CHAPITRE IX.

Théorèmes sur les nombres dérivés.

Préliminaires.

§ **1.** Nous consacrons ce chapitre à l'étude des nombres dérivés des fonctions plus générales que celles dont nous avons eu affaire jusqu'à présent et qui ont été d'habitude dérivables presque partout (au moins approximativement).

Nous allons commencer par une série des théorèmes concernant les relations générales entre les nombres dérivés des fonctions tout à fait arbitraires. Nous passerons ensuite à l'étude des fonctions qui remplissent certaines conditions de Banach, liées à la condition (N) de Lusin. Enfin, nous nous occuperons des problèmes, pour ainsi dire, inverses: nous établirons certains critères, trouvés par M. Denjoy, et qui permettent de ranger une fonction dans une des classes étudiées au Chap. VIII d'après la manière dont se comportent les nombres dérivés de cette fonction.

Il sera sous-entendu dans tous les énoncés de ce chapitre (tout comme dans ceux du Chap. VIII) que les fonctions considérées sont définies toujours dans un intervalle entier.

Deux théorèmes élémentaires.

§ **2.** Nous dirons qu'une fonction $F(x)$ atteint dans un point x_0 son *maximum au sens strict*, s'il existe un intervalle I contenant x_0 à l'intérieur et tel que l'on a pour tout point $x \neq x_0$ de I l'inégalité $F(x_0) > F(x)$. La définition du *minimum au sens strict* est symétrique.

Théorème 1 (de Sierpiński). *L'ensemble des points où une fonction quelconque $F(x)$ atteint son maximum ou son minimum au sens strict est au plus dénombrable.*

Démonstration. D désignant l'ensemble des points où la fonction $F(x)$ atteint p. ex. son maximum au sens strict, faisons correspondre à tout point $x_0 \in D$ un intervalle I aux extrémités rationnelles, contenant x_0 à l'intérieur et tel que l'on ait $F(x_0) > F(x)$ pour tout $x \neq x_0$ de I. Il est évident qu'un tel intervalle ne peut correspondre que tout au plus à un seul point $x_0 \in D$. Or, l'ensemble de tous les intervalles aux extrémités rationnelles étant, comme on sait, dénombrable, il en est donc (tout au plus) de même de l'ensemble D.

Théorème 2. *Pour toute fonction finie $F(x)$ on a à peu près* [1]) *partout*

$$(2.1) \qquad \overline{F}^+(x) \geqslant \underline{F}^-(x) \quad et \quad \overline{F}^-(x) \geqslant \underline{F}^+(x).$$

Démonstration. Par raison de symétrie, on peut se borner à la première des inégalités (2.1). Il s'agit de prouver que l'ensemble des points D où elle *est en défaut* est au plus dénombrable.

Or, soit à ce but pour tout couple m, n de nombres entiers $D_{m,n} = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\overline{F}^+(x) < \frac{m}{n} < \underline{F}^-(x)\right]$. On a évidemment $D = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n}$. En posant $F_{m,n}(x) = F(x) - \frac{m}{n}x$, on a donc pour tout point $x \in D_{m,n}$ les inégalités $\overline{F}^+_{m,n}(x) < 0 < \underline{F}^-_{m,n}(x)$, et on en déduit aisément que dans chacun de ces points la fonction $F_{m,n}(x)$ atteint son maximum au sens strict. En vertu du th. 1 les ensembles $D_{m,n}$ sont donc au plus dénombrables et comme ils forment une famille dénombrable, il en est de même de leur somme D.

Pour le th. 1 voir A. Schönflies [I, p. 158] et W. Sierpiński [7]. Il est facile de voir que ce théorème subsiste dans tout espace métrique séparable (voir p. ex. G. Hausdorff [I, p. 363]).

Pour le th. 2 et ses généralisations voir B. Levi [1], W. Sierpiński [6], A. Rosenthal [1], G. C. Young [1], A. Denjoy [1, p. 147] et H. Blumberg [1].

Théorèmes de Denjoy.

§ 3. Le th. 2 exprime une des relations entre les nombres dérivés d'une fonction quelconque, annoncées au § 1. Cette relation est particulièrement simple et elle est remplie *à peu près*

[1]) voir la définition, p. 126.

partout. Moins simples et pénétrant plus profondément dans la théorie lebesguienne des fonctions sont les relations remplies *presque partout* que nous allons étudier à présent.

Elles ont été d'abord établies par M. A. Denjoy [1] pour les fonctions continues; pour les généralisations sur les fonctions arbitraires, voir G. C. Young [2], N. Lusin [I, p. 141—147], F. Riesz [5], S. Saks [1] et J. Ridder [1]; cf. aussi A. Besicovitch [2], J. C. Burkill et U. S. Haslam-Jones [1].

Pour simplifier les énoncés, appelons (avec M. Denjoy) *dérivés opposés* les couples des nombres $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^-(x)$ et $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^+(x)$ et *dérivés associés* les couples $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^+(x)$ et $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^-(x)$ respectivement.

Lemme 1. *Si ξ_0 est un point de densité extérieure d'un ensemble A, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que, quel que soit ξ, l'inégalité $0 < \xi_0 - \xi < \eta$ entraîne l'existence d'un point $\xi' \in A$ satisfaisant aux inégalités*

$$(3.1) \qquad \xi' < \xi < \xi_0 \quad et \quad \xi_0 - \xi' < (1+\varepsilon)(\xi_0 - \xi).$$

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < 1$. L'ensemble A admettant dans ξ_0 un point de densité extérieure, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait pour tout nombre positif $\gamma < 2\eta$

$$(3.2) \qquad |\underset{x}{\mathrm{E}}[\xi_0 - \gamma < x < \xi_0; x \in A]| > \frac{\gamma}{1+\varepsilon}.$$

Comme $\varepsilon < 1$, l'inégalité $0 < \xi_0 - \xi < \eta$ entraîne la relation $0 < (1+\varepsilon)(\xi_0 - \xi) \leqslant 2(\xi_0 - \xi) \leqslant 2\eta$. Nous pouvons donc poser dans (3.2) $\gamma = (1+\varepsilon)(\xi_0 - \xi)$, ce qui donne

$$|\underset{x}{\mathrm{E}}[\xi - \varepsilon(\xi_0 - \xi) < x < \xi_0; x \in A]| > \xi_0 - \xi.$$

D'autre part, on a évidemment l'inégalité

$$|\underset{x}{\mathrm{E}}[\xi \leqslant x \leqslant \xi_0; x \in A]| \leqslant \xi_0 - \xi.$$

Les deux inégalités donnent par soustraction membre à membre $|\underset{x}{\mathrm{E}}[\xi - \varepsilon\cdot(\xi_0 - \xi) < x < \xi; x \in A]| > 0$, c. à d. que l'ensemble des points $\xi' \in A$ qui satisfont à la condition $\xi - \varepsilon\cdot(\xi_0 - \xi) < \xi' < \xi$ n'est sûrement pas vide. Or, cette condition équivaut aux inégalités (3.1).

Lemme 2. *Si une fonction finie $F(x)$ admet presque partout dans un ensemble E de mesure extérieure positive un nombre dérivé supérieur de Dini différent de $+\infty$ ou un nombre dérivé inférieur différent de $-\infty$, il existe un ensemble $A \subset E$, aussi de mesure extérieure positive, dans lequel $F(x)$ admet presque partout une dérivée relative* [1] *$F'_A(x)$ finie et égale au nombre dérivé opposé à celui-là.*

Démonstration. On peut se borner évidemment au cas où l'on a l'inégalité $\overline{F}^+(x) < +\infty$ partout dans l'ensemble E.

Etant donné un entier positif n quelconque, désignons par E_n l'ensemble des points $x \in E$ tel que pour tout x'

$$(3.3) \quad 0 < x' - x \leqslant n^{-1} \quad \textit{entraîne} \quad F(x') - F(x) < n \cdot (x' - x).$$

Pour tout entier i soit E_n^i la partie commune de E_n et de l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Il vient $E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_n^i$, de sorte que l'hypothèse $|E| > 0$ entraîne l'existence d'un couple d'indices n_0, i_0 tels que $|E_{n_0}^{i_0}| > 0$.

Or, soit A le sous-ensemble de $E_{n_0}^{i_0}$ composé de tous ses points de densité extérieure. En vertu du th. de Lebesgue sur les points de densité (Chap. III, § 6, th. 5), on a alors $|A| = |E_{n_0}^{i_0}| > 0$ et tout point de A en est un point de densité extérieure. En posant $G(x) = F(x) - n_0 \cdot x$, on a donc $G(x') - G(x) = F(x') - F(x) - n_0 \cdot (x' - x)$, de sorte que, en vertu de (3.3),

$$(3.4) \quad 0 < x' - x \leqslant n_0^{-1} \quad \textit{entraîne} \quad G(x') < G(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in A.$$

Comme $\delta(A) \leqslant n_0^{-1}$, l'inégalité $G(x') < G(x)$ est remplie en particulier pour tout couple x, x' de A où $x < x'$. La fonction $G(x)$ est donc monotone décroissante sur A et, comme telle, elle est dérivable par rapport à A en presque tout point de A (cf. Chap. VIII, § 6, th. 2).

Soit donc ξ_0 un point de A où la dérivée $G'_A(x)$ existe et est finie. Etant donné un nombre positif $\varepsilon < 1$ on peut faire correspondre d'après le lemme 1 à tout point $\xi < \xi_0$ assez proche de ξ_0 un $\xi' \in A$ tel que l'on ait

$$(3.5) \qquad \xi' < \xi < \xi_0 \quad \textit{et} \quad \xi_0 - \xi' \leqslant (1+\varepsilon)(\xi_0 - \xi).$$

[1] c. à d. dérivée *par rapport* à A, voir la définition, p. 147.

Il en résulte d'abord que $0 < \xi - \xi' < \xi_0 - \xi' \leqslant \delta(A) \leqslant n_0^{-1}$, d'où en vertu de (3.4), en y posant respectivement $x = \xi'$, $x' = \xi_0$ et $x = \xi'$, $x' = \xi$, on obtient $G(\xi_0) - G(\xi') < 0$ et $G(\xi) - G(\xi') < 0$. Par conséquent, en raison de la seconde des inégalités (3.5) on a

$$(3.6) \quad \frac{G(\xi_0) - G(\xi')}{\xi_0 - \xi'} \leqslant \frac{G(\xi_0) - G(\xi')}{(1+\varepsilon)(\xi_0 - \xi)} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{G(\xi_0) - G(\xi)}{\xi_0 - \xi}.$$

Or, quand ξ tend vers ξ_0 du côté gauche, le point ξ' tend également vers ξ_0, mais en parcourant uniquement les points de A. En conséquence, le nombre positif $\varepsilon < 1$ étant arbitraire, (3.6) donne $G'_A(\xi_0) \leqslant \underline{G}^-(\xi_0)$. D'autre part, il est évident que $G'_A(\xi_0) \geqslant \underline{G}^-(\xi_0)$. On obtient donc finalement $\infty \neq G'_A(\xi_0) = \underline{G}^-(\xi_0)$ pour tout $\xi_0 \in A$ où la dérivée $G'_A(\xi_0) \neq \infty$ existe, c. à d. presque partout dans A. Par conséquent, en revenant à la fonction $F(x) = G(x) - n_0 x$, on a presque partout dans A la relation équivalente $\infty \neq F'_A(\xi_0) = \underline{F}^-(\xi_0)$, c. q. f. d.

Théorème 3. *Si, pour une fonction finie $F(x)$ un des dérivés supérieurs $\overline{F}^+(x)$ et $\overline{F}^-(x)$ diffère de $+\infty$ ou bien un des dérivés inférieurs $\underline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^-(x)$ diffère de $-\infty$ presque partout dans un ensemble E, ce dérivé est dans E presque partout fini et égal à son dérivé opposé.*

Démonstration. En admettant p. ex. que $\overline{F}^+(x) < +\infty$ presque partout dans E et en désignant par H l'ensemble des points où la relation

$$(3.7) \qquad \overline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x) \neq \infty$$

est en défaut, il s'agit de montrer que $|H| = 0$.

Supposons, par contre, que $|H| > 0$. En vertu du lemme 2 l'ensemble H contient par conséquent un ensemble A de mesure extérieure positive, tel que la dérivée relative $F'_A(x)$ existe presque partout dans A et que

$$(3.8) \quad \underline{F}^-(x) = F'_A(x) \neq \infty \quad \textit{pour presque tout} \quad x \in A.$$

Comme $|A| > 0$, nous pouvons appliquer à A et à $\underline{F}^-(x)$ le même lemme 2 et parvenir ainsi à un ensemble $B \subset A \subset H$ de mesure positive et tel que $F'_A(x) = F'_B(x) = \overline{F}^+(x)$ pour presque tout $x \in B$. Il en résulte selon (3.8) que la relation (3.7) est remplie presque partout dans $B \subset H$, contrairement à l'hypothèse qu'elle est en défaut pour tout $x \in H$. Ainsi $|H| = 0$, c. q. f. d.

Pour les autres dérivés de $F(x)$ la démonstration est analogue.

Théorème 4. *Toute fonction finie $F(x)$ qui admet presque partout dans un ensemble E deux dérivés associés finis est presque partout dérivable dans E.*

Démonstration. Admettons, pour fixer les idées, que ce soient les dérivés $\overline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^+(x)$ qui sont finis presque partout dans E. On y a alors selon le th. 3 les égalités $\overline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x)$ et $\underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x)$, qui entraînent en vertu des inégalités évidentes $\overline{F}^+(x) \geqslant \underline{F}^+(x)$ et $\overline{F}^-(x) \geqslant \underline{F}^-(x)$ l'égalité de tous les quatre dérivés de Dini pour presque tout point $x \in E$. Or, deux au moins de ces dérivés étant finis par hypothèse, la dérivabilité de $F(x)$ presque partout dans E se trouve ainsi établie, c. q. f. d.

Théorème 5. *Si, pour une fonction finie $F(x)$, on a $\overline{F}(x) \neq +\infty$ ou bien $\underline{F}(x) \neq -\infty$ presque partout dans un ensemble E, la fonction $F(x)$ est presque partout dérivable dans E.*

Démonstration. Par raison de symétrie, nous pouvons nous borner au cas où $\overline{F}(x) \neq +\infty$, donc où simultanément $\overline{F}^+(x) < +\infty$ et $\overline{F}^-(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in E$. En vertu du th. 3 les quatre dérivés de Dini sont alors presque partout finis dans E et par conséquent la fonction $F(x)$ est en vertu du th. 4 presque partout dérivable dans cet ensemble.

Théorème 6. *Pour toute fonction finie $F(x)$ tous les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}^+(x) = -\infty]$, $\underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}^-(x) = -\infty]$, $\underset{x}{\mathrm{E}}[\underline{F}^+(x) = +\infty]$ et $\underset{x}{\mathrm{E}}[\underline{F}^-(x) = +\infty]$ sont de mesure nulle.*

Démonstration. Posons p. ex. $E = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}^+(x) = -\infty]$ et supposons que $|E| > 0$. En vertu du lemme 2 il existe par conséquent un ensemble $A \subset E$ tel que $|A| > 0$ et dans lequel $F(x)$ admet presque partout la dérivée $F'_A(x)$ *finie*. Or, c'est évidemment impossible, puisque en tout point $x \in A \subset E$ où cette dérivée existe on a par définition de E l'inégalité $F'_A(x) \leqslant \overline{F}^+(x) = -\infty$.

Corollaire. *L'ensemble des points où une fonction finie admet une dérivée déterminée infinie est toujours de mesure nulle.*

Nous avons déduit le th. 6 comme une conséquence du lemme 2, p. 170, mais ce théorème peut être établi aussi par un raisonnement direct très facile (cf. S. Banach [5]). Plus généralement, on peut prouver que *pour toute fonction $F(x)$ l'ensemble des points où l'on a $\lim\limits_{h \to 0+} \left| \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| < \infty$ est de mesure nulle.* La démonstration en est toutefois un peu moins simple (cf. S. Saks et A. Zygmund [1]).

§ 4. Le théorème suivant, dû à M. Denjoy, exprime une relation entre les nombres dérivés de Dini d'une fonction et la dérivabilité approximative de cette fonction.

Théorème 7. *Si un des nombres dérivés de Dini d'une fonction $F(x)$, finie et mesurable dans un ensemble mesurable E, est presque partout fini dans E, il y est presque partout la dérivée approximative de $F(x)$.*

Démonstration. En admettant p. ex. que $\overline{F}^+(x) \neq \infty$, quel que soit $x \in E$, nous allons montrer d'abord que, H désignant l'ensemble des points $x \in E$ où $F(x)$ n'est pas approximativement dérivable, on a $|H| = 0$.

Supposons, par contre, que $|H| > 0$. En vertu du lemme 2, p. 170, H contient donc un ensemble A de mesure positive et tel que $F'_A(x) \neq \infty$ existe pour presque tout $x \in A$.

Soit donc $x_0 \in A$ un point de densité extérieure de A où la dérivée $F'_A(x)$ existe et est finie. Posons pour tout $\varepsilon > 0$

$$E_\varepsilon = E \cdot \underset{x}{\mathrm{E}}\left[F'_A(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant F'_A(x_0) + \varepsilon\right].$$

Il est évident que E_ε contient tous les points de A qui sont assez proches de x_0. Le point x_0 est donc également un point de densité extérieure de E_ε. Mais la fonction $F(x)$ étant par hypothèse mesurable sur E, il en est de même de la fonction $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ et l'ensemble E_ε est aussi mesurable. Par conséquent, le complémentaire CE_ε admet x_0 comme un point de dispersion. En particulier, x_0 est donc un point de dispersion de chacun des ensembles

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} > F'_A(x_0) + \varepsilon\right] \quad et \quad \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < F'_A(x_0) - \varepsilon\right],$$

ce qui donne par définition des dérivés approximatifs extrêmes (cf. Chap. VIII, § 4, p. 146) $F'_A(x_0) - \varepsilon \leqslant \underline{F}_{ap}(x_0) \leqslant \overline{F}_{ap}(x_0) \leqslant F'(x_0) + \varepsilon$. Il en résulte, ε étant arbitraire, que $\overline{F}_{ap}(x_0) = \underline{F}_{ap}(x_0) = F'_A(x_0) \neq \infty$, de sorte que $F(x)$ serait approximativement dérivable dans le point x_0 de $A \subset H$, contrairement à la définition de H. On a donc en effet $|H| = 0$.

Ceci établi, il reste à montrer que l'on a $\overline{F}^+(x) = F'_{ap}(x)$ presque partout dans E. Or, c'est une conséquence directe des relations $\underline{F}^-(x) \leqslant F'_{ap}(x) \leqslant \overline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^-(x) = \overline{F}^+(x)$, dont la première se présente dans tout point où $F(x)$ est approximativement dérivable et la seconde presque partout dans E, en raison du th. **3**, p. 171.

* § **5**. Les évaluations que nous avons données pour la mesure du transformé $F(E)$ d'un ensemble quelconque E *dans lequel* $F(x)$ *est partout dérivable* (voir Chap. VIII, § 11, p. 156) montrent en particulier que $|E| = 0$ *entraîne alors* $|F(E)| = 0$. En vue des considérations ultérieures nous allons prouver davantage, à savoir que $|E| = 0$ implique $|F(E)| = 0$ déjà dans l'hypothèse qu'un des quatre dérivés de D i n i de la fonction $F(x)$ est fini dans tout point de E.

Lemme. *Etant donnée une fonction finie* $F(x)$ *qui satisfait partout dans un ensemble* E *à l'inégalité* $|\overline{F}^+(x)| < M$, *on a* $|F(E)| \leqslant 7M \cdot |E|$.

Démonstration. Soient a et b les bornes de E, $I = [a, b]$ et E_n, pour $n = 1, 2, \ldots$, l'ensemble des points x de E tels que

$$(5.1) \qquad 0 < x' - x < \frac{1}{n} \text{ entraîne } \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} < M \text{ pour tout } x'.$$

Les suites $\{E_n\}$ et $\{F(E_n)\}$ sont donc monotones non décroissantes et on a $E = \sum_n E_n$ et $F(E) = \sum_n F(E_n)$, d'où évidemment $|F(E)| = \lim_n |F(E_n)|$.

Fixons pour l'instant d'une façon arbitraire la valeur de l'indice n et considérons un ensemble ouvert G_n tel que $E_n \subset G_n$ et que

$$(5.2) \qquad |G_n| < |E_n| + \frac{1}{n}.$$

Comme on a par hypothèse $|\overline{F}^+(x)| < M$ pour tout $x \in E$, on peut faire correspondre à chaque point $x \in E_n$, pour tout $\varepsilon > 0$, un point $\xi \in G_n$ assujetti aux conditions

$$0 < \xi - x < \frac{1}{2n} \quad et \quad |F(\xi) - F(x)| < M \cdot (\xi - x) < M \cdot \varepsilon.$$

Le nombre ε étant aussi petit que l'on veut, la dernière formule permet d'obtenir par l'application du th. de V i t a l i (Chap. II, § 7, th. 14) à l'ensemble $F(E_n)$ une suite finie d'intervalles $[x_1, \xi_1], [x_2, \xi_2], \ldots, [x_m, \xi_m]$ satisfaisant pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$ aux conditions:

$$(5.3) \qquad [x_k, \xi_k] \subset G_n,$$

$$(5.4) \qquad x_k \in E_n \quad et \quad 0 < \xi_k - x_k < \frac{1}{2n},$$

$$(5.5) \qquad \frac{|F(\xi_k) - F(x_k)|}{\xi_k - x_k} < M,$$

(5.6) *les intervalles* $[F(x_k), F(\xi_k)]$ [1]) *sont deux à deux disjoints*,

$$(5.7) \qquad |F(E_n)| < \left| \sum_{k=1}^{m} [F(x_k), F(\xi_k)] \right| + \frac{1}{n}.$$

Désignons à présent pour tout couple i, j de valeurs de k par $\lambda(i, j)$ la longueur du plus grand des intervalles $[x_i, \xi_i]$ et $[x_j, \xi_j]$ et par $\rho(i, j)$ la distance entre les intervalles $[F(x_i), F(\xi_i)]$ et $[F(x_j), F(\xi_j)]$. Nous allons montrer que *pour tout couple d'intervalles* $[x_i, \xi_i]$ et $[x_j, \xi_j]$ *qui admettent des points communs on a l'inégalité*

$$(5.8) \qquad \rho(i, j) \leqslant 2M \cdot \lambda(i, j).$$

En effet, nous pouvons admettre grâce à (5.6) que ce soit $[F(x_i), F(\xi_i)]$ qui précède $[F(x_j), F(\xi_j)]$, donc que

$$(5.9) \qquad F(x_i) < F(\xi_j).$$

D'autre part, les intervalles $[x_i, \xi_i]$ et $[x_j, \xi_j]$ ayant par hypothèse des points communs, on a $x_i < \xi_j$, d'où en vertu de (5.4)

[1]) en désignant ici de la sorte les intervalles aux extrémités $F(x_k)$ et $F(\xi_k)$, sans que cette notation entraîne $F(x_k) < F(\xi_k)$ (bien que $x_k < \xi_k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$).

$0 < \xi_j - x_i \leqslant 2\lambda(i,j) < n^{-1}$. Il en résulte selon (5.9) et (5.1) que $0 < F(\xi_j) - F(x_i) < M\cdot(\xi_j - x_i) \leqslant 2\,M\cdot\lambda(i,j)$, d'où l'inégalité (5.8) en question.

Ceci établi, désignons par I_1 le plus long des intervalles $[x_k, \xi_k]$ où $k = 1, 2, \ldots, m$ et pour tout $p > 1$ par I_p le plus long des intervalles $[x_k, \xi_k]$ qui n'empiètent sur aucun des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_{p-1}$. La suite $\{I_p\}$ où $p = 1, 2, \ldots, q \leqslant m$ est donc extraite de la suite $\{[x_k, \xi_k]\}$ où $k = 1, 2, \ldots, m$ de façon que chaque intervalle $[x_k, \xi_k]$ empiète au moins sur un I_p tel qu'il ne le dépasse pas de longueur.

Or, soit R_p la somme des intervalles $[F(x_k), F(\xi_k)]$ correspondant aux intervalles $[x_k, \xi_k]$ qui empiètent sur I_p sans le dépasser de longueur. On a alors d'après (5.7)

$$|F(E_n)| < \sum_{p=1}^{q} |R_p| + \frac{1}{n}.$$

D'autre part, on déduit sans peine de (5.8) et (5.5) que le diamètre de R_p, donc à plus forte raison sa mesure, ne dépasse pas le nombre $7\,M\cdot|I_p|$. On en conclut selon (5.3) et (5.2) en vertu de l'inégalité précédente que

$$|F(E_n)| < 7\,M\cdot\sum_{p=1}^{q}|I_p| + \frac{1}{n} \leqslant 7M\cdot|G_n| + \frac{1}{n} \leqslant 7\,M\cdot|E_n| + \frac{7\,M+1}{n}.$$

Nous avons établi cette relation pour une valeur arbitraire de n. L'inégalité à démontrer en résulte par le passage à la limite avec $n \to \infty$.

Théorème 8. *Toute fonction finie qui admet à peu près partout dans un ensemble E un dérivé de Dini fini, remplit sur cet ensemble la condition (N) de Lusin.*

Démonstration. Soit, en effet, $H \subset E$ un ensemble de mesure nulle. Pour tout n naturel désignons respectivement par A_n, B_n, C_n et D_n les ensembles des points $x \in H$ où les nombres $|\overline{F}^+(x)|$, $|\overline{F}^-(x)|$, $|\underline{F}^+(x)|$ et $|\underline{F}^-(x)|$ sont respectivement inférieurs à n. En vertu du lemme qui précède on a par conséquent $|F(A_n)| \leqslant 7n\cdot|A_n|$. Comme on a par hypothèse $|H| = 0$, donc à plus forte raison $|A_n| = 0$, il vient $|F(A_n)| = 0$ et d'une façon tout à fait analogue $|F(B_n)| = |F(C_n)| = |F(D_n)| = 0$. Or, $H = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n + C_n + D_n) + \varDelta$,

où $\varDelta$ est par hypothèse un ensemble au plus dénombrable. Par conséquent $|F(H)| = 0$, c. q. f. d.

Une autre conséquence directe du lemme, p. 174, est le théorème: *si un des quatre dérivés de Dini d'une fonction $F(x)$ s'annule à peu près partout dans un ensemble E, on a $|F(E)| = 0$.*

Pour les fonctions $F(x)$ continues ou, plus généralement, continues au sens de Darboux (c. à d. prenant dans chaque intervalle $[a, b]$ toutes les valeurs intermédiaires entre $F(a)$ et $F(b)$) on en déduit aussitôt le théorème suivant: *si parmi les quatre nombres dérivés de Dini d'une fonction $F(x)$ continue au sens de Darboux il y a à peu près partout dans un intervalle I au moins un qui s'annule en ce point, $F(x)$ est dans I une constante.*

En soumettant, pour les fonctions continues au sens ordinaire, l'hypothèse de ce théorème à la restriction que ce soit un des nombres dérivés de Dini *d'un côté fixe* qui s'annule à peu près partout dans I, ce théorème est contenu dans celui de Scheeffer (cf. Chap. VIII, § 9). Formulé en toute généralité, il en est, par contre, indépendant.

Notons enfin que le th. 3, p. 171 permet d'améliorer l'évaluation donnée par le lemme, p. 174, en y remplaçant $7\,M$ par M. Nous pouvons même aller un peu plus loin et généraliser le th. 7 du Chap. VIII, § 11, comme il suit: *si un des quatre dérivés de Dini d'une fonction $F(x)$, p. ex. $\overline{F}^+(x)$, est partout fini dans un ensemble mesurable E, on a $|F(E)| \leqslant \int_E |\overline{F}^+(x)|\,dx$.*

*Condition (T_1) de Banach.

§ 6. On dit qu'une fonction $F(x)$ *remplit la condition (T_1)* dans un intervalle, lorsqu'elle y prend *presque chacune* de ses valeurs seulement un nombre *fini* des fois. Cette condition, introduite par M. S. Banach [3], équivaut, comme nous allons voir, à une propriété différentielle des fonctions continues.

Lemme. *Si une fonction continue $F(x)$ n'admet nullepart dans un ensemble E une dérivée déterminée (finie ou infinie) et si, en outre, aucun point $x \in E$ n'est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_{\xi}[F(\xi) = F(x)]$ correspondant à x, alors on a $|F(E)| = |E| = 0$.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ il existe en vertu de l'hypothèse un $\eta > 0$ tel que l'expression $F(\xi) - F(x)$ où $|\xi - x| < \eta$ ne change pas de signe tant que ξ reste situé d'un même côté de x, et change de signe, ξ passant d'un coté de x à l'autre, excepté le cas où $F(x)$ atteint dans x un maximum ou un minimum, c. à d. excepté un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x (voir th. 1, p. 167).

Par conséquent, à peu près partout dans E tous les quatre dérivés de Dini sont d'un même signe. En désignant donc par A l'ensemble des points de E où ils sont non négatifs, par B l'ensemble de ceux où ils sont non positifs et par D l'ensemble, au plus dénombrable, où il y a une différence de signes, on obtient la décomposition $E = A + B + D$.

Or, $F(x)$ n'admettant par hypothèse de dérivée déterminée dans aucun point $x \in E$, on a l'inégalité $\overline{F}(x) > \underline{F}(x) \geqslant 0$, donc $\underline{F}(x) \neq \infty$, pour tout $x \in A$. Par conséquent, en vertu du th. 5, p. 172, on a $|A| = 0$, ce qui implique en vertu du th. 8, p. 176, $\underline{F}(x)$ étant fini pour tout $x \in A$, que $|F(A)| = |A| = 0$. On montre d'une façon analogue que $|F(B)| = |B| = 0$. Enfin, l'ensemble D étant au plus dénombrable, on a évidemment $|F(D)| = |D| = 0$.

La démonstration s'achève par l'addition des ces trois égalités membre à membre.

Théorème 9. *Pour qu'une fonction $F(x)$ continue dans un intervalle I remplisse la condition (T_1) dans cet intervalle, il faut et il suffit que l'ensemble des valeurs que la fonction $F(x)$ prend aux points où elle n'admet pas de dérivée (finie ni infinie) soit de mesure nulle.*

Démonstration. En désignant par Y l'ensemble des valeurs de la fonction $F(x)$ qu'elle prend une infinité de fois et par E celui des points où elle n'admet pas de dérivée, il s'agit de prouver l'équivalence des égalités $|Y| = 0$ et $|F(E)| = 0$.

Montrons d'abord que $|Y| = 0$ entraîne $|F(E)| = 0$. Soit X l'ensemble de tous les points $x \in I$ tels que $F(x) \in Y$. Par conséquent $F(X) = Y$, d'où $|F(X)| = 0$.

D'autre part pour tout $x \in E - X$ l'ensemble $\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(\xi) = F(x)]$ est fini, donc n'admettant guère de points d'accumulation. Il en résulte en vertu du lemme qui précède que $|F(E-X)| = 0$, d'où finalement $|F(E)| \leqslant |F(X)| + |F(E-X)| = 0$.

Montrons à son tour que $|F(E)| = 0$ entraîne $|Y| = 0$. Soit H l'ensemble des points $\xi \in I$ tels que $F'(\xi) = 0$. Pour tout point $y \in Y - F(E)$ l'ensemble $\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(\xi) = y]$ est infini et, par suite de la continuité de $F(x)$, fermé. D'autre part $F(x)$ admet une dérivée dans chaque point de cet ensemble et pour tout point ξ qui en est un point d'accumulation on a $F'(\xi) = 0$, de sorte que $\xi \in H$, d'où $y = F(\xi) \in F(H)$. Il est ainsi établi que $Y - F(E) \subset F(H)$.

Or, on a en vertu du th. 7, Chap. VIII, § 11, $|F(H)| = 0$, donc à plus forte raison $|Y - F(E)| = 0$. Mais alors $|F(E)| = 0$ entraîne $|Y| = 0$, c. q. f. d.

Théorème 10. *Toute fonction $F(x)$ continue et à variation bornée dans un intervalle $I = [a, b]$ remplit la condition (T_1) dans I.*

Démonstration. E désignant l'ensemble des points $x \in I$ où la fonction $F(x)$ n'admet pas de dérivée déterminée, il suffit, conformément au th. 9, de montrer que $|F(E)| = 0$.

Désignons à ce but par l_0 la longueur de la „courbe" $y = F(x)$ dans l'intervalle I (ou, pour conserver strictement la terminologie du Chap. III, § 8, p. 57, celle de la *courbe* $x = t$, $y = F(t)$ *dans* I). A cause de la continuité de $F(x)$, la longueur de l'arc de cette courbe correspondant à l'intervalle $[a, x]$ prend, en augmentant, toutes les valeurs de l'intervalle $[0, l_0]$, à mesure que x varie dans I de a à b. Soit d'une façon générale $x(l)$ où $0 \leqslant l \leqslant l_0$ la valeur de x à laquelle correspond ainsi l'arc de longueur l et posons $y(l) = F(x(l))$. Les fonctions $x = x(l)$ et $y = y(l)$ déterminent donc une courbe dont le paramètre l coïncide avec la longueur de l'arc correspondant. En vertu du th. 10, Chap. III, § 8, on a donc

$$(6.1) \qquad [x'(l)]^2 + [y'(l)]^2 = 1 \quad \textit{presque partout dans } [0, l_0].$$

On aperçoit aussitôt que, toutes les fois que pour une valeur de l les deux dérivées $x'(l)$ et $y'(l)$ existent et ne s'annulent pas simultanément, la fonction $F(x)$ admet la dérivée déterminée (finie ou infinie) dans le point correspondant $x = x(l)$ et que l'on a alors $F'(x) = F'[x(l)] = \dfrac{y'(l)}{x'(l)}$. En désignant donc par H l'ensemble des valeurs du paramètre l pour lesquelles les dérivées $x'(l)$ et $y'(l)$ soit n'existent guère, soit existent, mais sont nulles simultanément, on a $E \subset x(H)$ et

$$(6.2) \qquad F(E) \subset y(H).$$

Or, en vertu de (6.1) on a $|H| = 0$, d'où à plus forte raison, le paramètre l désignant la longueur d'un arc, $|y(H)| = 0$ et par conséquent, selon (6.2), $|F(E)| = 0$, c. q. f. d.

Pour une démonstration plus directe du th. 10 voir S. Banach [4] et G. Vitali [5].

L'hypothèse que la fonction $F(x)$ est *continue* n'est pas essentielle dans ce théorème et peut être supprimée facilement. En outre, on peut montrer aisément que *l'ensemble des valeurs qu'une fonction* (VBG^*), *continue ou non,* *prend dans les points où elle n'admet pas de dérivée déterminée est toujours de mesure nulle* (cf. S. Saks [2]). Il en résulte en vertu du th. 9, p. 178, que *toute fonction* (VBG^*) *continue remplit la condition* (T_1) et l'exemple suivant montre que cette fois l'hypothèse de la continuité est déjà essentielle: $F(x)=\sin x^{-1}$, $F(0)=0$ est une fonction (VBG^*) ne remplissant pas la condition (T_1).

Par contre, les fonctions (VBG) même continues, pas plus que les fonctions (ACG), peuvent ne pas satisfaire à la condition (T_1). En effet, $F(x)$ étant la fonction (ACG) non dérivable dans un ensemble de mesure positive, qui a été envisagée au Chap. VIII, § 10, p. 153, il est facile de voir que la fonction $F(x)+x$ ne remplit pas la condition (T_1) dans l'intervalle [0,1].

Enfin, on peut remarquer que le th. 10 peut être généralisé et complété comme il suit: *pour qu'une fonction continue remplisse la condition* (T_1), *il faut et il suffit qu'elle soit de la forme* $G[F(x)]$ *où* $G(x)$ *est une fonction monotone et absolument continue et* $F(x)$ *est une fonction à variation bornée.* Ce résultat est dû à M-lle N. Bary [2, p. 633]. On en peut aussi déduire aisément la nécessité de la condition du th. 9.

*Condition (T_2) de Banach.

§ 7. Sans remplir toujours la condition (T_1), les fonctions (VBG) continues satisfont toutefois à une condition un peu plus générale, introduite également par M. S. Banach [3] et nommée par lui *condition* (T_2).

Une fonction $F(x)$ remplit notamment la condition (T_2) dans un intervalle I, lorsqu'elle y prend *presque chacune* de ses valeurs tout au plus une infinité *dénombrable* des fois.

Théorème 11. *Toute fonction continue $F(x)$ qui est (VBG) dans un intervalle $I=[a,b]$ remplit la condition (T_2) dans cet intervalle.*

Démonstration. En effet, on a alors une décomposition de I en ensembles fermés $I=\sum_n E_n$ tels que $F(x)$ est une fonction (VB) sur tout E_n. Soit, pour $n=1,2,\ldots$, $F_n(x)$ une fonction égale à $F(x)$ pour tout $x\in E_n$ et linéaire dans les intervalles contigus à E_n. Ainsi définies, les fonctions $F_n(x)$ sont à variation bornée sur l'intervalle I tout entier et, en vertu du th. 10, chacune des équations $F_n(x)=y$ n'admet pour presque toute valeur de y qu'un nombre fini des racines. L'équation $F(x)=y$ n'admet donc pour presque toute valeur de y que, au plus, une infinité dénombrable des racines et la condition (T_2) se trouve ainsi remplie.

Il est à remarquer que, tout comme dans le th. 10, l'hypothèse de la continuité de $F(x)$ peut être facilement supprimée aussi dans le th. 11.

Théorème 12. *Etant donnée une fonction continue $F(x)$ remplissant la condition (T_2) dans un intervalle $I=[a,b]$, l'ensemble Δ des points où la dérivée $F'(x)$ (finie ou infinie) existe est non dénombrable et en posant*

$$P=\mathop{\mathrm{E}}_x[x\in\Delta;\,F'(x)\geqslant 0]\quad \textit{et}\quad N=\mathop{\mathrm{E}}_x[x\in\Delta;\,F'(x)\leqslant 0],$$

on a la relation

$$(7.1)\qquad -|F(N)|\leqslant F(b)-F(a)\leqslant|F(P)|.$$

Démonstration. On peut admettre évidemment que

$$(7.2)\qquad F(a)\leqslant F(b),$$

le passage à l'autre cas s'opérant par le changement du signe de la fonction $F(x)$.

Soit Y l'ensemble des valeurs de $F(x)$ que cette fonction prend tout au plus une infinité dénombrable de fois. Nous allons montrer d'abord qu'on peut faire correspondre à tout point $y\in Y$ un point $x_y\in I$ assujetti aux conditions:

$$(7.3)\qquad F(x_y)=y,$$

$$(7.4)\qquad \overline{F}(x_y)\geqslant 0,$$

$$(7.5)\qquad x_y \textit{ est un point isolé de l'ensemble } E_y=\mathop{\mathrm{E}}_\xi[F(\xi)=y].$$

En effet, il est évident que dans le cas où E_y se réduit à un seul point, ce dernier remplit les conditions (7.3) et (7.5); en vertu de (7.2) il remplit aussi la condition (7.4). On n'a par conséquent qu'à le désigner par x_y.

Considérons donc le cas opposé, où pour un $y\in Y$ l'ensemble E_y contient plus d'un point. Or, la fonction $F(x)$ étant par hypothèse continue, l'ensemble E_y est à la fois fermé et au plus dénombrable. Comme tel, il contient un couple de points isolés α, β entre lesquels n'est situé aucun de ses points.

C'est évident, lorsque l'ensemble E_y est fini. Lorsqu'il est infini, l'ensemble E'_y de ses points d'accumulation est lui-même fermé, non vide et au plus dénombrable; par conséquent il contient un point isolé x_0. Ainsi, il n'existe à proximité de x_0 que des points de $E_y-E'_y$ isolés. Il suffit donc de choisir parmi ces derniers comme α et β deux points consécutifs quelconques.

Par conséquent, dans un au moins des points α et β la dérivée supérieure de $F(x)$ n'est pas négative. C'est ce point qui sera choisi comme x_y. On constate aussitôt que les conditions (7.3), (7.4) et (7.5) se trouvent alors vérifiées.

Ceci établi, désignons par X l'ensemble de tous les points x_y qui viennent ainsi correspondre aux points $y \in Y$. Il vient en vertu de (7.4) et (7.5) et du lemme, p. 177, $|F(X-P)| = |F(X-\Delta)| = 0$, donc par définition de l'ensemble X et selon la condition (7.3), $|Y| = |F(X)| = |F(X \cdot P)| \leqslant |F(P)|$. Comme la condition (T_2) entraîne $|F(I)| = |Y|$, on en obtient selon (7.2) l'inégalité $-|F(N)| \leqslant 0 \leqslant F(b) - F(a) \leqslant |F(I)| = |F(P)|$, c. à d. l'inégalité (7.1).

Cette relation étant évidemment vraie à la fois pour tout sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de I, un au moins des ensembles $F(N)$ et $F(P)$ est de mesure non nulle, à moins que la fonction $F(x)$ soit une constante. Par conséquent, l'ensemble $\Delta = N + P$ est non dénombrable, ce qui achève la démonstration.

Théorème 13. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ remplissant la condition (T_2) dans un intervalle*[1] $I = [a, b]$, *soit monotone non décroissante dans I, il faut et il suffit que l'on ait $F'(x) \geqslant 0$ à peu près partout où $F'(x)$ existe.*

Démonstration. La nécessité de la condition à démontrer est évidente et la suffisance en résulte immédiatement de l'inégalité $0 \leqslant F(x_2) - F(x_1)$, qui, lorsque la condition est remplie, se présente en vertu du th. 12 pour tout couple de points x_1, x_2 de I où $x_1 < x_2$.

*Fonctions remplissant la condition (N).

§ 8. Tous les théorèmes sur les fonctions qui remplissent la condition (T_2) de Banach sont vrais en particulier pour les fonctions qui remplissent la condition (N) de Lusin et se laissent même pour ces dernières préciser davantage. Nous allons voir notamment que pour les fonctions continues (et même mesurables) la condition (N) entraîne la condition (T_2).

Lemme 1. *Etant donnée une fonction $F(x)$ continue dans un intervalle I, tout ensemble fermé $E \subset I$ contient un ensemble mesurable A dans lequel chaque valeur $y \in F(E)$ est prise par la fonction $F(x)$ exactement une fois.*

[1] donc, en particulier d'après le th. 11, *une fonction* (VBG). Pour fonctions à variation bornée le th. 13 est aussi une conséquence des théorèmes de J. Ch. de la Vallée-Poussin [I, p. 93].

Démonstration. Faisons correspondre à tout $y \in F(E)$ la borne inférieure ξ_y de l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) = y; x \in E]$ et désignons par A l'ensemble de tous les points ξ_y qui viennent ainsi correspondre aux valeurs $y \in F(E)$. L'ensemble E étant fermé, on a évidemment $A \subset E$ et $F(x)$ ne prend dans A chacune des valeurs $y \in F(E)$ qu'une seule fois.

Afin d'établir la mesurabilité de A, désignons pour tout $n = 1, 2, \ldots$ par E_n l'ensemble des points $x \in I$ tels que E contient au moins un point ξ assujetti aux conditions $F(x) = F(\xi)$ et $x - \xi \geqslant n^{-1}$. Il vient $A = E - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ où E est fermé par hypothèse et chaque E_n l'est par suite de la continuité de $F(x)$. L'ensemble A est donc mesurable, c. q. f. d.

Lemme 2. *Etant donnée une fonction $F(x)$ continue et remplissant la condition (N) dans un intervalle I, tout ensemble mesurable $E \subset I$ contient un ensemble mesurable A tel que $|F(E) - F(A)| = 0$ et que la fonction $F(x)$ prend dans A chacune de ses valeurs tout au plus une infinité dénombrable de fois.*

Démonstration. Comme ensemble mesurable, E se laisse représenter dans la forme

$$E = \sum_n E_n + H \tag{8.1}$$

où $\{E_n\}$ est une suite d'ensembles fermés et $|H| = 0$. En vertu du lemme 1, chaque E_n contient donc un ensemble mesurable A_n dans lequel $F(x)$ prend toute valeur $y \in F(E_n)$ exactement une fois. En posant $A = \sum_n A_n$, chaque valeur $y \in F(E)$ est évidemment prise par $F(x)$ dans A tout au plus une infinité dénombrable de fois.

D'autre part, on a $F(E_n) = F(A_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ d'où, en vertu de (8.1), $F(E) - F(A) \subset F(H)$ et, la condition (N) entraînant $|F(H)| = 0$, il vient $|F(E) - F(A)| = 0$, c. q. f. d.

Théorème 14 (de Banach). *Toute fonction $F(x)$ continue et remplissant la condition (N) dans un intervalle I remplit aussi la condition (T_2) dans I.*

Démonstration. Désignons d'une façon générale pour tout ensemble mesurable $E \subset I$ par E_d tout sous-ensemble mesurable A de E tel que $|F(E)-F(A)|=0$ et dans lequel chaque valeur $y \in F(E)$ n'est prise par la fonction $F(x)$ que tout au plus une infinité dénombrable de fois.

En vertu du lemme 2 tout ensemble mesurable $E \subset I$ contient des ensembles E_d: soit $\mu(E)$ la borne supérieure de leurs mesures. Considérons en particulier une suite $\{H_n\}$ d'ensembles I_d tels que $\lim\limits_n |H_n| = \mu(I)$. Posons $H=\sum\limits_n H_n$ et soit P un ensemble $(I-H)_d$. On voit aisément que $|P|=0$, d'où en vertu de la condition (N) l'égalité $|F(P)|=0$. Par conséquent $|F(I-H)|=|F(P)|=0$, de sorte que presque toute valeur $y \in F(I)$ n'est admise par $F(x)$ que sur l'ensemble H, donc au plus une infinité dénombrable de fois, c. q. f. d.

La démonstration qui précède ne diffère que légèrement de celle de M. Banach [3]. Une autre démonstration, basée sur les propriétés des ensembles *analytiques* a été donnée par M-lle N. Bary [2, p. 195].

Grâce au théorème de Lusin (Chap. II, § 12, th. 25), le th. 14 se laisse étendre facilement aux fonctions mesurables quelconques. L'hypothèse de la mesurabilité de $F(x)$ est essentielle.

Théorème 15. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit absolument continue dans un intervalle I_0, il faut et il suffit qu'elle y remplisse simultanément la condition (N) et la condition*

$$\int_P F'(x)\,dx < +\infty, \tag{8.2}$$

P désignant l'ensemble des points où la fonction $F(x)$ admet une dérivée déterminée, finie et non négative.

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires (cf. Chap. VIII, § 10, th. 5). Afin de prouver qu'elles sont suffisantes, posons $E = \mathop{\mathrm{E}}\limits_x [F'(x)=+\infty]$.

Or, on a en vertu du corollaire p. 172, $|E|=0$, d'où, par suite de la condition (N), $|F(E)|=0$. Il en résulte selon le th. 12, p. 181, et le th. 7, Chap. VIII, § 11, pour tout $I=[\alpha,\beta]\subset I_0$ $F(\beta)-F(\alpha) \leqslant |F(P\cdot I+E)| = |F(P\cdot I)| \leqslant \int_{P\cdot I} F'(x)\,dx$. Par conséquent, en posant $G(x)=F'(x)$ pour $x \in P$ et $G(x)=0$ partout ailleurs, on a pour tout sous-intervalle $[\alpha,\beta]$ de I_0 l'inégalité $F(\beta)-F(\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta G(x)\,dx$. On en conclut, la fonction $G(x)$ étant d'après (8, 2) sommable sur I_0, que la variation supérieure de $F(x)$ est finie dans cet intervalle, de sorte que la fonction $F(x)$ est à variation bornée dans I_0. Comme elle remplit par hypothèse la condition (N), elle y est donc, en vertu du th. 8, Chap. VIII, § 11, absolument continue, c. q. f. d.

Corollaire. *Toute fonction qui remplit la condition (N) est dérivable dans un ensemble de mesure positive.*

Ce résultat remarquable est dû à M. S. Banach [3]. Quant au th. 15, il a été démontré (dans une forme un peu moins générale) par M-lle N. Bary [1; 2, p. 199]. Il en résulte en particulier que *toute fonction $F(x)$ continue, assujettie à la condition (N) et dont la dérivée est non négative en presque tout point où $F(x)$ est dérivable, est monotone non décroissante.* Cette proposition renferme une généralisation essentielle du th. 6, Chap. VIII, § 10.

Le th. 15 peut, en outre, être généralisé davantage. *Si une fonction continue $F(x)$ remplit la condition (N) et la fonction $g(x)$, égale à $F'(x)$ dans les points où $F(x)$ est dérivable et à 0 partout ailleurs, admet une fonction majorante* (au sens de Perron), *alors la fonction $F(x)$ est une intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ ou* — ce qui est, comme nous verrons au Chap. X, tout à fait équivalent — *elle est une fonction (ACG^*).* Cf. à ce sujet S. Saks [2].

Condition (D).

§ 9. Nous allons établir à présent un théorème concernant les dérivés approximatifs extrêmes, analogue au th. 8, p. 176. Cependant l'idée de sa démonstration est tout à fait différente de celle du th. 8 et il est plus commode de le formuler d'emblée dans une forme un peu plus générale.

Etant donnés deux nombres positifs: N et $\varepsilon<1$ nous dirons qu'une fonction $F(x)$ *remplit dans un point x_0 la condition $(D_{N,\varepsilon})$*, lorsqu'il existe des nombres $h>0$ aussi petits que l'on veut et tels que la différence entre la mesure extérieure de l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}\limits_x[F(x)-F(x_0) \geqslant -N\cdot(x-x_0);\ 0 \leqslant x-x_0 \leqslant h]$ et celle de l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}\limits_x[F(x)-F(x_0) \geqslant N\cdot(x-x_0);\ 0 \leqslant x-x_0 \leqslant h]$ dépasse en valeur absolue le nombre $h\varepsilon$.

Si, pour un x_0 donné, il existe un couple de nombres positifs N et ε tels que la fonction $F(x)$ remplisse dans x_0 la condition $(D_{N,\varepsilon})$, nous dirons tout court que $F(x)$ *remplit dans x_0 la condition (D).*

Pour des fonctions mesurables la condition (D) peut être formulée d'une façon un peu plus simple: *une fonction mesurable $F(x)$ remplit dans un point x_0 la condition (D), lorsqu'il existe un nombre fini N tel que x_0 soit un point de densité supérieure positive de l'ensemble* $\underset{x}{\mathrm{E}}[|F(x)-F(x_0)| \leqslant N\cdot(x-x_0);\ x > x_0]$.

Il est facile de voir que

(9.1) *Si $\overline{F}^{+}_{\mathrm{ap}}(x_0) \neq \infty$, la fonction $F(x)$ remplit dans x_0 la condition (D).*

En effet, en posant $N = |\overline{F}^{+}_{\mathrm{ap}}(x_0)| + 1$, la définition des dérivés approximatifs montre (cf. Chap. VIII, § 3, p. 144, et § 4, p. 146) que le point x_0 est à la fois un point de dispersion de l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x)-F(x_0) \geqslant N\cdot(x-x_0);\ x \geqslant x_0]$ et un point de densité extérieure supérieure positive de $\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x)-F(x_0) \geqslant -N\cdot(x-x_0);\ x \geqslant x_0]$. En désignant cette dernière par δ, la fonction $F(x)$ remplit dans le point x_0 la condition $(D_{N,\varepsilon})$ pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \delta$; elle remplit donc la condition (D) dans ce point.

Lemme. *Si pour un N et un $\varepsilon < 1$ positifs la fonction $F(x)$ remplit la condition $(D_{N,\varepsilon})$ partout dans un ensemble E, on a* $|F(E)| \leqslant 2\,N\varepsilon^{-1}\cdot|E|$.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que l'on a

(9.2) $|I| \geqslant 2^{-1}\,\varepsilon\, N^{-1}\cdot|F(E\cdot I)|$ *pour tout intervalle* $I = [a, b]$.

Posons pour tout y

(9.3) $$\Gamma(y) = |\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \geqslant y;\ x \in I]|.$$

La fonction $\Gamma(y)$ ainsi définie est non croissante et bornée sur toute la droite $[-\infty, +\infty]$; on a notamment

(9.4) $$0 \leqslant \Gamma(y) \leqslant |I|, \quad \textit{quel que soit } y.$$

Etant donné un point arbitraire y_0 de $F(E\cdot I)$ distinct de $F(b)$ et dans lequel la fonction $\Gamma(y)$ est dérivable, considérons un point $x_0 \in E\cdot I$ tel que $F(x_0) = y_0$. On a donc évidemment $x_0 \neq b$.

Ceci posé, soient pour abréger

$$A(h, k) = \underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \geqslant y_0 + k\cdot(x-x_0);\ 0 \leqslant x - x_0 \leqslant h]$$

et

$$B(h, k) = \underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \geqslant y_0 + kh;\ 0 \leqslant x - x_0 \leqslant h].$$

Pour tout sous-intervalle $[x_0, x_0+h]$ de I on a alors la relation $B(h, N) \subset A(h, N) \subset A(h, -N) \subset B(h, -N)$, d'où on tire aisément en vertu de l'égalité (9.3) $\Gamma(y_0 - Nh) - \Gamma(y_0 + Nh) = |\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \geqslant y_0 - Nh;\ x \in I]| - |\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \geqslant y_0 + Nh;\ x \in I]| \geqslant |B(h, -N)| - |B(h, N)| \geqslant |A(h, -N)| - |A(h, N)|$. Or, $F(x)$ remplissant par hypothèse la condition $(D_{N,\varepsilon})$ dans x_0, il existe des valeurs $h > 0$ telles que $|A(h, -N)| - |A(h, N)| \geqslant h\varepsilon$, donc que $\Gamma(y_0 - Nh) - \Gamma(y_0 + Nh) \geqslant h\varepsilon$, et qui peuvent être faites aussi petites que l'on veut. On a par conséquent l'évaluation $\Gamma'(y_0) \leqslant -2^{-1}N^{-1}\varepsilon$ pour tout point $y_0 \neq F(b)$ de $F(E\cdot I)$ dans lequel $\Gamma(y)$ est dérivable, donc pour presque tout point y_0 de $F(E\cdot I)$. En vertu de (9.4) et du lemme 1, Chap. III, § 3, on en tire pour tout n

$$|I| \geqslant |\Gamma(n) - \Gamma(-n)| \geqslant 2^{-1}N^{-1}\varepsilon\cdot|\underset{y}{\mathrm{E}}[y \in F(E\cdot I);\ -n \leqslant y \leqslant n]|.$$

L'inégalité (9.2) en résulte par le passage à la limite avec $n \to +\infty$.

Ceci établi, soit pour un $\eta > 0$ arbitraire $\{I_k\}$ une suite d'intervalles couvrant E et tels que $|E| + \eta \geqslant \sum_k |I_k|$. En vertu de (9.2) on a alors $|E| + \eta \geqslant 2^{-1}N^{-1}\varepsilon \sum_k |F(E\cdot I_k)| \geqslant 2^{-1}N^{-1}\varepsilon\cdot|F(E)|$, ce qui entraîne aussitôt l'inégalité à démontrer.

Théorème 16. *Toute fonction $F(x)$ qui remplit la condition (D) à peu près partout dans un ensemble E, satisfait sur E à la condition (N).*

Démonstration. Soient, en effet, H un sous-ensemble quelconque de E tel que $|H| = 0$ et, pour tout n naturel, H_n l'ensemble des points de H dans lesquels $F(x)$ remplit la condition $(D_{n,n^{-1}})$. On a par hypothèse $H = \sum_n H_n + D$ où D est un ensemble tout au plus dénombrable. En vertu du lemme précédent on a $|F(H_n)| \leqslant 2\,n^2\cdot|H_n| = 0$ quel que soit n, donc, l'ensemble $F(D)$ étant au plus dénombrable, $|F(H)| = 0$, de sorte que $F(x)$ remplit la condition (N), c. q. f. d.

Il en résulte en vertu de (9.1), p. 186, le

Théorème 17. *Si à peu près partout dans un ensemble E un au moins des dérivés approximatifs extrêmes d'une fonction $F(x)$ est fini, la fonction $F(x)$ remplit la condition (N) sur E.*

Critères sur les classes (VBG^*) **et** (ACG^*).

§ 10. On doit à M. A. Denjoy [6] les critères permettant de distinguer certaines classes de fonctions à variation bornée et absolument continues généralisées. Ces critères constituent la base d'une étude plus précise des relations entre les intégrales de Denjoy et la fonction primitive (voir plus loin, Chap. X, § 3).

Nous avons vu (cf. Chap. VII, § 1, p. 126) que la dérivabilité d'une fonction, même dans un intervalle entier, n'en entraîne point la continuité absolue. Néanmoins, les théorèmes qui vont suivre montrent que déjà les hypothèses bien plus faibles que la dérivabilité entraînent la continuité absolue *généralisée.*

Théorème 18. *Toute fonction $F(x)$ qui satisfait à peu près partout dans un ensemble à une des inégalités*

$$\overline{F}(x) < +\infty \quad ou \quad \underline{F}(x) < -\infty$$

est une fonction (VBG^*) sur cet ensemble.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble E de tous les x où on a p. ex. $\overline{F}(x) < +\infty$ est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ soit une fonction (VB^*) sur chacun d'eux.

Soit pour tout n naturel E_n l'ensemble des points $x \in E$ tels que, quel que soit x',

$$(10.1) \qquad |x'-x| \leqslant \frac{1}{n} \quad \textit{entraîne} \quad \frac{F(x')-F(x)}{x'-x} \leqslant n.$$

Désignons en outre pour tout entier i par E_n^i la partie de E_n située sur l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ et par a_n^i, b_n^i respectivement les bornes inférieures et supérieures des E_n^i non vides. On a évidemment $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_n^i$.

Or, posons $F_n(x) = F(x) - nx$. Pour tout point $x \in E_n$ et pour tout point x' satisfaisant à la première des inégalités (10.1) on a donc selon la seconde $\frac{F_n(x')-F_n(x)}{x'-x} \leqslant 0$. En particulier, étant donné un couple quelconque x_1, x_2 (où $x_1 \leqslant x_2$) de points de E_n^i, on obtient

$$(10.2) \qquad F_n(a_n^i) \geqslant F_n(x_1) \geqslant F_n(x_2) \geqslant F_n(b_n^i)$$

et pour tout x' tel que $x_1 \leqslant x' \leqslant x_2$ on aura $F_n(x_1) \geqslant F_n(x') \geqslant F_n(x_2)$. Cette dernière relation implique que l'on a pour tout intervalle $I = [\alpha, \beta]$ dont les extrémités appartiennent à l'ensemble E_n^i l'égalité $\omega(F_n; I) = F_n(\alpha) - F_n(\beta)$, d'où, en vertu de (10.2), pour toute suite finie $\{I_j = [\alpha_j, \beta_j]\}$ de tels intervalles (n'empiétant pas l'un sur l'autre) $\sum_j \omega(F_n; I_j) = \sum_j [F_n(\alpha_j) - F_n(\beta_j)] \leqslant F_n(a_n^i) - F_n(b_n^i)$. La fonction $F_n(x)$, donc aussi la fonction $F(x) = F_n(x) + nx$, est par conséquent (VB^*) sur E_n^i, c. q. f. d.

Théorème 19. *Si une fonction $F(x)$ satisfait à peu près partout dans un ensemble E au moins à une des conditions*

$$-\infty < \underline{F}^+(x) \leqslant \overline{F}^+(x) < +\infty \quad ou \quad -\infty < \underline{F}^-(x) \leqslant \overline{F}^-(x) < +\infty,$$

l'ensemble E est somme tout au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ est une fonction (AC^*) sur chacun d'eux.

Par conséquent, si la fonction $F(x)$ est en outre continue sur E, elle est une fonction (ACG^*) sur E.

Démonstration. Il suffit de montrer que si dans tout point x d'un ensemble A les deux dérivés extrêmes droits $\overline{F}^+(x)$ et $\underline{F}^+(x)$ sont finis, A se laisse décomposer en une infinité tout au plus dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ soit une fonction (AC^*) sur chacun d'eux.

Soit pour tout n naturel A_n l'ensemble des points $x \in A$ tels que, quel que soit x',

$$(10.3) \quad 0 \leqslant x'-x \leqslant n^{-1} \quad \textit{entraîne} \quad |F(x')-F(x)| \leqslant n\cdot(x'-x)$$

et désignons pour tout entier i par A_n^i la partie commune de A_n et de l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. On a évidemment $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_n^i$.

Or, $I = [x_1, x_2]$ étant un intervalle quelconque aux extrémités contenues dans A_n^i, on a pour tout $x' \in I$ l'inégalité $0 \leqslant x'-x_1 \leqslant n^{-1}$, d'où en vertu de (10.3) $|F(x') - F(x_1)| \leqslant n\cdot(x'-x_1) \leqslant n\cdot|I|$, et par conséquent $\omega(F; I) \leqslant 2n\cdot|I|$. Pour toute suite finie $\{I_j\}$ de tels intervalles on obtient donc $\sum_j \omega(F; I_j) \leqslant 2n \sum_j |I_j|$ et comme

n est fixe pour chacun des ensembles $\{A_n^i\}$, la dernière inégalité prouve que $F(x)$ est une fonction (AC^*) sur chacun d'eux, c. q. f. d.

Le th. 19 montre en particulier que *toute fonction continue qui est dérivable, même seulement d'un côté, à peu près partout dans un intervalle, est une fonction (ACG^*) sur cet intervalle.*

*§ **11.** Le critère énoncé dans le th. 19 peut être complété à l'aide du th. 8 comme il suit.

Théorème 20. *Toute fonction $F(x)$ qui est continue sur un ensemble fermé E et qui admet à peu près partout dans cet ensemble soit deux dérivés associés de* Dini *finis, soit une des dérivées extrêmes bilatérales $\overline{F}(x)$ ou $\underline{F}(x)$ finie, est une fonction (ACG^*) sur E.*

Démonstration. En effet, d'après les th. 18 et 19, $F(x)$ est alors une fonction (VBG^*) sur E et en vertu du th. 8, p. 176, elle remplit la condition (N) sur cet ensemble. Selon le th. 15, Chap. VIII, § 16, elle est donc une fonction (ACG^*) sur E.

Critères sur les classes (VBG) et (ACG).

§ **12.** Nous allons établir à présent pour les fonctions (VBG), des conditions analogues à celles qui précèdent.

Théorème 21. *Toute fonction $F(x)$ qui satisfait à peu près partout dans un ensemble E à une quelconque des conditions*

$$(12.1)\qquad \overline{F}^+(x) < +\infty, \quad \underline{F}^+(x) > -\infty, \quad \overline{F}^-(x) < +\infty, \quad \underline{F}^-(x) > -\infty,$$

$$(12.2)\qquad \overline{F}_{\mathrm{ap}}(x) < +\infty, \quad \underline{F}_{\mathrm{ap}}(x) > -\infty,$$

est une fonction (VBG) sur E.

Démonstration. Nous allons nous borner au cas de la première des conditions (12.1) et à celui de la première des conditions (12.2), les autres cas de (12.1) et (12.2) étant analogues à ces deux cas typiques. Par conséquent, il suffit de prouver que chacun des ensembles $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}^+(x) < +\infty]$ et $B = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}_{\mathrm{ap}}(x) < +\infty]$ se laisse décomposer en une infinité dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ soit une fonction à variation bornée sur chacun d'eux.

Considérons d'abord l'ensemble A. Etant donné un n naturel quelconque, désignons par A_n l'ensemble de tous les points $x \in A$ tels que pour tout x'

$$(12.3)\qquad 0 \leqslant x' - x \leqslant n^{-1} \quad \textit{entraîne} \quad F(x') - F(x) \leqslant n \cdot (x' - x)$$

et par A_n^i, pour tout entier i, la partie commune de A_n^i et de l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Soit enfin $F_n(x) = F(x) - nx$.

Pour tout couple x_1, x_2 de points de A_n^i où $x_1 \leqslant x_2$ on a $0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant n^{-1}$, d'où selon (12.3) $F(x_2) - F(x_1) \leqslant n \cdot (x_2 - x_1)$, c. à d. $F_n(x_2) - F_n(x_1) \leqslant 0$. La fonction $F_n(x)$ est donc monotone et non croissante sur chaque A_n^i. On peut donc représenter A_n^i comme somme d'une suite d'ensembles $\{A_n^{i,j}\}$ tels que $F_n(x)$ soit monotone et bornée, donc à variation bornée, sur chacun d'eux. Mais alors il en est de même de la fonction $F(x) = F_n(x) + nx$. Or, on a $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_n^{i,j}$.

Considérons à son tour l'ensemble B. On conclut immédiatement des définitions de la dérivée et de la limite approximatives supérieures (voir Chap. VIII, § 3 et 4) qu'à tout point $x \in B$ on peut faire correspondre un nombre naturel n tel que l'ensemble $\underset{\xi}{E}\left[\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} > n\right]$ admette le point x comme un point de dispersion. Si l'on désigne donc par B_n l'ensemble des points $x \in B$ tels que pour tout h l'inégalité $0 < h \leqslant n^{-1}$ entraîne simultanément les deux inégalités

$$(12.4)\qquad |\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(\xi) - F(x) > n \cdot (\xi - x);\ x \leqslant \xi \leqslant x + h]| < 2^{-1} h$$

et

$$(12.5)\qquad |\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(x) - F(\xi) > n \cdot (x - \xi);\ x - h \leqslant \xi \leqslant x]| < 2^{-1} h,$$

on aura $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Or, désignons pour tout entier i par B_n^i la partie commune de B_n et de l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$; posons enfin, comme auparavant, $F_n(x) = F(x) - nx$.

Nous allons montrer avant tout que, quel que soit i, la fonction $F_n(x)$ est *monotone* sur B_n^i.

Considérons à ce but un couple quelconque x_1, x_2 (où $x_1 < x_2$) de points d'un B_n^i. Evidemment $0 < x_2 - x_1 \leqslant n^{-1}$. En posant donc dans (12.4) $x = x_1$ et $h = x_2 - x_1$, on obtient

$$|\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(\xi) - F(x_1) > n\cdot(\xi - x_1);\ x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2]| < 2^{-1}(x_2 - x_1).$$

De même, en posant dans (12.5) $x = x_2$ et $h = x_2 - x_1$, on en tire

$$|\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(x_2) - F(\xi) > n\cdot(x_2 - \xi);\ x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2]| < 2^{-1}(x_2 - x_1).$$

Les deux inégalités ainsi obtenues montrent que l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient un point ξ_0 qui n'appartient à aucun des ensembles

$$\underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(\xi) - F(x_1) > n\cdot(\xi - x_1)] \quad et \quad \underset{\xi}{\mathrm{E}}[F(x_2) - F(\xi) > n\cdot(x_2 - \xi)],$$

donc qui satisfait simultanément aux deux inégalités correspondantes $F(\xi_0) - F(x_1) \leqslant n\cdot(\xi_0 - x_1)$ et $F(x_2) - F(\xi_0) \leqslant n\cdot(x_2 - \xi_0)$. En les ajoutant membre à membre l'une à l'autre, on obtient l'inégalité $F(x_2) - F(x_1) \leqslant n\cdot(x_2 - x_1)$, d'où finalement $F_n(x_2) - F_n(x_1) \leqslant 0$.

Il est ainsi établi que la fonction $F_n(x)$ est monotone non croissante sur chaque B_n^i. On peut donc représenter B_n^i comme somme d'une suite d'ensembles $\{B_n^{i,j}\}$ tels que $F_n(x)$ soit monotone et bornée, donc à variation bornée, sur chacun d'eux. En conséquence, il en est autant de la fonction $F(x) = F_n(x) + nx$. En même temps: $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_n^{i,j}$.

Théorème 22. *Si une fonction $F(x)$ admet à peu près partout dans un ensemble E deux nombres dérivés extrêmes approximatifs d'un même côté finis, l'ensemble E est somme d'une suite d'ensembles tels que $F(x)$ est absolument continue sur chacun d'eux.*

Par conséquent, si la fonction $F(x)$ est en outre continue sur E, elle est une fonction (ACG) sur E.

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer que p. ex. l'ensemble $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[-\infty < \underline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x) \leqslant \overline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x) < +\infty]$ est somme tout au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ soit une fonction (AC) sur chacun d'eux.

Or, à tout point $x \in A$ on peut faire correspondre un nombre naturel n tel que x soit un point de dispersion de l'ensemble $\underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x)| > n\cdot(\xi - x);\ \xi > x]$ (cf. Chap. VIII, § 3, p. 145).

En désignant donc par A_n l'ensemble des points $x \in A$ tels que pour tout h l'inégalité $0 \leqslant h \leqslant 2n^{-1}$ entraîne

$$(12.6)\quad \underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x)| > n\cdot(\xi - x);\ x \leqslant \xi \leqslant x + h]| \leqslant 4^{-1}h,$$

on a $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Pour tout entier i désignons, comme auparavant, par A_n^i la partie de A_n située sur l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Nous obtenons ainsi $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_n^i$.

Considérons enfin deux points quelconques x_1 et x_2 de A_n^i tels que $x_1 < x_2$ et posons $x_3 = 2x_2 - x_1$.

On a d'une part $0 < x_3 - x_1 = 2(x_3 - x_2) \leqslant 2n^{-1}$, d'où, en posant dans (12.6) $x = x_1$ et $h = x_3 - x_1$, on obtient l'inégalité $|\underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x_1)| > n\cdot(\xi - x_1);\ x_1 \leqslant \xi \leqslant x_3]| \leqslant 4^{-1}(x_3 - x_1) = 2^{-1}(x_3 - x_2)$ et à plus forte raison

$$(12.7)\quad |\underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x_1)| > n\cdot(\xi - x_1);\ x_2 \leqslant \xi \leqslant x_3]| \leqslant 2^{-1}(x_3 - x_2).$$

On a d'autre part $0 \leqslant x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \leqslant n^{-1}$, d'où en posant dans (12.6) $x = x_2$ et $h = x_3 - x_2$, on obtient

$$(12.8)\quad |\underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x_2)| > n\cdot(\xi - x_2);\ x_2 \leqslant \xi \leqslant x_3]| \leqslant 4^{-1}(x_3 - x_2).$$

Les inégalités (12.7) et (12.8) montrent que les deux ensembles

$$\underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x_1)| > n\cdot(\xi - x_1)] \quad et \quad \underset{\xi}{\mathrm{E}}[|F(\xi) - F(x_2)| > n\cdot(\xi - x_2)]$$

ne comblent, même conjointement, l'intervalle $[x_2, x_3]$ tout entier. Il y existe donc des points ξ_0 tels que l'on a simultanément

$$|F(\xi_0) - F(x_1)| \leqslant n\cdot(\xi_0 - x_1) \leqslant n\cdot(x_3 - x_1) = 2n\cdot(x_2 - x_1)$$

et

$$|F(\xi_0) - F(x_2)| \leqslant n\cdot(\xi_0 - x_2) \leqslant n\cdot(x_3 - x_1) = 2n\cdot(x_2 - x_1),$$

d'où $|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant 4n\cdot(x_2 - x_1)$. Cette inégalité étant ainsi établie pour tout couple de points x_1, x_2 d'un ensemble A_n^i quelconque, il en résulte aussitôt que $F(x)$ est une fonction (AC) sur tout ensemble A_n^i, c. q. f. d.

Le th. 22 montre en particulier que *toute fonction continue qui est approximativement dérivable, même d'un côté seulement, à peu près partout dans un ensemble E est une fonction (ACG) sur E.*

*§ 13. A l'aide des théorèmes qui ont été établis sur les fonctions remplissant la condition (N), le th. 22 peut être complété comme il suit.

Théorème 23. *Toute fonction $F(x)$ continue sur un ensemble fermé E et qui admet à peu près partout dans E soit un nombre dérivé de Dini fini, soit une des dérivées approximatives extrêmes bilatérales $\overline{F}_{\mathrm{ap}}(x)$ ou $\underline{F}_{\mathrm{ap}}(x)$ finie, soit enfin deux nombres dérivés approximatifs d'un même côté finis, est une fonction (ACG) sur E.*

Démonstration. En effet, d'après les th. 21 et 22, $F(x)$ est alors une fonction (VBG) sur E et en vertu des th. 8, p. 176, et 17, p. 187, elle remplit la condition (N) sur cet ensemble. Selon le th. 9, Chap. VIII, § 11, elle est donc une fonction (ACG) sur E.

*§ 14. Les conditions établies aux §§ 10—13 pour la continuité absolue généralisée d'une fonction (au sens large et restreint respectivement) sur un ensemble E seront appliquées dans le Chap. X uniquement au cas où E est un intervalle. La forme plus générale, que nous avons donnée à ces énoncés, a eu pour but avant tout de mettre en évidence les raisons de la diversité des démonstrations des théorèmes, analogues en apparence. On remarquera, en effet, que par opposition aux th. 19 et 22, dont les démonstrations ont été pour ainsi dire directes, celles des th. 20 et 23, qui les complètent respectivement, s'appuyaient sur des résultats généraux concernant la condition (N).

Or, la différence entre les deux couples des théorèmes s'effacerait, si l'on se bornait aux fonctions qui sont (ACG) ou (ACG^*) sur des intervalles. Cependant, en formulant ces théorèmes d'une façon plus générale, on aperçoit aussitôt que les critères des th. 19 et 22 concernent les fonctions sur des *ensembles tout à fait arbitraires*, tandis que ceux des th. 20 et 23 ne sont valables que pour des *ensembles fermés*.

Mais il y a une autre différence encore. Si les nombres dérivés d'une fonction tout à fait *arbitraire* satisfont sur un ensemble E aux conditions du th. 19 ou du th. 22, l'ensemble E se laisse décomposer en vertu de ces théorèmes en une suite d'ensembles sur lesquels la fonction est absolument continue. Par contre, ni le th. 20, ni le th. 23 ne permet de rien conclure sur une telle décomposition de l'ensemble E (même lorsque cet ensemble est un intervalle), à moins que la fonction considérée ne soit *continue*.

Deux exemples qui vont suivre montrent que les différences entre les énoncés des th. 19 et 22 d'une part et ceux des th. 20 et 23 de l'autre sont bien *essentielles*, c. à d. qu'elles ne sont pas seulement des conséquences de la méthode de démonstration.

I. Considérons d'abord la fonction $F(x)=\sum\limits_n 4^{-n}E(2^n x)$ où $E(x)$ désigne l'*entier* de x. C'est une fonction *croissante*. Son nombre dérivé inférieur à droite est *fini partout* et même, comme on voit aisément, il s'annule identiquement. Cependant, il n'existe aucune décomposition de l'intervalle $I_0=[0,1]$ en une suite d'ensembles sur lesquels $F(x)$ soit absolument continue, ou même seulement uniformément continue. Cela tient au théorème général suivant:

Une telle décomposition n'existe pour aucune fonction monotone $F(x)$ dont les points de discontinuité forment un ensemble dense dans I_0.

En effet, si une décomposition pareille $I_0=\sum\limits_n E_n$ existait, la fermeture d'un au moins des ensembles E_n contiendrait en vertu du th. de Baire (cf. Chap. VIII, § 2) un intervalle I. Cet ensemble serait donc dense dans I, ce qui est impossible, si la fonction $F(x)$ est uniformément continue sur E_n, puisqu'elle est par hypothèse monotone dans I et admet des points de discontinuité à l'intérieur de cet intervalle.

II. Envisageons à présent l'*exemple d'une fonction continue $F(x)$, croissante dans l'intervalle $I_0=[0,1]$ et qui, tout en admettant le dérivé inférieur à droite fini partout dans un ensemble E, n'est pas une fonction (ACG) sur E.*

A ce but, convenons d'appeler pour abréger *fonction attachée* à un intervalle $I=[a,b]$ toute fonction $\Phi(x)$ continue, non décroissante et non constante dans I, satisfaisant aux conditions:

(i) $\Phi(x)$ est constante dans chacun des intervalles I_k d'une suite $\{I_k\}$ d'intervalles disjoints et tels que $|I|=\sum\limits_k |I_k|$,

(ii) $\Phi(x)-\Phi(a)\leqslant x-a$ et $\Phi(b)-\Phi(x)\leqslant b-x$ pour tout $x\in I$.

Une telle fonction $\Phi(x)$ s'obtient facilement p. ex., en modifiant légèrement la définition de la fonction $f(x)$, considérée au Chap. I, § 15, p. 20.

Ceci dit, nous allons définir par induction une suite $\{F_n(x)\}$ de fonctions $F(x)$ attachées à l'intervalle I_0, en partant d'une fonction arbitraire $F_1(x)$ attachée à cet intervalle. Etant donnée la fonction $F_n(x)$ attachée à I_0, soit $\{I_k^{(n)}=[a_k^{(n)},b_k^{(n)}]\}$ une suite d'intervalles disjoints tels que $F_n(x)$ est constante dans chacun d'eux et que $|I_0|=\sum\limits_k |I_k^{(n)}|$. Pour tout $k=1,2,\ldots$ fixons arbitrairement une fonction quelconque $\Phi_k^{(n)}(x)$ attachée à l'intervalle $I_k^{(n)}$ et posons

$$F_{n+1}(x)=\begin{cases}\sum\limits_i^{(x)}[\Phi_i^{(n)}(b_i^{(n)})-\Phi_i^{(n)}(a_i^{(n)})] & \text{pour}\quad x\in I_0-\sum\limits_k I_k^{(n)}\\ \Phi_k^{(n)}(x)-\Phi_k^{(n)}(a_k^{(n)})+\sum\limits_i^{(x)}[\Phi_i^{(n)}(b_i^{(n)})-\Phi_i^{(n)}(a_i^{(n)})] & \text{pour } x\in I_k^{(n)},\end{cases}$$

la sommation $\sum\limits_i^{(x)}$ s'étendant sur toutes les valeurs i telles que $b_i^{(n)}\leqslant x$.

La suite $\{F_n(x)\}$ étant ainsi définie, soit

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}F_n(x).$$

La fonction $F(x)$ est évidemment continue et croissante dans I_0. En vertu du th. de Fubini (Chap. III, § 5, p. 53) on a en outre

$$(14.1)\qquad F'(x)=0 \quad \textit{presque partout dans } I_0.$$

Considérons à présent l'ensemble $E = \prod_n \sum_k (I_k^{(n)})^{\circ}$ et soit x un point quelconque de E. Il existe donc une suite $\{I_{k_n}^{(n)}\}$ d'intervalles qui contiennent x dans leurs intérieurs. On a par conséquent $F_n(b_{k_n}^{(n)}) - F_n(x) \leqslant b_{k_n}^{(n)} - x$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il en résulte que $F(b_{k_n}^{(n)}) - F(x) \leqslant b_{k_n}^{(n)} - x$, d'où $0 \leqslant \underline{F}^{+}(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in E$.

Ceci établi, supposons que $F(x)$ soit une fonction (ACG) sur E. Il existerait par conséquent une décomposition $E = \sum_n E_n$ telle que $F(x)$ soit une fonction (AC) sur chaque E_n, donc également sur sa fermeture $\overline{E}_n$. Cependant l'ensemble $I_0 - E$ est évidemment somme d'une suite d'ensembles fermés de mesure nulle, donc partout discontinus, de sorte que, en vertu du th. de Baire (Chap. VIII, § 2), un au moins des ensembles $\overline{E}_n$ contient un intervalle. En conséquence, $F(x)$ serait donc croissante et absolument continue dans un sous-intervalle de I_0, contrairement à (14.1).