supérieures pour $I' \subset I$, on en tire la relation (5.2).

Or, la formule (5.1) montre que *la continuité de $G(x)$ dans I_0 entraîne celle de $\Gamma(x)$.* Nous allons prouver en outre que

(5.3) *Si la fonction $G(x)$ est continue dans I_0 et (AC) sur un ensemble $E \subset I_0$, la fonction $\Gamma(x)$ est également (AC) sur E.*

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans ces hypothèses un $\eta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles $\{I_k = [\alpha_k, \beta_k]\}$ qui n'empiètent pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à E

$$\sum_k |I_k| < \eta \text{ entraîne } \sum_k |G(\beta_k) - G(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } \omega(G; I_k) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

où M désigne, comme auparavant, la borne supérieure des valeurs absolues de $F(x)$ dans I_0. On en tire selon (5.1) $\sum_k |\Gamma(\beta_k) - \Gamma(\alpha_k)| < \varepsilon$, de sorte que $\Gamma(x)$ est une fonction (AC) sur E.

D'une façon tout à fait analogue, on déduit de la formule (5.2) la proposition suivante:

(5.4) *Si la fonction $G(x)$ est (AC*) sur un ensemble $E \subset I_0$, la fonction $\Gamma(x)$ est également (AC*) sur E.*

Il en résulte aussitôt que

(5.5) *Si $G(x)$ est une fonction (ACG) sur l'intervalle I_0, la fonction $\Gamma(x)$ l'est également. La même relation subsiste pour les fonctions (ACG*).*

Ceci établi, nous pouvons démontrer sans peine le *théorème généralisé sur l'intégration par parties*, qui suit.

Théorème 4. *Si $F(x)$ est une fonction à variation bornée dans un intervalle $I_0 = [a, b]$ et $g(x)$ désigne respectivement une fonction intégrable ($\mathcal{L}$), ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}^*$) sur cet intervalle, la fonction $F(x)\,g(x)$ est respectivement intégrable ($\mathcal{L}$), ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}^*$) sur I_0 et on a, en désignant par $G(x)$ une intégrale indéfinie de $g(x)$:*

$$\int_a^b F(x)\cdot g(x)\, dx = G(b)\,F(b) - G(a)\,F(a) - (\mathcal{S})\int_a^b G(x)\, dF(x).$$

Démonstration. Nous allons l'établir pour l'intégrale ($\mathcal{D}$), le raisonnement dans les deux autres cas étant le même.

On peut évidemment admettre que la fonction $F(x)$ est monotone non décroissante dans I_0. En posant alors

$$(5.6)\qquad \Gamma(x) = F(x)\,G(x) - (\mathcal{S})\int_a^x G(t)\, dF(t),$$

on conclut de (5.5) que $\Gamma(x)$ est une fonction (ACG) sur I_0 et en vertu du th. 15, Chap. V, § 7, la dérivation approximative des deux membres de (5.6) donne presque partout dans I_0 l'égalité $\Gamma'_{ap}(x) = F(x)\,G'_{ap}(x) = F(x)\,g(x)$. Par conséquent la fonction $F(x)\,g(x)$ est intégrable ($\mathcal{D}$) sur l'intervalle I_0 et on a la relation $(\mathcal{D})\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = \Gamma(b) - \Gamma(a)$, équivalente d'après (5.6) à celle qui était à démontrer.

L'idée de cette démonstration, qui s'appuie directement sur la définition *descriptive* des intégrales de Denjoy, est due à M. A. Zygmund. Pour une autre démonstration, basée sur la définition *constructive* de ces intégrales, cf. p. ex. E. W. Hobson [I, p. 711].

Deuxième théoreme de la moyenne pour les intégrales de Denjoy.

§ 6. Théorème 5. *Etant données une fonction finie $F(x)$ non décroissante dans un intervalle $I = [a, b]$ et une fonction $g(x)$ intégrable ($\mathcal{D}$) sur I, il existe toujours un point $\xi \in I$ tel que l'on a*

$$(\mathcal{D})\int_a^b g(x)\,F(x)\,dx = F(a)\cdot(\mathcal{D})\int_a^\xi g(x)\,dx + F(b)\cdot(\mathcal{D})\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. En posant $G(x) = (\mathcal{D})\int_a^x g(t)\,dt$, on a en vertu du th. 4 et du théorème de la moyenne pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes (Chap. V, § 7, th. 14) l'égalité $(\mathcal{D})\int_a^b g(x)\,F(x)\,dx = $ $= G(b)\,F(b) - (\mathcal{S})\int_a^b G(x)\,dF(x) = G(b)\,F(b) - \mu\cdot[F(b) - F(a)] = $ $= \mu\cdot F(a) + [G(b) - \mu]\cdot F(b)$, le nombre μ étant compris entre les bornes de la fonction *continue* $G(x)$ dans I. Il existe donc un point $\xi \in I$ tel que $\mu = G(\xi)$ et l'égalité précédente prend la forme $(\mathcal{D})\int_a^b g(x)\,F(x)\,dx = F(a)\cdot G(\xi) + F(b)\cdot[G(b) - G(\xi)]$, ce qui équivaut par définition de $G(x)$ à la formule q. f. d.

Opérations intégrales générales.

§ 7. Les théorèmes qui vont suivre et qui nous permettront de caractériser d'une autre manière les intégrales de Denjoy s'appuient sur quelques notions d'ordre plus abstrait.

Soit $\mathcal{J}$ une opération fonctionnelle qui fait correspondre à chaque intervalle I une classe de fonctions définies dans I, et qui assigne à chaque fonction de cette classe un nombre réel fini. Des fonctions correspondant ainsi à un intervalle donné $I = [a, b]$, nous dirons qu'elles *appartiennent au domaine de l'opération* $\mathcal{J}$ *sur* I ou bien que l'*opération* $\mathcal{J}$ *est définie sur l'intervalle* I *pour ces fonctions.* Si $f(x)$ en est une, nous désignerons par $\overset{b}{\underset{a}{\mathcal{J}}}(f)$ ou par $\mathcal{J}(f; I)$ le nombre attaché à la fonction $f(x)$ par cette opération.

Une opération $\mathcal{J}$ sera dite *opération intégrale* ou, bref, *intégrale*, lorsqu'elle satisfait en outre aux trois conditions suivantes:

(I) *Si une fonction $f(x)$ appartient au domaine de l'opération $\mathcal{J}$ sur un intervalle I_0, elle appartient aussi au domaine de cette opération sur tout intervalle $I \subset I_0$ et $\mathcal{J}(f; I)$ est une fonction additive et continue de l'intervalle $I \subset I_0$.*

(II) *Si une fonction $f(x)$ appartient au domaine de l'opération $\mathcal{J}$ sur deux intervalles I_1 et I_2 adjacents l'un à l'autre, elle appartient aussi au domaine de cette opération sur l'intervalle $I_1 + I_2$,*

(III) *Toute fonction $f(x)$ qui est identiquement nulle dans un intervalle I, appartient au domaine de l'opération $\mathcal{J}$ sur I et on a* $\mathcal{J}(f; I) = 0$.

Lorsque $\mathcal{J}$ est une opération intégrale, toute fonction $f(x)$ qui appartient à son domaine sur un intervalle I_0 sera dite *intégrable* $(\mathcal{J})$ *sur* I_0 et nous appellerons le nombre $\mathcal{J}(f; I_0)$ *intégrale de $f(x)$ sur I_0*. La borne supérieure des valeurs absolues de $\mathcal{J}(f; I)$ sur $I \subset I_0$ portera le nom d'*oscillation de l'intégrale* $(\mathcal{J})$ *de $f(x)$ sur I_0* et sera désignée par $\omega(\mathcal{J}; f; I_0)$.

Deux intégrales $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ seront dites *compatibles*, lorsque $\mathcal{J}_1(f; I) = \mathcal{J}_2(f; I)$ pour tout intervalle I et pour toute fonction $f(x)$ qui est intégrable $(\mathcal{J}_1)$ et $(\mathcal{J}_2)$ simultanément.

Nous dirons que l'intégrale $\mathcal{J}_1$ *embrasse* l'intégrale $\mathcal{J}_2$, lorsque les deux intégrales sont compatibles et que toute fonction intégrable $(\mathcal{J}_2)$ est intégrable $(\mathcal{J}_1)$. Nous l'écrirons $\mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2$ ou bien $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$. Lorsque, de plus, $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$, l'intégrale $\mathcal{J}_2$ sera dite *plus faible* que l'intégrale $\mathcal{J}_1$.

§ 8. Etant données une opération intégrale $\mathcal{J}$ et une fonction $\varphi(x)$ s'annulant en dehors d'un ensemble borné E, il est évident que si $\varphi(x)$ est intégrable $(\mathcal{J})$ sur un intervalle I_0 contenant E dans son *intérieur*, elle l'est aussi sur chaque intervalle I contenant E et on a $\mathcal{J}(\varphi; I) = \mathcal{J}(\varphi; I_0)$.

Grâce à ce fait, nous pouvons admettre la définition suivante. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *intégrable* $(\mathcal{J})$ *sur un ensemble borné* E, lorsque la fonction $\varphi(x)$ égale à $f(x)$ pour $x \in E$ et à 0 partout ailleurs est intégrable $(\mathcal{J})$ sur chaque intervalle $I \supset E$. Le nombre $\mathcal{J}(\varphi; I)$ est alors indépendant du choix de l'intervalle $I \supset E$; nous l'appellerons *intégrale* $(\mathcal{J})$ *de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble* E et le désignerons par $\mathcal{J}(f; E)$.

Opérations intégrales complètes.

§ 9. Une opération intégrale $\mathcal{J}$ sera dite *complète*, si elle remplit les deux conditions suivantes (liées, comme nous le verrons, aux définitions des intégrales généralisées de Cauchy et de Harnack, qui seront étudiées plus loin):

(C) *Si une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I = [a, b]$ est intégrable $(\mathcal{J})$ sur tout intervalle $[a + \varepsilon, b - \eta]$ où $a < a + \varepsilon < b - \eta < b$*

et si la limite $\lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0} \overset{b-\eta}{\underset{a+\varepsilon}{\mathcal{T}}}(f)$ *existe, la fonction* $f(x)$ *est intégrable* $(\mathcal{T})$ *sur l'intervalle* I *tout entier.* En vertu de la condition (I), à savoir en raison de la continuité de l'intégrale $(\mathcal{T})$, considérée comme fonction d'intervalle, on a alors $\mathcal{T}(f; I) = \lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0} \overset{b-\eta}{\underset{a+\varepsilon}{\mathcal{T}}}(f)$.

(*H*) *Si une fonction* $f(x)$ *est intégrable* $(\mathcal{T})$ *sur un ensemble fermé et borné* E, *de même que sur chacun des intervalles* $\{I_k\}$ *contigus à* E, *et si on a en outre (dans le cas où la suite* $\{I_k\}$ *est infinie)*

$$\text{(9.1)} \qquad \sum_k |\mathcal{T}(f; I_k)| < +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_k \omega(\mathcal{T}; f; I_k) = 0,$$

la fonction $f(x)$ *est intégrable* $(\mathcal{T})$ *sur l'intervalle* $I = [a, b]$ *où* a *et* b *désignent les bornes de* E, *et on a*

$$\mathcal{T}(f; I) = \mathcal{T}(f; E) + \sum_k \mathcal{T}(f; I_k).$$

Nous aurons encore à nous servir dans la suite (pour l'intégrale $(\mathcal{D}^*)$) d'une condition plus générale, qui sera dite *condition* (H^*) et qui s'obtient de (H), en y remplaçant l'hypothèse (9.1) par la suivante, plus restrictive:

$$\text{(9.2)} \qquad \sum_k \omega(\mathcal{T}; f; I_k) < +\infty.$$

Toute opération intégrale $\mathcal{T}$ qui remplit les conditions (C) et (H^*) s'appellera *complète au sens faible.*

Quant aux opérations intégrales qui ont été envisagées jusqu'à présent, il est facile de voir que ni l'intégrale de Newton, ni celle de Riemann, ni celle de Lebesgue n'est une opération intégrale complète dans aucun des deux sens, et même qu'elles ne remplissent pas la condition (C). Pour l'intégrale $(\mathcal{L})$ on le constate aisément sur l'exemple de la fonction $F(x)$, qui a été signalé au Chap. VII, § 1, p. 126.

§ 10. **Théorème 6.** *L'intégrale* $(\mathcal{D})$ *est une opération intégrale complète. L'intégrale* $(\mathcal{D}^*)$ *l'est au sens faible.*

Démonstration. Nous allons nous borner à l'intégrale $(\mathcal{D})$, le raisonnement pour l'intégrale $(\mathcal{D}^*)$ étant tout à fait analogue.

Pour montrer que *l'opération* $\mathcal{D}$ *remplit la condition* (C), considérons une fonction arbitraire $f(x)$ définie dans un intervalle $I = [a, b]$, intégrable $(\mathcal{D})$ sur tout intervalle $[a+\varepsilon, b-\eta]$ où

$a < a+\varepsilon < b-\eta < b$ et pour laquelle $\lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0} (\mathcal{D}) \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\,dx$ existe.

Il s'agit de montrer que la fonction $f(x)$ est alors intégrable $(\mathcal{D})$ dans l'intervalle I tout entier. Or, en posant à ce but $F(a) = 0$ et $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon,\eta\to 0} (\mathcal{D}) \int\limits_{a+\varepsilon}^{x-\eta} f(x)\,dx$ pour $a < x \leqslant b$, la fonction $F(x)$ est évidemment continue sur I et elle est en même temps une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ dans chaque intervalle $I_n = [a+n^{-1}, b-n^{-1}]$ où $n = 1, 2, \ldots$ On a ainsi presque partout dans ces intervalles, donc également presque partout dans I, $F'_{\mathrm{ap}}(x) = f(x)$, de sorte que la fonction $F(x)$, en tant qu'une fonction (ACG) sur chacun des intervalles I_n, donc aussi sur I, est bien une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ sur I.

Pour montrer, d'autre part, que *l'opération* $\mathcal{D}$ *remplit la condition* (H), considérons un ensemble fermé et borné E, la suite $\{I_k\}$ des intervalles contigus à E et l'intervalle $I = [a, b]$, où a et b désignent respectivement les bornes de E. Admettons qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable $(\mathcal{D})$ sur E, ainsi que sur tout I_k où $k = 1, 2, \ldots$; admettons de plus que l'on ait

$$\text{(10.1)} \qquad \sum_k \left| (\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\,dx \right| < +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_k \omega_k = 0,$$

où ω_k désigne l'oscillation de l'intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ sur I_k (évidemment, on n'aura besoin de faire intervenir l'hypothèse (10.1) que dans le cas où la suite $\{I_k\}$ est infinie). Il s'agit de prouver que $f(x)$ est alors intégrable $(\mathcal{D})$ sur I tout entier et que $(\mathcal{D}) \int\limits_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{D}) \int\limits_E f(x)\,dx + \sum\limits_k (\mathcal{D}) \int\limits_{I_k} f(x)\,dx.$

Or, posons $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \in E$ et $\varphi(x) = 0$ partout ailleurs. Ainsi définie, la fonction $\varphi(x)$ est par hypothèse intégrable $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle I tout entier et on a

$$\text{(10.2)} \qquad (\mathcal{D}) \int_a^b \varphi(x)\,dx = (\mathcal{D}) \int_E f(x)\,dx.$$

Posons en outre pour tout $x \in I$

$$\text{(10.3)} \qquad F(x) = \sum_k (\mathcal{D}) \int_{I_{(x)} \cdot I_k} f(x)\,dx \quad \textit{où} \quad I_{(x)} = [a, x].$$

Ainsi définie, la fonction $F(x)$ est en vertu de (10.1) finie et continue dans l'intervalle I tout entier. Soit enfin

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I_k|} \cdot (\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx & \text{pour } x \in I_k^{\circ} \text{ où } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{pour } x \in E. \end{cases}$$

Ainsi définie, la fonction $g(x)$ est selon la première des formules (10.1) sommable dans I et en vertu de (10.3) son intégrale indéfinie de Lebesgue $G(x) = (\mathcal{L}) \int_a^x g(t)\, dt$ coïncide dans E avec la fonction $F(x)$. Il s'en suit que $F(x)$ est une fonction (AC) sur E et que l'on a

(10.4) $F'_{\mathrm{ap}}(x) = G'(x) = g(x) = 0 = f(x) - \varphi(x)$ *presque partout dans* E.

En même temps la fonction $F(x)$ est d'après (10.3) une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ dans chacun des intervalles I_k; il en résulte d'une part que

(10.5) $F'_{\mathrm{ap}}(x) = f(x) = f(x) - \varphi(x)$ *presque partout dans* $I - E$,

et d'autre part que $F(x)$ est une fonction (ACG) sur chacun des intervalles contigus à E. Comme une fonction (AC) sur E, elle est donc (ACG) sur l'intervalle I tout entier, d'où, en tenant compte des relations (10.2)–(10.5), la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ sur I et il vient $(\mathcal{D}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{D}) \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx + (\mathcal{D}) \int_a^b \varphi(x) =$
$= F(b) - F(a) + (\mathcal{D}) \int_E f(x)\, dx = \sum_k (\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx + (\mathcal{D}) \int_E f(x)\, dx,$
c. q. f. d.

§ 11. Nous venons de voir que l'intégrale $(\mathcal{D})$ est une opération intégrale complète au sens de la définition, p. 205. Nous allons montrer à présent qu'elle est la plus faible opération intégrale complète qui embrasse l'intégrale de Lebesgue.

Lemme. *Si une fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ sur un intervalle $I = [a, b]$, tout ensemble fermé $E \subset I$ contient une portion* [1]) *P telle que $f(x)$ est sommable sur P est que l'on a $\sum_k |(\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx| < +\infty$ où $\{I_k = [a_k, b_k]\}$ désigne la suite des intervalles contigus à P.*

En remplaçant $(\mathcal{D})$ par $(\mathcal{D}^*)$, cette inégalité est à remplacer par $\sum_k \omega_k < +\infty$ où ω_k désigne l'oscillation de l'intégrale indéfinie $(\mathcal{D}^*)$ de $f(x)$ sur I_k.

[1]) voir la définition, p. 144.

Démonstration. Nous nous bornons au cas de l'intégrale $\mathcal{D}$, celui de l'intégrale $\mathcal{D}^*$ s'établissant par un procédé analogue.

Soit $F(x)$ une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$. En vertu du th. 16, Chap. VIII, § 17, $F(x)$ est donc une fonction (AC) sur une portion P de E et, comme telle, elle coïncide dans P avec une fonction $G(x)$ absolument continue sur l'intervalle I tout entier. On a par conséquent d'une part $f(x) = F'_{\mathrm{ap}}(x) = G'(x)$ presque partout dans P, de sorte que $f(x)$ est sommable sur P, et d'autre part
$\sum_k |(\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx| = \sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k |G(b_k) - G(a_k)| < +\infty,$
c. q. f. d.

Théorème 7. *L'intégrale $(\mathcal{D})$ est la plus faible parmi les opérations complètes qui embrassent l'intégrale $(\mathcal{L})$. Il en est autant de l'intégrale $(\mathcal{D}^*)$ parmi les opérations complètes au sens faible.*

Démonstration. Nous nous bornons encore au cas de l'intégrale $\mathcal{D}$, celui de l'intégrale $\mathcal{D}^*$ étant tout à fait analogue.

En vertu du th. 6, p. 206, il suffit de montrer que, étant donnée une opération intégrale complète quelconque $\mathcal{J} \supset \mathcal{L}$, on a aussi $\mathcal{J} \supset \mathcal{D}$, c. à d. que toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{D})$ sur un intervalle $I_0 = [a, b]$ est intégrable $(\mathcal{J})$ sur I_0 et $\mathcal{J}(f; I_0) = (\mathcal{D}) \int_{I_0} f(x)\, dx$.

Appelons pour abréger *intervalle régulier* tout intervalle $I \subset I_0$ sur lequel $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{J})$ et $\mathcal{J}(f; I) = (\mathcal{D}) \int_I f(x)\, dx$; de plus, appelons un point $x \in I_0$ *point régulier*, si pour un $\varepsilon > 0$ tous les sous-intervalles de I_0 situés sur l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ sont réguliers. Exprimé dans cette terminologie, notre but consiste donc à prouver que l'intervalle I_0 est régulier.

Nous allons montrer au préalable que

(11.1) *Tout intervalle $I \subset I_0$ dont tous les points intérieurs sont réguliers est un intervalle régulier.*

En effet, les intégrales $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ remplissant la condition (C), il suffit de prouver que tout intervalle *intérieur à* I est régulier.

Or, si un intervalle $J \subset I^{\bigcirc}$ ne l'était pas, une au moins des deux moitiés de J ne le serait non plus. On obtiendrait ainsi par itération une suite descendante d'intervalles irréguliers dont les longueurs tendraient vers 0, de sorte que leur point commun serait un point irrégulier et à la fois intérieur à I, contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, supposons que l'intervalle I_0 ne soit pas régulier. Il contient donc, en vertu de (11.1), des points irréguliers à l'intérieur. Or, l'ensemble E de tous les points irréguliers de I_0 étant manifestement fermé, il existe selon le lemme qui précède un intervalle $I \subset I_0$ contenant des points de E dans son intérieur et tel que $f(x)$ soit sommable sur la portion $E \cdot I$, la série de ses intégrales définies ($\mathcal{D}$) sur les intervalles contigus à $E \cdot I$ étant, en outre, absolument convergente.

Soient $J=[\alpha, \beta]$ un sous-intervalle arbitraire de I et $\{J_k\}$ la suite des intervalles contigus à l'ensemble formé de points de $E \cdot J$ et d'extrémités de J. La fonction $f(x)$ est évidemment sommable sur l'ensemble $E \cdot J$ (qui peut d'ailleurs être vide) et on a

$$\sum_k \left| (\mathcal{D}) \int_{J_k} f(x)\, dx \right| < +\infty, \tag{11.2}$$

d'où, l'intégrale ($\mathcal{D}$) remplissant en vertu du th. 6, p. 206, la condition (H),

$$(\mathcal{D}) \int_J f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_{E \cdot J} f(x)\, dx + \sum_k (\mathcal{D}) \int_{J_k} f(x)\, dx. \tag{11.3}$$

D'autre part, tous les intervalles J_k, qui par définition ne contiennent à l'intérieur aucun point de E, sont selon (11.1) des intervalles réguliers, de sorte que sur chacun d'eux l'intégrale ($\mathcal{T}$) de $f(x)$ se trouve définie par l'égalité

$$\mathcal{T}(f; J_k) = (\mathcal{D}) \int_{J_k} f(x)\, dx. \tag{11.4}$$

Or, $\mathcal{T}$ remplissant par hypothèse la condition (H) et embrassant l'intégrale $\mathcal{L}$, il résulte de (11.4) et (11.2) que la fonction $f(x)$ est intégrable ($\mathcal{T}$) sur l'intervalle J et que l'on a l'égalité $\mathcal{T}(f; J) = (\mathcal{L}) \int_{E \cdot J} f(x)\, dx + \sum_k \mathcal{T}(f; J_k)$, d'où, en vertu de (11.3) et de

(11.4), $\mathcal{T}(f; J) = (\mathcal{D}) \int_J f(x)\, dx$. Tout intervalle $J \subset I$ serait donc régulier, ce qui est impossible, I contenant des points de E à l'intérieur. La régularité de I_0 est ainsi démontrée.

Théorèmes de Hake et d'Alexandroff-Looman.

§ 12. Les relations entre les intégrales de Denjoy et celles de Lebesgue et Newton étant établies, nous allons montrer à présent que l'intégrale de Denjoy au sens restreint est équivalente à l'intégrale de Perron. Le premier résultat en cette matière est dû à M. H. Hake [1], qui a établi la relation $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{P}$, en s'appuyant directement sur la définition *constructive* de Denjoy, et a posé en même temps le problème de la relation inverse. Ce problème a été résolu par affirmative presque simultanément (et tout à fait indépendamment) par M. P. Alexandroff [1; 2] et M. H. Looman [3] à l'aide de la définition *descriptive.*

Lemme 1. *Pour qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I_0 = [a, b]$ soit intégrable ($\mathcal{P}$) sur cet intervalle et pour avoir $P = (\mathcal{P}) \int_{I_0} f(x)\, dx$, il faut et il suffit qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux fonctions $\Gamma(x)$ et $\Delta(x)$ continues sur I_0 et telles que l'on ait*

$$|[\Gamma(b) - \Gamma(a)] - P| < \varepsilon, \qquad |[\Delta(b) - \Delta(a)] - P| < \varepsilon, \tag{12.1}$$

et

$$-\infty \neq \underline{\Gamma}(x) \geqslant f(x) \geqslant \bar{\Delta}(x) \neq +\infty \text{ à peu près partout dans } I_0. \tag{12.2}$$

Démonstration. La condition étant nécessaire par définition de l'intégrale de Perron (Chap. VII, § 4), il ne s'agit que d'en démontrer la suffisance.

Considérons donc, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, deux fonctions $\Gamma(x)$ et $\Delta(x)$ assujetties aux conditions (12.1) et (12.2), et soit $\{a_k\}$ la suite des points où la formule de la condition (12.2) est en défaut. Faisons correspondre à tout k un $h_k > 0$ tel que l'oscillation de $\Gamma(x)$ sur l'intervalle $[a_k - h_k, a_k + h_k]$ soit inférieure à $2^{-k}\varepsilon$. En désignant par $\omega_k(x)$ l'oscillation de $\Gamma(x)$ sur l'intervalle $[a_k, x]$ ou $[x, a_k]$ suivant que $a_k \leqslant x$ ou $x \leqslant a_k$, posons:

$$O_k(x) = \omega_k(x), \text{ si } a_k \leqslant x \leqslant a_k + h_k, \quad O_k(x) = \omega_k(a_k + h_k), \text{ si } x \geqslant a_k + h_k,$$

$$O_k(x) = -\omega_k(x), \text{ si } a_k - h_k \leqslant x \leqslant a_k, \quad O_k(x) = -\omega_k(a_k - h_k), \text{ si } x \leqslant a_k - h_k.$$

La fonction $\Gamma(x)+O_k(x)$ admet alors au point a_k la dérivée inférieure non négative. En posant $\Phi_k(x)=\Gamma(x)+O_k(x)+2^{-k}\varepsilon\cdot\sqrt[3]{x-a_k}$, on a donc

$$(12.3)\qquad \underline{\Phi}_k(a_k)=+\infty \qquad \textit{pour tout } k=1,2,\ldots$$

et en posant

$$(12.4)\qquad \Phi(x)=\Gamma(x)+\sum_k\left[O_k(x)+2^{-k}\varepsilon\cdot\sqrt[3]{x-a_k}\right],$$

on obtient $|\Phi(x)-\Gamma(x)|\leqslant\sum_k O_k(x)+\varepsilon\cdot\sqrt[3]{|I_0|}\leqslant\varepsilon\cdot(1+\sqrt[3]{|I_0|})$, d'où en vertu de (12.1)

$$(12.5)\qquad |\Phi(b)-\Phi(a)-P|\leqslant\varepsilon\cdot(3+2\sqrt[3]{|I_0|}).$$

Nous allons montrer que $\Phi(x)$ est une fonction majorante de $f(x)$ dans I_0. En effet, toutes les fonctions qui figurent sous le signe $\sum$ dans l'égalité (12.4) étant monotones non décroissantes, on a pour tout $x\in I_0$

$$(12.6)\qquad \underline{\Phi}(x)\geqslant\underline{\Gamma}(x) \quad \textit{et} \quad \underline{\Phi}(x)\geqslant\underline{\Phi}_k(x) \qquad \textit{pour } k=1,2,\ldots,$$

de sorte que pour les points x étrangers à la suite $\{a_k\}$ on obtient de (12.2) et de la première des inégalités (12.6) $-\infty\neq\underline{\Phi}(x)\geqslant f(x)$, et pour tout point a_k on tire de (12.3) et de la seconde des inégalités (12.6) $\underline{\Phi}(a_k)=+\infty\geqslant f(a_k)$.

D'une façon tout à fait analogue on peut construire une fonction $\Psi(x)$ minorante de $f(x)$ dans I_0 et qui remplisse par analogie à (12.5) l'inégalité $|\Psi(b)-\Psi(a)-P|\leqslant\varepsilon\cdot(3+2\sqrt[3]{|I_0|})$. Or, ε étant arbitraire, ces inégalités prouvent que la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur I_0 et que $P=(\mathcal{P})\int_{I_0}f(x)\,dx$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Soient $f(x)$ une fonction qui s'annule partout dans un ensemble fermé E, a et b les bornes de E et $\{I_k=[a_k,b_k]\}$ la suite des intervalles contigus à E.*

Si $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur chaque I_k et la série des oscillations de son intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ sur ces intervalles est convergente, la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur l'intervalle $I=[a,b]$ tout entier et on a $(\mathcal{P})\int_I f(x)\,dx=\sum_k(\mathcal{P})\int_{I_k}f(x)\,dx$.

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe pour tout $k=1,2,\ldots$ une majorante $\Phi_k(x)$ de $f(x)$ dans I_k telle que

$$(12.7)\qquad \Phi_k(a_k)=0 \quad \textit{et} \quad \left|\Phi_k(x)-(\mathcal{P})\int_{a_k}^{x}f(t)\,dt\right|<2^{-k}\varepsilon \quad \textit{pour } a_k\leqslant x\leqslant b_k.$$

Désignons par $\omega_k(x)$, où $a_k\leqslant x\leqslant b_k$, l'oscillation de la fonction $\Phi_k(x)$ sur l'intervalle $[a_k,x]$. La série des oscillations de l'intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ de $f(x)$ sur les intervalles I_k étant par hypothèse convergente, on a selon (12.7) également $\sum_k\omega_k(b_k)<+\infty$ et nous pouvons par conséquent fixer un K tel que l'on ait

$$(12.8)\qquad \sum_{k=K+1}^{\infty}\omega_k(b_k)<\varepsilon.$$

Posons pour abréger

$$G_k(x)=\begin{cases}\Phi_k(x) & \textit{pour } x\in I_k \quad \textit{et} \quad k\leqslant K\\ \Phi_k(x)+\omega_k(x) & \textit{pour } x\in I_k \quad \textit{et} \quad k>K\end{cases}$$

et

$$\Phi(x)=\begin{cases}\sum_k^{(x)}G_k(b_k) & \textit{pour } x\in E\\ G_j(x)+\sum_k^{(x)}G_k(b_k) & \textit{pour } x\in I_j \quad \textit{où} \quad j=1,2,\ldots,\end{cases}$$

la sommation $\sum_k^{(x)}$ s'étendant sur tous les indices k tels que $x\geqslant b_k$. La fonction $\Phi(x)$ ainsi définie dans l'intervalle I tout entier est, comme il est facile de voir, continue dans I et on a en outre l'égalité $\left|\Phi(b)-\sum_k(\mathcal{P})\int_{I_k}f(x)\,dx\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k(b_k)-(\mathcal{P})\int_{I_k}f(x)\,dx\right]=$
$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_k(b_k)-(\mathcal{P})\int_{I_k}f(x)\,dx\right]+\sum_{k=K+1}^{\infty}\omega_k(b_k)$, d'où selon (12.7) et (12.8)

$$(12.9)\qquad \Phi(a)=0 \quad \textit{et} \quad \left|\Phi(b)-\sum_k(\mathcal{P})\int_{I_k}f(x)\,dx\right|<2\varepsilon.$$

Nous allons montrer que $\Phi(x)$ est une majorante de $f(x)$ dans l'intervalle I entier. En effet, dans le cas où $a_k\leqslant x<b_k$,

on a pour un $h > 0$ suffisamment petit $\Phi(x+h) - \Phi(x) = = G_k(x+h) - G_k(x) \geqslant \Phi_k(x+h) - \Phi_k(x)$, d'où $-\infty \neq \underline{\Phi}^+(x) \geqslant \underline{\Phi}_k^+(x) \geqslant f(x)$. D'autre part, dans le cas contraire on a $x \in E$, et pour les $h > 0$ suffisamment petits l'intervalle $[x, x+h]$ est disjoint des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_K$; par conséquent $\Phi(x+h) - \Phi(x) \geqslant 0$, d'où encore $-\infty \neq \underline{\Phi}^+(x) \geqslant 0 = f(x)$. Enfin, les mêmes relations se présentent évidemment pour $\underline{\Phi}^-(x)$.

En considérant la fonction $-f(x)$ au lieu de $f(x)$, on conclut qu'il existe une minorante $\Psi(x)$ de $f(x)$ dans I qui remplit les conditions $\Psi(a) = 0$ et $\left|\Psi(b) - \sum_k (\mathcal{P}) \int_{I_k} f(x)\,dx\right| < 2\varepsilon$, analogues à (12.9). Il en résulte, ε étant arbitraire, que $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur I et que son intégrale définie $(\mathcal{P})$ sur cet intervalle remplit l'égalité q. f. d.

Il est à remarquer que pour l'application que nous allons en faire dans la démonstration du th. de Hake, le lemme 1 pourrait être simplifié, en y remplaçant le terme „à peu près partout“ par l'expression „partout, excepté tout au plus un seul point“. Cependant ce lemme mérite par lui-même un certain intérêt, car il montre qu'une généralisation de la notion de fonctions majorantes et minorantes de Perron ne comporte aucune modification de la notion d'intégrale $(\mathcal{P})$.

Théorème 8 (de Hake). *L'intégrale $\mathcal{P}$ embrasse l'intégrale $\mathcal{D}^*$.*

Démonstration. En vertu du th. 9, Chap. VII, § 6, on a $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$. Pour avoir $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{P}$, il suffit donc en raison du th. 7, p. 209, de prouver que l'intégrale $\mathcal{P}$ est complète au sens faible.

1° *L'intégrale $\mathcal{P}$ remplit la condition* (C).

Admettons donc qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I = [a, b]$ soit intégrable $(\mathcal{P})$ sur tout intervalle $[a+\varepsilon, b-\eta]$ et que la limite $L = \lim_{\varepsilon,\eta \to 0} (\mathcal{P}) \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)$ existe. Il s'agit d'en déduire l'existence de $(\mathcal{P}) \int_I f(x)\,dx$. Posons à ce but $b_n = b - 2^{-n}(b-a)$. La fonction $f(x)$ étant intégrable $(\mathcal{P})$ sur chaque intervalle $[b_n, b_{n+1}]$ où $n = 1, 2, \ldots$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $\Phi(x)$, majorante de $f(x)$ dans tous ces intervalles et satisfaisant pour $n = 1, 2, \ldots$ à la condition

$$(12.10) \quad \left|\Phi(x) - \Phi(b_n) - (\mathcal{P}) \int_{b_n}^{x} f(t)\,dt\right| < 2^{-n}\varepsilon \quad \textit{pour } b_n \leqslant x \leqslant b_{n+1}$$

Il en résulte par suite de l'existence de la limite L que la fonction $\Phi(x)$, qui n'a été définie jusqu'à présent que dans les intervalles $[b_n, b_{n+1}]$, admet une limite finie l, lorsque x tend vers b. Posons $\Phi(b) = l$.

Ainsi définie dans l'intervalle $[b_1, b]$ tout entier, la fonction $\Phi(x)$ est manifestement continue dans lui et y remplit (en tant qu'une majorante de $f(x)$ dans tout $[b_n, b_{n+1}]$) pour tout $x \neq b$ la relation $-\infty \neq \underline{\Phi}(x) \geqslant f(x)$; de plus, on a d'après (12.10) l'inégalité $\left|\Phi(b) - \Phi(b_1) - \lim_{\eta \to 0} (\mathcal{P}) \int_{b_1}^{b-\eta} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

On définit d'une manière analogue une fonction $\Psi(x)$ continue dans $[b_1, b]$ et telle que l'on ait $+\infty \neq \overline{\Psi}(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \neq b$ et $\left|\Psi(b) - \Psi(b_1) - \lim_{\eta \to 0} (\mathcal{P}) \int_{b_1}^{b-\eta} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. En vertu du lemme 1, p. 211, $f(x)$ admet donc sur l'intervalle $[b_1, b]$ l'intégrale définie $(\mathcal{P})$ égale à $\lim_{\eta \to 0} (\mathcal{P}) \int_{b_1}^{b-\eta} f(x)\,dx$. Par raison de symétrie, $f(x)$ admet l'intégrale définie $(\mathcal{P})$ aussi sur $[a, b_1]$, donc sur I tout entier.

2° *L'intégrale $(\mathcal{P})$ remplit la condition* (H).

Admettons à ce but que la fonction $f(x)$ soit intégrable $(\mathcal{P})$ sur un ensemble fermé E aux bornes a et b, de même que sur tous les intervalles I_k contigus à E, et que les oscillations de son intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ sur ces intervalles forment une série convergente. Il s'agit d'en déduire l'existence de l'intégrale $(\mathcal{P}) \int_I f(x)\,dx = (\mathcal{P}) \int_E f(x)\,dx + \sum_k (\mathcal{P}) \int_{I_k} f(x)\,dx$. Posons à ce but:

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \in E \\ 0 & \textit{pour } x \in I - E \end{cases} \quad \textit{et} \quad g_2(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \in I - E \\ 0 & \textit{pour } x \in E. \end{cases}$$

On aperçoit d'une part que $g_2(x)$ vérifie dans I les hypothèses du lemme 2, de sorte qu'elle est intégrable $(\mathcal{P})$ sur I et on a

$$(12.11) \quad (\mathcal{P}) \int_I g_2(x)\,dx = \sum_k (\mathcal{P}) \int_{I_k} g_2(x)\,dx = \sum_k (\mathcal{P}) \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

D'autre part, $g_1(x)$ est par hypothèse intégrable $(\mathcal{P})$ sur I et

$$(\mathcal{P})\int_I g_1(x)\,dx = (\mathcal{P})\int_E f(x)\,dx\,. \tag{12.12}$$

La fonction $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ est donc également intégrable $(\mathcal{P})$ sur I et l'addition des égalités (12.11) et (12.12) achève la démonstration.

§ 13. **Lemme 3**. *Si une au moins des majorantes d'une fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{P})$ sur un intervalle $I_0 = [a, b]$ est une fonction (VB^*) sur un ensemble $E \subset I_0$, toutes les majorantes et minorantes de $f(x)$, de même que l'intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ de $f(x)$, sont également des fonctions (VB^*) sur E.*

Démonstration. Soient $P(x)$ l'intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ de $f(x)$ dans I_0 et $\Phi_0(x)$ une majorante de $f(x)$ qui est (VB^*) sur E. Etant donnée alors une minorante $\Psi(x)$ quelconque de $f(x)$, la différence $\Phi_0(x) - \Psi(x)$ est monotone dans I_0 tout entier, de sorte que la fonction $\Psi(x) = \Phi_0(x) - [\Phi_0(x) - \Psi(x)]$ est également (VB^*) sur E. Etant donnée à son tour une majorante arbitraire $\Phi(x)$ de $f(x)$, les deux fonctions $\Phi(x) - \Psi(x)$ et $P(x) - \Psi(x)$ sont monotones non décroissantes dans I_0, de sorte que les fonctions $\Phi(x)$ et $P(x)$ sont aussi (VB^*) sur E, c. q. f. d.

Théorème 9 (d'Alexandroff-Looman). *L'intégrale $\mathcal{D}^*$ équivaut à l'intégrale $\mathcal{P}$.*

Démonstration. En raison du th. de Hake, il suffit d'établir la relation $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}^*$.

Soit donc $P(x)$ l'intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle $I_0 = [a, b]$. Nous allons montrer d'abord que $P(x)$ est une fonction (ACG^*) sur I_0.

Considérons à ce but une majorante arbitraire $\Phi_0(x)$ de $f(x)$. On a alors $\underline{\Phi}_0(x) > -\infty$ partout dans I_0 et il en résulte en vertu du th. 21, Chap. IX, § 12, que I_0 se décompose en une suite d'ensembles $\{E_n\}$ sur lesquels $\Phi_0(x)$ est une fonction (VB^*). Nous pouvons évidemment admettre que ces ensembles sont fermés et que chacun d'eux contient a et b.

Ceci dit, soit pour un $\varepsilon > 0$ quelconque donné d'avance $\Phi(x)$ une majorante de $f(x)$ dans I_0 telle que

$$[\Phi(b) - \Phi(a)] - [P(b) - P(a)] \leqslant \varepsilon\,. \tag{13.1}$$

Désignons par $P_n(x)$ et $\Phi_n(x)$ deux fonctions continues égales respectivement à $P(x)$ et à $\Phi(x)$ dans E_n et linéaires dans les intervalles contigus à E_n. Comme $\Phi(x)$ est en vertu du lemme précédent une fonction (VB^*) sur chaque E_n où $n = 1, 2, \dots$, chacune des fonctions $\Phi_n(x)$ est à variation bornée sur I_0 tout entier. Comme d'autre part $\underline{\Phi}_n(x) > -\infty$ partout dans I_0, on a en vertu du th. 15, Chap. VII, § 7, $\underline{E}(\Phi_n; I_0) = 0$. La fonction $\Phi(x) - P(x)$, donc aussi $\Phi_n(x) - P_n(x)$, étant monotone non décroissante dans I_0, on conclut de (13.1) que pour toute suite finie d'intervalles $[a_i, b_i]$ situés sur I_0 et n'empiétant pas l'un sur l'autre on a l'inégalité $\sum_i [\Phi_n(b_i) - \Phi_n(a_i)] - \sum_i [P_n(b_i) - P_n(a_i)] \leqslant \varepsilon$, de sorte que $\underline{E}(\Phi_n; I) = 0$ entraîne $\underline{E}(P_n; I_0) \geqslant -\varepsilon$, d'où, ε étant arbitraire, $\underline{E}(P_n; I_0) = 0$. On prouve d'une façon tout à fait analogue (par l'application des minorantes au lieu des majorantes) que l'on a aussi $\overline{E}(P_n; I_0) = 0$. Par conséquent $P(x)$ est une fonction (AC) sur chacun des ensembles E_n, donc (ACG) sur I_0 tout entier.

Or, $P(x)$, en même temps que $\Phi_0(x)$, est en outre, d'après le lemme 3, une fonction (VB^*) sur chaque E_n, donc (VBG^*) sur I_0 tout entier. Comme une fonction à la fois (ACG) et (VBG^*), $P(x)$ est également en vertu du th. 14, Chap. VIII, § 16, une fonction (ACG^*) sur I_0 et comme on a de plus, en vertu du th. 7, Chap. VII, § 5, $P'(x) = f(x)$ presque partout dans I_0, la fonction $P(x)$ y est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D}^*)$ de $f(x)$, c. q. f. d.

Intégrales généralisées de Cauchy et de Harnack.

§ 14. Avant de passer à la définition *constructive* des intégrales de Denjoy, qui en retablit explicitement la liaison avec les généralisations classiques connues sous le nom des intégrales généralisées de Cauchy et de Harnack, nous allons préciser les notions de ces dernières en termes des opérations intégrales générales, introduites au § 7.

Appelons un point a point *singulier* d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle I_0 par rapport à une opération intégrale $\mathcal{T}$ ou, pour abréger, *point singulier* $(\mathcal{T})$ *de* $f(x)$ *dans* I_0, s'il existe des intervalles I aussi petits que l'on veut, contenant a, contenus dans I_0 et sur lesquels $f(x)$ n'est pas intégrable $(\mathcal{T})$.

On conclut immédiatement de cette définition que l'ensemble des points singuliers d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle quelconque I est toujours *fermé*. De plus, on en déduit aisément par les partages successifs en deux moitiés (cf. p. 210) que si cet ensemble est vide, la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{T})$ sur I.

Ceci dit, faisons correspondre à toute opération intégrale $\mathcal{T}$ une autre opération intégrale $\mathcal{T}^C$ définie comme suit: étant donné un intervalle $I_0 = [a, b]$ quelconque, au domaine de l'opération $\mathcal{T}^C$ sur I_0 appartiennent toutes les fonctions $f(x)$ qui vérifient les conditions:

(c_1) l'ensemble des points singuliers $(\mathcal{T})$ de $f(x)$ dans I_0 est fini (ou vide),

(c_2) il existe une fonction $F(x)$ continue dans I_0 et telle que pour tout sous-intervalle $I = [\alpha, \beta]$ de I_0 ne contenant aucun point singulier $(\mathcal{T})$ de $f(x)$ on a la relation $F(\beta) - F(\alpha) = \mathcal{T}(f; I)$.

Une telle fonction $F(x)$ (s'il en existe) étant déterminée par les conditions (c_1) et (c_2) à une constante additive près, nous écrirons $\mathcal{T}^C(f; I_0) = F(b) - F(a)$. Ainsi définie, l'opération $\mathcal{T}^C$ satisfait, comme on l'aperçoit de suite, aux conditions (I)—(III), p. 204—205; elle est donc une opération intégrale et correspond à $\mathcal{T}$ d'une manière univoque. Nous l'appellerons *intégrale généralisée* $(\mathcal{T})$ de Cauchy. Il est évident que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^C$.

§ 15. Faisons correspondre d'autre part à toute opération intégrale $\mathcal{T}$ une opération $\mathcal{T}^H$, définie comme suit: le domaine de $\mathcal{T}^H$ sur un intervalle arbitraire I_0 comprend toutes les fonctions $f(x)$ définies sur I_0 et satisfaisant aux conditions:

(h_1) S désignant l'ensemble de tous les points singuliers $(\mathcal{T})$ de $f(x)$ dans I_0, $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{T})$ sur l'ensemble S et sur chacun des intervalles I_k contigus à l'ensemble formé de points de S et d'extrémités de I_0,

(h_2) $\sum_k |\mathcal{T}(f; I_k)| < +\infty$ et, en cas où la suite $\{I_k\}$ est infinie, $\lim_k \omega(\mathcal{T}; f; I_k) = 0$.

Etant donnée une telle fonction $f(x)$, nous posons par définition: $\mathcal{T}^H(f; I_0) = \sum_k \mathcal{T}(f; I_k) + \mathcal{T}(f; S)$.

Ainsi définie, l'opération $\mathcal{T}^H$ satisfait, comme on voit aisément, aux conditions (I)—(III), p. 204—205; elle est donc une opération intégrale. Nous l'appellerons *intégrale généralisée* $(\mathcal{T})$ *de* Harnack.

On obtient une modification de l'intégrale $\mathcal{T}^H$, en remplaçant la condition (h_2) par la condition plus restrictive suivante

$$(h_2^*) \qquad \sum_k \omega(\mathcal{T}; f; I_k) < +\infty.$$

L'intégrale généralisée définie par les conditions (h_1) et (h_2^*) sera dite *intégrale généralisée* $(\mathcal{T})$ *de Harnack au sens restreint* ou *intégrale* $(\mathcal{T}^{H*})$. On a évidemment $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^{H*} \subset \mathcal{T}^H$.

Nous avons appelé les opérations $\mathcal{T}^H$ et $\mathcal{T}^{H*}$ intégrales généralisées de Harnack par suite de leur parenté évidente avec la généralisation connue de l'intégrale de Riemann, due à A. Harnack, et qui permet d'appliquer le procédé riemannien d'intégration à certaines fonctions admettant des valeurs infinies dans un ensemble non dénombrable de points. Le procédé de M. Harnack correspond d'ailleurs à l'opération $\mathcal{T}^{H*}$ plutôt qu'à l'opération $\mathcal{T}^H$. Cf. A. Harnack [2] et A. Rosenthal [I, p. 1053].

En ajoutant aux conditions (h_1) et (h_2), qui caractérisent l'intégrale généralisée $\mathcal{T}^H$, la condition suivante:

$$\lim_k \frac{\omega(\mathcal{T}; f; I_k)}{\rho(x, I_k)} = 0 \quad \textit{pour presque tous } x \in S,$$

on parviendrait à une intégrale généralisée $\mathcal{T}^{H'}$, intermédiaire entre $\mathcal{T}^H$ et $\mathcal{T}^{H*}$. En appliquant ensuite $\mathcal{T}^{H'}$ dans la définition constructive des intégrales de Denjoy, qui va suivre, on obtiendrait une intégrale $\mathcal{D}'$, intermédiaire entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$. Sa définition descriptive est fort simple: *une fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D}')$, lorsqu'elle est intégrable $(\mathcal{D})$ et lorsque son intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ est presque partout dérivable au sens ordinaire.* Cette intégrale a été considérée par M. A. Khintchine [1]; cf. aussi J. C. Burkill [1].

Définition constructive des intégrales de Denjoy.

§ 16. Les notions d'intégrales généralisées de Cauchy et de Harnack conduisent d'une façon naturelle à la définition dite *constructive* des intégrales de Denjoy (cf. A. Denjoy [6, Chap. II]), basée sur l'induction transfinie. Nous l'avons évitée jusqu'à présent pour ne pas faire intervenir dans notre exposé les nombres transfinis.

Fixons d'abord la notation. Soit $\{\mathcal{T}_\xi\}$ une suite d'opérations intégrales, en général transfinie, et telle que $\mathcal{T}_\xi \subset \mathcal{T}_\eta$ pour $\xi < \eta$. Nous désignerons alors par $\sum_{\xi<\alpha} \mathcal{T}_\xi$ l'opération intégrale $\mathcal{T}$ dont le domaine, quel que soit l'intervalle I, est la somme des domaines des intégrales $\mathcal{T}_\xi$ pour $\xi < \alpha$ et qui est définie pour toute fonction $f(x)$ appartenant à son domaine par l'égalité

$$\mathcal{T}(f;I)=\mathcal{T}_{\xi_0}(f;I)$$

où ξ_0 est le moindre des indices $\xi<\alpha$ tels que $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{T}_\xi)$ sur I. Cette égalité entraîne d'ailleurs pour tout $\xi>\xi_0$ les égalités $\mathcal{T}(f;I)=\mathcal{T}_\xi(f;I)$, puisque par hypothèse $\mathcal{T}_\xi$ embrasse alors $\mathcal{T}_{\xi_0}$.

Ceci dit, soient $\{\mathcal{L}_\xi\}$ et $\{\mathcal{L}_\xi^*\}$ deux suites transfinies, définies par induction à partir de l'intégrale de Lebesgue comme il suit:

$$\mathcal{L}_0=\mathcal{L}_0^*=\mathcal{L},$$

$$\mathcal{L}_\alpha=\Big(\sum_{\xi<\alpha}\mathcal{L}_\xi\Big)^{CH} \quad et \quad \mathcal{L}_\alpha^*=\Big(\sum_{\xi<\alpha}\mathcal{L}_\xi^*\Big)^{CH*} \quad où \quad \alpha>0.$$

Nous allons montrer que

$$\mathcal{D}=\sum_{\xi<\Omega}\mathcal{L}_\xi=\mathcal{L}_\Omega \quad et \quad \mathcal{D}^*=\sum_{\xi<\Omega}\mathcal{L}_\xi^*=\mathcal{L}_\Omega^*,$$

en nous bornant d'ailleurs au cas de $\mathcal{D}$ (celui de $\mathcal{D}^*$ se déduisant d'une manière tout à fait analogue).

Or, $\mathcal{D}$ étant en vertu du th. 6, p. 206, une intégrale complète et qui embrasse $\mathcal{L}$, on trouve aussitôt par induction que, quel que soit ξ, on a $\mathcal{L}_\xi\subset\mathcal{D}$, d'où évidemment $\sum_{\xi<\Omega}\mathcal{L}_\xi\subset\mathcal{D}$. Pour que cette relation devienne identité, il suffit donc de prouver que toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{D})$ sur un intervalle $I_0=[a,b]$ y est intégrable $(\mathcal{L}_\xi)$ pour un indice $\xi<\Omega$.

S_ξ désignant l'ensemble des points singuliers $(\mathcal{L}_\xi)$ de $f(x)$ dans I_0, la suite $\{S_\xi\}$, en tant qu'une suite descendante d'ensembles fermés, est au plus dénombrable, c. à d. qu'il existe un indice $\nu<\Omega$ tel que $S_\nu=S_{\nu+1}$.

En effet, dans le cas contraire il existerait pour tout $\xi<\Omega$ un point $x\in S_\xi-S_{\xi+1}$, donc aussi un intervalle I_ξ aux extrémités rationnelles, contenant le point x de S_ξ, mais disjoint de l'ensemble fermé $S_{\xi+1}$ et, par suite, des ensembles $S_{\xi+2}, S_{\xi+3}\dots$ On obtiendrait ainsi une suite transfinie du type Ω d'intervalles **différents** aux extrémités rationnelles, ce qui est impossible, l'ensemble de tous les couples de nombres rationnels étant dénombrable.

Il suffit évidemment de prouver que l'ensemble $S_\nu=S_{\nu+1}$ est soit vide, soit composé tout au plus d'extrémités de I_0, car dans le premier cas $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{L}_\nu)$ sur I_0 et dans le second

cas elle est intégrable $(\mathcal{L}_\nu^C)$, donc intégrable $(\mathcal{L}_{\nu+1})$ sur I_0, puisque $\mathcal{L}_\nu^C\subset\mathcal{L}_\nu^{CH}=\mathcal{L}_{\nu+1}$.

Supposons donc, par contre, que l'ensemble $S_\nu=S_{\nu+1}$ contienne des points intérieurs de I_0. En vertu du lemme, p. 208, S_ν renferme alors une portion P telle que $f(x)$ est sommable sur P et que la série des intégrales définies $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ sur les intervalles contigus à P est absolument convergente. Considérons un intervalle I contenant à l'intérieur des points de $P\subset S_\nu$ et choisi de façon que l'on ait $P\cdot I=S_\nu\cdot I$; soit $\{I_k\}$ la suite des sous-intervalles de I contigus à l'ensemble formé de points de $P\cdot I$ et d'extrémités de I. Par définition, aucun d'intervalles I_k ne contient à l'intérieur de points singuliers $(\mathcal{L}_\nu)$ de $f(x)$. Il en résulte que $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{L}_\nu)$ sur tous les intervalles situés à *l'intérieur* d'un I_k quelconque et, comme $\mathcal{L}_\nu\subset\mathcal{D}$, que son intégrale $(\mathcal{L}_\nu)$ y coïncide avec son intégrale $(\mathcal{D})$. La fonction $f(x)$ est par conséquent intégrable $(\mathcal{L}_\nu^C)$ sur chacun des intervalles I_k et il vient $\mathcal{L}_\nu^C(f;I_k)=(\mathcal{D})\int_{I_k}f(x)\,dx$ et $\omega(\mathcal{L}_\nu^C;f;I_k)=\omega(\mathcal{D};f;I_k)$, d'où

$$\sum_k|\mathcal{L}_\nu^C(f;I_k)|<+\infty, \tag{16.1}$$

et en outre, dans le cas où la suite $\{I_k\}$ est infinie,

$$\lim_k\omega(\mathcal{L}_\nu^C;f;I_k)=0. \tag{16.2}$$

D'autre part, comme sommable sur P, la fonction $f(x)$ est à plus forte raison intégrable $(\mathcal{L}_\nu^C)$ sur P. En vertu de (16.1) et (16.2) elle est donc intégrable $(\mathcal{L}_\nu^{CH})$, c. à d. intégrable $(\mathcal{L}_{\nu+1})$ sur l'intervalle I tout entier. On aboutit ainsi à une contradiction, puisque I contient à l'intérieur des points de $P\subset S_\nu=S_{\nu+1}$ c. à d. des points singuliers $(\mathcal{L}_{\nu+1})$ de $f(x)$ dans I.