CHAPITRE VIII.

Fonctions à variation bornée généralisée.

Préliminaires.

§ 1. En exposant la théorie de Lebesgue, nous avons choisi comme point de départ la notion de fonction *absolument continue* (cf. la définition dite *descriptive* de l'intégrale ($\mathcal{L}$), Chap. IV, § 1). Cependant, au point de vue historique (cf. Chap. VII, § 1) c'est la définition *constructive* de l'intégrale lebesguienne qui a précédé la théorie des fonctions absolument continues. Il en est encore de même des généralisations ultérieures de la notion d'intégrale, dues à M. Denjoy et à M. Perron.

On a vu, en effet, au Chap. VII que la théorie de Perron se passe de toute notion de fonction absolument continue. De même, les premières notes de A. Denjoy [2; 3], datant de 1912, ne contenaient aucune généralisation directe de la notion de continuité absolue. La méthode d'intégration qui y est définie (et que M. Denjoy appelle *totalisation*) constitue une synthèse, résultant des opérations de Lebesgue, de Cauchy et de Harnack par un procédé transfini (voir plus loin, Chap. X).

Les idées de M. Denjoy ont attiré aussitôt l'attention de M. Lusin et de M. Khintchine, qui y ont rattaché leurs recherches importantes sur la théorie de la dérivée et de l'intégrale. Ainsi, M. N. Lusin [2] a réussi d'obtenir certaines généralisations des notions de fonction à variation bornée et de fonction absolument continue, qui sont par rapport à l'intégrale de Denjoy de 1912 ce que les fonctions ordinaires à variation bornée et absolument continues sont pour l'intégrale de Lebesgue. Les fonctions distinguées par M. Lusin seront appelées dans la suite *à variation bornée généralisée au sens restreint* et *absolument continues généralisées au sens restreint* (voir plus loin, § 19); pour abréger, nous

les appellerons aussi *fonctions* (VBG^*) et *fonctions* (ACG^*) respectivement.

Les généralisations de M. Lusin ont été poursuivies par M. A. Khintchine, qui a introduit en 1916 les fonctions que nous appellerons ici (voir §§ 8 et 10) *à variation bornée généralisée au sens large* ou *fonctions* (VBG) et *absolument continues généralisées au sens large* ou *fonctions* (ACG). Or, par opposition aux fonctions à variation bornée et absolument continues et aux fonctions (VBG^*) et (ACG^*), les fonctions (VBG) et (ACG) ne sont pas, en général, dérivables au sens ordinaire de ce terme. On peut montrer toutefois que la dérivabilité *presque partout* s'étend à ces fonctions, si l'on généralise en même temps la notion de dérivée d'une façon convenable: c'est ainsi que M. Khintchine a introduit la dérivée qu'il appelle *asymptotique* et que nous appellerons avec M. Denjoy *dérivée approximative*. En outre, comme l'a montré M. Khintchine, non seulement les fonctions (VBG) et (ACG) sont presque partout approximativement dérivables, mais encore toute fonction (ACG) est entièrement déterminée par sa dérivée approximative, donnée presque partout (voir plus loin § 11).

On parvient ainsi à une généralisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue et qui consiste notamment à remplacer dans sa définition descriptive (voir Chap. IV, § 1) la notion de fonction absolument continue par celle de fonction (ACG) et, en même temps, la notion de dérivée ordinaire par celle de dérivée approximative. Dans une forme un peu différente, mais tout à fait équivalente, cette généralisation a été explicitement formulée en 1916 par M. A. Khintchine [1; 2] non seulement comme une généralisation de l'intégrale de Lebesgue, mais aussi comme celle de la „totale" de M. Denjoy de 1912. Presque simultanément a paru la troisième Note de M. Denjoy [4] qui contient des généralisations équivalentes et obtenues indépendamment de M. Khintchine.

Pour l'exposé systématique de ces résultats voir A. Denjoy [6 et 7]. La première partie de ce Mémoire constitue l'objet principal de ce Chapitre. Les résultats de la seconde partie, où M. Denjoy donne la définition dite *constructive* de son intégrale, seront traités au Chap. X.

Toutes ces généralisations ne concernent que les fonctions d'*une* variable réelle et par conséquent aussi les fonctions additives d'intervalle linéaire sur lesquelles elles se transportent immédiatement.

Convenons enfin de sous-entendre une fois pour toutes (et sans aucune mention ultérieure) que les fonctions dont il sera question soient définies toujours dans un intervalle entier (ou sur la droite entière), même lorsqu'il s'agit des propriétés qu'elles présentent seulement sur d'autres ensembles. Ainsi cette simplification des énoncés n'est pas à interpréter comme une diminution de la généralité.

Théorème de Baire.

§ 2. Etant donné un ensemble quelconque $E \subset \mathbf{R}_n$, appelons *portion* de E tout ensemble de la forme $E \cdot I$ où I désigne un intervalle arbitraire de $\mathbf{R}_n$ dont l'*intérieur* admet des points communs avec E, c. à d. tel que $E \cdot I^{\circ} \neq 0$.

Théorème de Baire. Etant donnés un ensemble fermé F et une suite d'ensembles fermés $\{F_i\}$ couvrant F, un au moins des ensembles F_i contient une portion de l'ensemble F.

Démonstration. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait définir par induction une suite descendante $\{P_i\}$ de portions de F telles que l'on ait $P_i \cdot F_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ On aurait donc $(\prod_i P_i) \cdot (\sum_i F_i) = 0$, et comme on a d'après le th. de Cantor, Chap. I, § 4, p. 5, $\prod_i P_i \neq 0$, l'ensemble F ne serait pas entièrement contenu dans $\sum_i F_i$, contrairement à l'hypothèse.

Etabli plus haut pour un espace $\mathbf{R}_n$ quelconque, le th. de Baire s'étend sans peine aux espaces abstraits, métriques et complets (cf. p. ex. F. Hausdorff [II, § 27]). Cependant, nous n'aurons à l'appliquer ici qu'à la droite et plus loin (dans le Chap. XI) au plan.

Limites approximatives.

§ 3. La généralisation de la notion de dérivée suppose une généralisation préalable de la notion de limite.

Soit $F(x)$ une fonction arbitraire définie dans un entourage d'un point x_0 (d'ailleurs, lorsqu'il s'agit des définitions des limites unilatérales, on peut même se borner aux entourages unilatéraux).

On appelle *limite approximative supérieure droite* de la fonction $F(x)$ au point x_0 la borne inférieure de tous les nombres y pour lesquels l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[F(x) > y;\, x > x_0]$ admet x_0 comme point de dispersion (cf. Chap. III, § 6, p. 54). De même, *limite approximative inférieure droite* de $F(x)$ au point x_0 est la borne supérieure des nombres y pour lesquels l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[F(x) < y;\, x > x_0]$ admet x_0 comme point de dispersion.

On voit aisément que dans les définitions précédentes les inégalités $F(x) > y$ et $F(x) < y$ peuvent être remplacées respectivement par $F(x) \geqslant y$ et $F(x) \leqslant y$.

On définit d'une façon analogue les deux limites approximatives, supérieure et inférieure, *gauches*. Les quatre limites approximatives extrêmes ainsi définies seront désignées respectivement par

$$\limsup_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x), \qquad \liminf_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x),$$
$$\limsup_{x \to x_0-} \mathrm{ap}\, F(x), \qquad \liminf_{x \to x_0-} \mathrm{ap}\, F(x).$$

La plus grande des deux limites approximatives supérieures unilatérales s'appellera *limite approximative supérieure*; la définition de la *limite approximative inférieure* est symétrique. Nous désignerons ces deux limites respectivement par

$$\limsup_{x \to x_0} \mathrm{ap}\, F(x) \quad \textit{et} \quad \liminf_{x \to x_0} \mathrm{ap}\, F(x).$$

Par définition on a toujours

$$(3.1) \quad \limsup_{x \to x_0+} F(x) \geqslant \limsup_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x) \geqslant \liminf_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x) \geqslant \liminf_{x \to x_0+} F(x)$$

et une formule symétrique pour les limites unilatérales gauches.

Pour mieux saisir le sens des ces définitions, on remarquera que l'on peut définir d'une façon tout à fait analogue les quatre limites ordinaires. P. ex. la limite supérieure droite de $F(x)$ en x_0 peut être définie comme la borne inférieure de tous les nombres y pour lesquels x_0 est un point isolé de l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[F(x) > y;\, x > x_0]$, c. à d. qui n'en est pas un point d'accumulation. L'inégalité (3.1) devient alors évidente.

Si les deux limites approximatives droites, la supérieure et l'inférieure, sont égales, leur valeur commune s'appelle *limite approximative droite*; la notion de *limite approximative gauche* est tout à fait symétrique. Enfin, si toutes les quatre limites approximatives d'une fonction dans un point sont égales, leur valeur commune porte le nom de *limite approximative* de cette fonction dans ce point.

Comme le montre la formule (3.1), si une fonction $F(x)$ admet dans un point x_0 une limite (droite, gauche ou bilatérale), elle y admet aussi une limite approximative correspondante.

Plus généralement:

(3.2) *Si x_0 est un point de densité* (droite, gauche ou bilatérale) *d'un ensemble mesurable E, l'existence d'une limite* (droite, gauche ou bilatérale) *de $F(x)$, lorsque x tend vers x_0, en parcourant les points de E, entraîne l'existence de la limite approximative correspondante de $F(x)$ au point x_0 et les deux limites sont égales.*

On aperçoit également que

(3.3) *Si, en outre, la fonction $F(x)$ est mesurable sur E, la limite $\limsup_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x)$ est la borne inférieure de tous les nombres y pour lesquels l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) \leqslant y;\ x > x_0;\ x \in E]$ admet x_0 comme point de densité.*

Il s'en suit en vertu de la définition de la limite approximative inférieure droite que

(3.4) *Dans les mêmes hypothèses sur l'ensemble E et sur la fonction $F(x)$, pour que l'on ait $l = \lim_{x \to x_0+} \mathrm{ap}\, F(x)$, il faut et il suffit que l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[l - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant l + \varepsilon;\ x > x_0;\ x \in E]$ admette, quel que soit $\varepsilon > 0$, le point x_0 comme point de densité.*

Dérivées approximatives et relatives.

§ 4. Etant donnée une fonction finie $F(x)$, définie dans un intervalle $I = [a, b]$, on appelle respectivement *nombre dérivé approximatif supérieur, droit* et *gauche*, et *nombre dérivé approximatif inférieur, droit* et *gauche*, de la fonction $F(x)$ dans un point $x_0 \in I$ les quatre limites approximatives correspondantes du quotient $\dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$. Nous les appellerons aussi *dérivés approximatifs extrêmes* et les désignerons, par analogie aux quatre nombres dérivés de Dini (cf. Chap. III, § 1, p. 46), respectivement par $\overline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$, $\overline{F}_{\mathrm{ap}}^{-}(x_0)$, $\underline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$ et $\underline{F}_{\mathrm{ap}}^{-}(x_0)$.

Le plus grand des nombres $\overline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$ et $\overline{F}_{\mathrm{ap}}^{-}(x_0)$ est dit *dérivée approximative* bilatérale *supérieure*; il sera désigné par $\overline{F}_{\mathrm{ap}}(x_0)$. Le plus petit des nombres $\underline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$ et $\underline{F}_{\mathrm{ap}}^{-}(x_0)$ est dit *dérivée approximative* bilatérale *inférieure* et désigné par $\underline{F}_{\mathrm{ap}}(x_0)$.

Dans le cas où $\overline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0) = \underline{F}_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$, ce nombre porte le nom de *dérivée approximative droite* de $F(x)$ dans x_0; on le désigne par $F_{\mathrm{ap}}^{+}(x_0)$. La définition de $F_{\mathrm{ap}}^{-}(x_0)$ est analogue.

En cas d'égalité de ces deux dérivées approximatives leur valeur commune s'appelle tout court *dérivée approximative* de $F(x)$ et on la désigne par $F'_{\mathrm{ap}}(x_0)$. Si cette dérivée est finie, la fonction $F(x)$ est dite *approximativement dérivable* dans le point x_0.

Il est clair que la dérivabilité de $F(x)$ dans un point x_0 entraîne la dérivabilité approximative de $F(x)$ dans ce point et que l'on a alors $F'(x_0) = F'_{\mathrm{ap}}(x_0)$. Cependant la réciproque serait évidemment fausse.

La signification de ces généralisations, dues à M. Denjoy et à M. Khintchine, résulte de la propriété suivante:

(4.1) *Si deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ ne diffèrent que tout au plus dans un ensemble dont x_0 est un point de dispersion, les valeurs des limites approximatives et les valeurs des dérivés approximatifs extrêmes de $F(x)$ et de $G(x)$ dans x_0 sont respectivement égales.*

En particulier, par suite du th. de Lebesgue sur les points de densité (cf. Chap. III, § 6, th. 6), *si deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ coïncident dans un ensemble mesurable E, leurs limites approximatives et leurs nombres dérivés approximatifs extrêmes coïncident respectivement presque partout dans cet ensemble.* En d'autres termes: pour que les limites approximatives et les dérivés approximatifs extrêmes d'une fonction se trouvent déterminés presque partout dans un ensemble mesurable E, il suffit que cette fonction soit connue presque partout dans E, les valeurs qu'elle prend ailleurs étant tout à fait indifférentes.

Pour les autres généralisations, dues également à M. Denjoy, mais qui n'interviennent pas dans notre exposé, comme p. ex. les ainsi dits *nombres dérivés prépondérants*, de même que pour une étude plus approfondie des propriétés des dérivés approximatifs, on se reportera à A. Denjoy [6] et à A. Khintchine [4; 5].

On appelle *dérivée relative* ou *dérivée par rapport à un ensemble* E d'une fonction finie $F(x)$ dans un point $x_0 \in E$ la limite du quotient $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, lorsque x tend vers x_0, en parcourant les points de E. Nous la désignerons par $F'_E(x_0)$. Si cette limite existe et est finie, la fonction $F(x)$ est dite *dérivable* dans x_0 *par rapport à l'ensemble E*.

En vertu du th. de Lebesgue sur les points de densité et selon (3. 2), p. 146,

(4. 2) *Si une fonction $F(x)$ est dans un ensemble mesurable E dérivable presque partout par rapport à E, elle est dérivable approximativement presque partout dans E et on y a presque partout $F'_{\mathrm{ap}}(x)=F'_E(x)$.*

Fonctions à variation bornée sur un ensemble.

§ 5. Nous désignerons par $V(F; E)$ et appellerons *variation faible* d'une fonction finie $F(x)$ sur un ensemble E ou simplement *variation de $F(x)$ sur E*, la borne supérieure des nombres $\sum_i |F(b_i)-F(a_i)|$ où $\{[a_i, b_i]\}$ est une suite finie arbitraire d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à E. Si $V(F; E)<+\infty$, la fonction $F(x)$ sera dite *à variation bornée au sens large* sur l'ensemble E, ou simplement *fonction à variation bornée sur E*, ou encore, tout court, *fonction (VB) sur E*.

Dans le cas particulier où l'ensemble E est un intervalle fermé, on a évidemment $V(F; E)=W(F; E)$, c. à d. que la variation faible de la fonction F sur E coïncide alors avec sa variation absolue au sens du Chap. I, § 9, p. 8.

La définition des fonctions à variation bornée au sens large sur un ensemble constitue donc une généralisation (pour les fonctions d'une variable réelle) de celle des fonctions à variation bornée sur l'intervalle entier. Il est vrai que dans le cas où E est une figure linéaire formée d'intervalles disjoints on n'a que $V(F; E)\geqslant W(F; E)$, mais il est facile de voir que même dans ce cas $W(F; E)<+\infty$ entraîne toujours $V(F; E)<+\infty$.

Les théorèmes suivants sont d'évidence immédiate.

(5. 1) *Toute fonction (VB) sur un ensemble est bornée sur cet ensemble.*

(5. 2) *Toute fonction $F(x)$ qui est (VB) sur un ensemble E_0 l'est également sur chaque sous-ensemble $E\subset E_0$ et on a $V(F; E)\leqslant V(F; E_0)$.*

(5. 3) *Toute combinaison linéaire à coefficients constants de deux fonctions (VB) sur un ensemble E, ainsi que le produit de ces fonctions, sont également des fonctions (VB) sur E.*

On a, en effet, pour tout couple de fonctions $F(x)$ et $G(x)$, définies sur E, et pour tout couple de nombres réels α et β l'inégalité $V(\alpha\cdot F+\beta\cdot G; E)\leqslant|\alpha|\cdot V(F; E)+|\beta|\cdot V(G; E)$. De même, en désignant par M la borne supérieure des valeurs absolues de $F(x)$ et $G(x)$ pour $x\in E$, on a (cf. Chap. I, § 14, p. 19) l'inégalité $V(F\,G; E)\leqslant M\cdot V(F; E)+M\cdot V(G; E)$.

(5. 4) *Toute fonction (VB) sur un ensemble E et qui est continue sur la fermeture $\bar{E}$ de E est également une fonction (VB) sur $\bar{E}$.*

On a, en effet, par suite de la continuité de F sur $\bar{E}$, l'égalité $V(F; \bar{E})=V(F; E)$.

§ 6. Une fonction $F(x)$ s'appellera *monotone non croissante* ou *monotone non décroissante* sur un ensemble E, si pour tout couple x_1, x_2 de points de E l'inégalité $x_1\leqslant x_2$ entraîne respectivement l'inégalité $F(x_1)\geqslant F(x_2)$ ou l'inégalité $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

Lemme. *Pour qu'une fonction $F(x)$ soit bornée et non décroissante sur un ensemble E, il faut et il suffit qu'elle coïncide dans E avec une autre fonction qui l'est sur la droite toute entière.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est à la fois nécessaire, on n'a qu'à désigner pour tout x par $I_{(x)}$ la demi-droite $[-\infty, x]$ et par $G(x)$ la borne supérieure des valeurs de la fonction F sur l'ensemble $E\cdot I_{(x)}$ ou bien la borne inférieure des valeurs de F sur E, suivant que l'on a $E\cdot I_{(x)}\neq 0$ ou $E\cdot I_{(x)}=0$.

Théorème 1. *Pour qu'une fonction $F(x)$ soit à variation bornée sur un ensemble E, il faut et il suffit qu'elle coïncide sur E avec une autre fonction qui l'est sur la droite toute entière.*

Démonstration. La suffisance de cette condition étant évidente, il ne s'agit d'en démontrer que la nécessité. Admettons donc que $F(x)$ est une fonction (VB) sur E et, $I_{(x)}$ désignant pour tout x réel la demi-droite $[-\infty, x]$, posons

$$V(x)=\begin{cases} V(F; E\cdot I_{(x)}), & \textit{si} \quad E\cdot I_{(x)}\neq 0\\ 0, & \textit{lorsque} \quad E\cdot I_{(x)}=0\,.\end{cases}$$

On aperçoit aussitôt que $V(x)$ est une fonction monotone et bornée sur la droite toute entière et que $V(x)-F(x)$ est une fonction monotone non décroissante et bornée sur l'ensemble E. En vertu du lemme précédent il existe donc une fonction $G(x)$ bornée et non décroissante sur $[-\infty, +\infty]$ qui coïncide dans E avec $V(x)-F(x)$. On a par conséquent $F(x)=V(x)-G(x)$ pour tout $x\in E$ et la fonction $V(x)-G(x)$, comme différence de deux fonctions bornées et monotones sur $[-\infty, +\infty]$, y est évidemment à variation bornée, c. q. f. d.

En vertu du th. de Lebesgue (voir Chap. III, § 3, th. 2), on en déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. *Toute fonction (VB) sur un ensemble E est presque partout dans E dérivable par rapport à E.*

Théorème 3. *Toute fonction $F(x)$ mesurable sur un ensemble mesurable E_0 et qui est, en même temps, une fonction (VB) sur un ensemble $E \subset E_0$, est une fonction (VB) sur un ensemble mesurable U tel que $E \subset U \subset E_0$ et approximativement dérivable presque partout dans U.*

Démonstration. Il existe en vertu du th. 1 une fonction $G(x)$ étant (VB), donc mesurable, sur la droite toute entière et telle que l'on ait $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, l'ensemble E_0 et la fonction $F(x)$ sur E_0 étant mesurables par hypothèse, il en est de même de l'ensemble $U = \underset{x}{\mathrm{E}}[F(x) = G(x); x \in E_0]$. En même temps, on a évidemment $E \subset U \subset E_0$ et $F(x)$ est, avec $G(x)$, une fonction (VB) sur U. L'existence de $F'_{\mathrm{ap}}(x) = G'_E(x) = G'(x) \neq \infty$ presque partout dans U est dans ces conditions une conséquence directe du th. 2 et de (4.2), p. 148.

Fonctions à variation bornée généralisée.

§ 7. Une fonction $F(x)$ sera dite *à variation bornée généralisée au sens large sur un ensemble E*, ou plus simplement, *à variation bornée généralisée sur E*, ou, en abrégé, *fonction (VBG) sur E*, lorsque E est somme d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ est une fonction (VB) sur chacun d'eux.

Les fonctions (VBG) sont donc manifestement une généralisation des fonctions (VB) et on déduit facilement de (5.3), p. 148, que *toute combinaison linéaire à coefficients constants, de même que tout produit de deux fonctions (VBG) sur un ensemble est aussi une fonction (VBG) sur cet ensemble.*

Le th. 3 entraîne immédiatement le th. suivant, qui correspond dans la théorie de l'intégrale de Denjoy, au th. de Lebesgue sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée (cf. Chap. III, § 3, th. 2).

Théorème 4 (de Denjoy-Khintchine). *Toute fonction (VBG) mesurable sur un ensemble mesurable est dans cet ensemble presque partout approximativement dérivable.*

Fonctions absolument continues sur un ensemble.

§ 8. Une fonction finie $F(x)$ définie sur un ensemble E sera dite *absolument continue au sens large sur E* ou *absolument continue sur E*, ou encore *fonction (AC) sur E*, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles $\{[a_i, b_i]\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont E contient les extrémités

$$\sum_i (b_i - a_i) < \eta \quad \textit{entraîne} \quad \sum_i |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Cette définition généralise celle des fonctions absolument continues dans un intervalle linéaire (cf. Chap. I, § 12 et § 14) et permet d'en généraliser certaines propriétés fondamentales. On a notamment les théorèmes:

(8.1) *Toute fonction (AC) sur un ensemble borné E est (VB) sur cet ensemble; elle y est donc bornée* (cf. (5.1), p. 148).

En effet, lorsque $F(x)$ est une fonction (AC) sur E, il existe par définition un $\eta > 0$ tel que $\sum_i (b_i - a_i) \leqslant \eta$ entraîne $\sum_i |F(b_i) - F(a_i)| \leqslant 1$ pour toute suite finie d'intervalles $\{[a_i, b_i]\}$, où $a_i \in E$ et $b_i \in E$, et qui n'empiètent pas l'un sur l'autre. Il en résulte, en posant $I_n = [n\eta, (n+1)\eta]$, que $V(F; E \cdot I_n) \leqslant 1$ pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de sorte que $F(x)$ est une fonction (VB) sur tout ensemble $E \cdot I_n$ et par conséquent sur l'ensemble E tout entier, qui, comme borné, est somme d'un nombre fini d'ensembles $E \cdot I_n$.

(8.2) *Toute fonction (AC) sur un ensemble E_0 l'est également sur tout ensemble $E \subset E_0$.*

A l'aide des évaluations faciles, analogues à celles du Chap. I, § 14, p. 19, on montre enfin que

(8.3) *Toute combinaison linéaire de deux fonctions (AC) sur un ensemble, de même que le produit de ces fonctions, sont également des fonctions (AC) sur cet ensemble.*

(8.4) *Toute fonction (AC) sur un ensemble E, qui est continue sur la fermeture $\overline{E}$ de cet ensemble, est également une fonction (AC) sur $\overline{E}$.*

Fonctions absolument continues généralisées.

§ 9. La définition de la continuité et celle de la semicontinuité d'une fonction dans un espace entier ou sur un ensemble fermé (cf. Chap. II, § 10, p. 40) s'étendent sans modification aux ensembles arbitraires. Ainsi, une fonction $F(x)$ est continue sur (ou dans) un ensemble E, lorsqu'elle y est finie et lorsque pour tout point x_0 de cet ensemble $F(x)$ tend vers $F(x_0)$, quand x tend vers x_0 en parcourant les points de E.

Par conséquent, il ne faut pas confondre ce cas avec celui où une fonction $F(x)$, considérée p. ex. dans un intervalle I, est continue en tout point x_0 d'un ensemble $E \subset I$, c. à d. où, pour tout $x_0 \in E$, $F(x)$ tend vers $F(x_0)$, en *parcourant tous les points de* I (donc aussi les points étrangers à E). Par contre, le terme „dérivabilité dans un ensemble E" désigne la dérivabilité ordinaire dans tout point de cet ensemble et non la dérivabilité par rapport à E (cf. p. 147).

Une fonction $F(x)$ sera dite *absolument continue généralisée au sens large sur un ensemble* E ou *absolument continue généralisée sur* E, ou enfin *fonction* (ACG) *sur* E, si elle est continue sur E et lorsque E est une somme finie ou dénombrable d'ensembles E_n tels que $F(x)$ est une fonction (AC) sur chacun d'eux.

En vertu de (8.1) et (8.3) on a les théorèmes suivants.

(9.1) *Toute fonction* (ACG) *sur un ensemble est une fonction* (VBG) *sur cet ensemble.*

(9.2) *Toute combinaison linéaire à coefficients constants et tout produit de deux fonctions* (ACG) *sur un ensemble* E *sont autant des fonctions* (ACG) *sur* E.

En particulier, on conclut de (9.1) d'après le th. de Denjoy-Khintchine (th. 4, p. 150) que toute fonction (ACG) sur un ensemble E est presque partout approximativement dérivable dans E. Or, on verra dans la suite que, de plus, toute fonction (ACG) dans un intervalle se trouve déterminée d'une façon univoque (à une constante arbitraire près) par sa dérivée approximative donnée presque partout. Cette propriété est liée avec une autre propriété des fonctions, appelée par M. Lusin „condition (N)".

Dans le th. de Denjoy-Khintchine la dérivabilité approximative ne peut être remplacée par l'ordinaire, même s'il s'agit des fonctions (VBG) dans un intervalle entier. En effet, toute fonction qui n'admet qu'un ensemble au plus dénombrable des valeurs est une fonction (VBG). En particulier, la fonction égale à 0 dans tout point rationnel et à 1 partout ailleurs est une fonction (VBG) mesurable; mais elle n'est nulle part continue, donc, à plus forte raison, dérivable au sens ordinaire.

Or, on peut donner également l'exemple d'une fonction (ACG) dans un intervalle qui n'est dérivable (au sens ordinaire de ce terme) dans aucun point d'un ensemble de mesure positive.

Soient à ce but H un ensemble parfait non dense et de mesure positive, d'ailleurs arbitraire, a et b ses bornes, $I = [a, b]$ l'intervalle qui le contient, $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ la suite des intervalles contigus à H et enfin c_n le centre de I_n. On a donc

$$I = H + \sum_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{9.3}$$

Considérons pour tout $n = 1, 2, \ldots$ les n premiers intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$, rangés dans leur ordre naturel, c. à d. de gauche à droit, et désignons par ρ_n le maximum des distances de deux intervalles consécutifs. Il est évident que

$$\lim_n |I_n| = \lim_n \rho_n = 0. \tag{9.4}$$

Ceci dit, soit $F(x)$ la fonction satisfaisant aux conditions: $F(x) = 0$ pour tout $x \in H$, $F(c_n) = |I_n| + \rho_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, et linéaire dans chacun des intervalles $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$.

Ainsi définie, la fonction $F(x)$ est en vertu de (9.4) continue dans I et (AC) sur H, de même que sur chaque I_n où $n = 1, 2, \ldots$ En vertu de (9.3), $F(x)$ est donc une fonction (ACG) sur I.

Nous allons montrer cependant qu'elle n'est dérivable dans aucun point $x \in H$. En effet, comme elle s'annule dans H, on a

$$\underline{F}^{-}(x) \leqslant 0 \leqslant \overline{F}^{+}(x) \quad \textit{pour tout } x \in H. \tag{9.5}$$

Si, par conséquent, x est l'extrémité gauche d'un I_n, la dérivée $F'(x)$ est en défaut, puisqu'on a dans ce cas évidemment $\overline{F}(x) = \overline{F}^{+}(x) > 0$, donc, selon (9.5), $\overline{F}(x) \neq \underline{F}(x)$.

Si, d'autre part, $x \in H$, mais $x \neq a_n$, quel que soit n, et $x \neq b$, envisageons pour tout $n = 1, 2, \ldots$ celui des intervalles $I_1, I_2, \ldots I_n$ qui se trouve situé à droite de x à la distance la plus petite (il y en a toujours pour n suffisamment grand) et désignons par i_n son indice. Par conséquent $\lim_n i_n = \infty$ et $0 < c_{i_n} - x < |I_{i_n}| + \rho_n$, d'où, par définition de $F(x)$, on a $F(c_{i_n}) - F(x) = |I_{i_n}| + \rho_n > c_{i_n} - x$. Comme $\lim_n e_{i_n} = x$, il en résulte que $\overline{F}^{+}(x) \geqslant 1$, ce qui prouve en raison de (9.5) que la fonction $F(x)$ n'est pas dérivable dans x.

Si, enfin, $x = b$, la conclusion est la même, en considérant $\underline{F}^{-}(x)$ au lieu de $\overline{F}^{+}(x)$.

Condition (N) de Lusin.

§ 10. Etant donnée une fonction $F(x)$ définie sur un ensemble E, convenons de désigner par $F(E)$ le *transformé* de E

fourni par cette fonction, c. à d. l'ensemble des valeurs de $F(x)$ pour $x \in E$.

Nous dirons que la fonction $F(x)$ remplit la *condition* (N) sur un ensemble E, lorsque pour tout ensemble $H \subset E$

$$|H| = 0 \quad \textit{entraîne} \quad |F(H)| = 0.$$

Il est évident que *si une fonction remplit la condition* (N) *sur chacun des ensembles d'une suite finie ou dénombrable, elle remplit cette condition aussi sur la somme de ces ensembles.*

Le terme „condition (N)" a été introduit par M. N. Lusin [I, p. 109], qui a reconnu le premier le rôle de cette condition dans la Théorie de l'intégrale. Il est aisé d'apercevoir que dans le domaine des fonctions continues la condition (N) est nécessaire et suffisante pour que la fonction transforme tout ensemble mesurable en ensemble mesurable (cf. H. Rademacher [1] et H. Hahn [I, p. 586]). Parmi des ouvrages plus récents consacrés à la condition (N) et aux autres conditions analogues (cf. plus loin, Chap. IX) est à citer avant tout celui de M-lle N. Bary [2].

Comme dans le Chap. V (cf. p. 91), nous conviendrons dans la suite de désigner par $m(F; E)$ et $M(F; E)$ respectivement la borne inférieure et supérieure des valeurs de $F(x)$ pour $x \in E$; dans le cas où $E = 0$ on posera $m(F; E) = M(F; E) = 0$.

Théorème 5. *Toute fonction* (ACG) *sur un ensemble remplit la condition* (N) *sur cet ensemble.*

Démonstration. On peut se borner évidemment à n'envisager que les fonctions (AC), puisque par définition (cf. p. 152) tout ensemble sur lequel une fonction $F(x)$ est (ACG) est la somme d'une suite d'ensembles tels que $F(x)$ est (AC) sur chacun d'eux.

Soit donc $F(x)$ une fonction absolument continue sur un ensemble E. Or, étant donné un $\varepsilon > 0$, on déduit facilement de la définition, p. 151, qu'il existe un $\eta > 0$ tel que $\{I_i\}$ étant une suite (finie ou infinie) quelconque d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres

$$(10.1) \qquad \sum_i |I_i| < \eta \quad \textit{entraîne} \quad \sum_i [M(F; E \cdot I_i) - m(F; E \cdot I_i)] < \varepsilon.$$

Ceci établi, soient H un sous-ensemble quelconque de E de mesure nulle et $\{J_i\}$ une suite d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que $H \subset \sum_i J_i$ et $\sum_i |J_i| < \eta$. La suite d'intervalles $\{[m_i, M_i]\}$ où $m_i = m(F; E \cdot J_i)$ et $M_i = M(F; E \cdot J_i)$

couvre alors le transformé $F(H)$ de H et on a selon (10.1) $|H| \leqslant \sum_i (M_i - m_i) \leqslant \varepsilon$ d'où, ε étant arbitraire, $|F(H)| = 0$, c. q. f. d.

Il en résulte la généralisation suivante (pour les fonctions d'une variable réelle) du th. 3, Chap. III, § 4:

Théorème 6. *Toute fonction* $F(x)$ *qui est* (ACG) *dans un intervalle* $I = [a, b]$ *et pour laquelle on a presque partout dans cet intervalle* $F'_{\mathrm{ap}}(x) \geqslant 0$ *ou, plus généralement,* $\overline{F}^+(x) \geqslant 0$, *est une fonction monotone non décroissante.*

Démonstration. Considérons un $\varepsilon > 0$ arbitraire et posons $G(x) = F(x) + \varepsilon \cdot x$. Ainsi définie, $G(x)$ est donc aussi une fonction (ACG) dans I; elle y remplit par conséquent la condition (N). En vertu de l'hypothèse on a $\overline{G}^+(x) = \overline{F}^+(x) + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$ presque partout dans I, d'où, en posant $H = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{G}^+(x) \leqslant 0]$, il vient $|H| = 0$, ce qui entraîne $|G(H)| = 0$. L'ensemble $G(H)$ est donc partout discontinu. Il en résulte en vertu du lemme de Zygmund (Chap. VII, § 8) que la fonction $G(x)$ est non décroissante dans I, de sorte que l'on a pour tout couple de points $x_1 < x_2$ de cet intervalle $G(x_2) - G(x_1) = F(x_2) - F(x_1) + \varepsilon \cdot (x_2 - x_1) \geqslant 0$ et, ε étant arbitraire, $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$, c. q. f. d.

En examinant le raisonnement qui précède, on constate que l'hypothèse de la continuité absolue généralisée de $F(x)$ n'a été employée que pour montrer que toute fonction de la forme $F(x) + \varepsilon \cdot x$, où $\varepsilon > 0$, remplit la condition (N). Or, il est remarquable que la condition (N) ne subsiste pas, si on ajoute une fonction linéaire quelconque à une fonction, même *continue*, qui remplit cette condition (ce résultat est dû à M. S. Mazurkiewicz [1]). C'est pourquoi il ne suffit pas d'admettre dans le raisonnement précédent que la fonction $F(x)$ remplisse seulement la condition (N).

Néamoins, le th. 6 lui-même reste vrai pour des fonctions arbitraires satisfaisant à la condition (N). Les théorèmes qui seront établis au Chap. IX ont pour conséquence un théorème beaucoup plus général, à savoir que *toute fonction continue qui remplit la condition* (N) *et dont la dérivée est non négative dans presque tout point où elle existe, est une fonction monotone non décroissante.*

Corollaire. *Si la dérivée approximative d'une fonction* (ACG) *dans un intervalle s'annule presque partout dans cet intervalle, la fonction est une constante.*

§ 11. Nous allons montrer à présent que pour les fonctions continues à variation bornée généralisée sur des ensembles fermés la réciproque du th. 5 est également vraie, à savoir que la condition

(N) est dans ce cas équivalente à la continuité absolue généralisée. La même relation subsiste entre les fonctions à variation bornée et absolument continues. Ces théorèmes seront déduits de certaines évaluations très simples portant sur la mesure des transformés.

Lemme. *Si une fonction finie $F(x)$ est partout dérivable dans un ensemble D, la condition*

(11.1) $$|F'(x)| \leqslant M \quad \textit{pour tout} \quad x \in D$$

entraîne l'inégalité

(11.2) $$|F(D)| \leqslant M \cdot |D|.$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif quelconque. Désignons par D_n l'ensemble des points $x \in D$ tels que

$$|x' - x| \leqslant n^{-1} \textit{ entraîne } |F(x') - F(x)| \leqslant (M + \varepsilon) \cdot |x' - x| \textit{ pour tout } x'.$$

La suite $\{D_n\}$ est monotone ascendante et la condition (11.1) entraîne $D = \lim\limits_n D_n$, d'où

(11.3) $$\lim_n |F(D_n)| = |F(D)|.$$

A chaque D_n on peut faire correspondre une suite d'intervalles $\{I_k^{(n)}\}$ couvrant D_n, telle que

(11.4) $$\sum_k |I_k^{(n)}| \leqslant |D_n| + \varepsilon$$

et que la longueur d'aucun $I_k^{(n)}$ ne dépasse n^{-1}. Par définition de D_n on a par conséquent pour tout couple x_1, x_2 de points de $D_n \cdot I_k^{(n)}$ l'inégalité $|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant (M+\varepsilon) \cdot |x_2 - x_1| \leqslant (M+\varepsilon) \cdot |I_k^{(n)}|$, de sorte que $|F(D_n \cdot I_k^{(n)})| \leqslant \delta[F(D_n \cdot I_k^{(n)})] \leqslant (M+\varepsilon) \cdot |I_k^{(n)}|$. En vertu de l'inégalité (11.4) il vient donc pour tout n naturel $|F(D_n| \leqslant \sum\limits_k |F(D_n \cdot I_k^{(n)})| \leqslant (M+\varepsilon) \cdot \sum\limits_k |I_k^{(n)}| \leqslant (M+\varepsilon) \cdot (|D_n| + \varepsilon)$, ce qui donne par le passage à la limite selon (11.3) l'inégalité $|F(D)| \leqslant (M+\varepsilon) \cdot (|D| + \varepsilon)$. Le nombre ε étant supposé arbitraire, on en tire l'égalité (11.2), q. f. d.

Théorème 7. *Si une fonction finie $F(x)$ est partout dérivable dans un ensemble mesurable D, on a*

(11.5) $$|F(D)| \leqslant \int_D |F'(x)|\, dx.$$

Démonstration. On peut évidemment admettre que l'ensemble D soit borné. Etant donné un $\varepsilon > 0$ quelconque, soit pour tout n naturel $D_n = \mathop{\mathrm{E}}\limits_x [(n-1) \cdot \varepsilon \leqslant |F'(x)| < n \cdot \varepsilon;\ x \in D]$. On a alors

$$|F(D)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |F(D_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \varepsilon \cdot |D_n| \leqslant \int_D |F'(x)|\, dx + \varepsilon \cdot |D| \text{ en vertu}$$

du lemme précédent, d'où, ε étant arbitraire, l'inégalité (11.5).

La formule (11.5) reste vraie, quand on y remplace la dérivée $F'(x)$ par un dérivé quelconque de Dini, supposé toutefois fini dans D. La démonstration se complique alors un peu et elle fait appel à certains théorèmes généraux sur les nombres dérivés, qui seront établis plus loin (voir Chap. IX, § 3, 4 et 5).

Théorème 8. *Pour qu'une fonction $F(x)$ continue et (VB) sur un ensemble fermé E soit une fonction (AC) sur E, il faut et il suffit qu'elle remplisse la condition (N) sur cet ensemble.*

Démonstration. En vertu du th. 5, p. 154, il reste à montrer que la condition est suffisante.

Admettons donc que $F(x)$ remplisse la condition (N) sur E. Soient a et b les bornes de E, $I_0 = [a, b]$ et $G(x)$ la fonction identique à $F(x)$ aux points $x \in E$ et linéaire dans les intervalles contigus à E. En vertu des hypothèses admises sur $F(x)$, la fonction $G(x)$ est évidemment continue, à variation bornée et remplissant la condition (N) sur l'intervalle I_0 tout entier.

Etant donné un sous-intervalle arbitraire $I = [\alpha, \beta]$ de I_0, désignons par D l'ensemble des points de I où la fonction $G(x)$ est dérivable et posons $H = I - D$. Evidemment $|H| = 0$ et par conséquent $|G(H)| = 0$, puisque $G(x)$ satisfait à la condition (N).

D'autre part, l'intervalle aux extrémités $G(\alpha)$ et $G(\beta)$ étant contenu dans $G(I)$, on a en vertu du th. 7:

$$|G(\beta) - G(\alpha)| \leqslant |G(D)| + |G(H)| = |G(D)| \leqslant \int_\alpha^\beta |G'(x)|\, dx.$$

Cette inégalité étant valable pour tout sous-intervalle $I = [\alpha, \beta]$ de I_0 et la dérivée $G'(x)$ étant en vertu du th. 7, Chap. IV, § 2, sommable sur I_0, la fonction $G(x)$ est (AC) sur I_0 et par conséquent $F(x)$ est une fonction (AC) sur l'ensemble E, où elle coïncide avec $G(x)$.

On aperçoit sans peine que le même raisonnement conduit à un théorème plus général: *pour qu'une fonction $F(x)$ continue sur un ensemble fermé E soit absolument continue sur E, il faut et il suffit qu'elle y remplisse la condition*

(N) et y admette presque partout une dérivée déterminée sommable sur E. Ce théorème sera à son tour généralisé au Chap. IX, § 8.

Théorème 9. *Pour qu'une fonction $F(x)$, continue et (VBG) sur un ensemble fermé E soit une fonction (ACG) sur E, il faut et il suffit qu'elle remplisse la condition (N) sur cet ensemble.*

Démonstration. Vu le th. 5, p. 154, il ne s'agit que d'établir la suffisance de la condition (N). Or, $F(x)$ étant une fonction (VBG) sur E, il existe (cf. la définition, p. 150) une décomposition $E = \sum\limits_n E_n$ telle que $F(x)$ est une fonction (VB) sur chaque E_n. Par suite de la continuité de $F(x)$ sur l'ensemble fermé E, on peut admettre que chaque E_n soit un ensemble fermé (cf. l'énoncé (5. 4), p. 149). Comme $F(x)$ remplit en outre la condition (N) sur E, on en conclut en vertu du th. 8 que $F(x)$ est une fonction (AC) sur chaque E_n, donc une fonction (ACG) sur E, c. q. f. d.

Fonctions à variation bornée au sens restreint.

§ **12.** Passons à présent aux généralisations des fonctions (VB) et (AC) qui par opposition aux généralisations précédentes, liées, comme nous avons vu, à une généralisation parallèle de la notion de dérivée, n'exigent aucune modification de cette notion. Nous allons conserver le même ordre des définitions que jusqu'à présent.

Nous désignerons par $V^*(F; E)$ et appellerons *variation forte sur E* d'une fonction finie $F(x)$ définie dans un intervalle $I \supset E$ la borne supérieure des sommes $\sum\limits_k \omega(F; I_k)$ [1]) où $\{I_k\}$ est une suite finie quelconque d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à E. Si $V^*(F; E) < +\infty$, la fonction $F(x)$ sera dite *à variation bornée au sens restreint sur l'ensemble E* ou bien *fonction (VB*) sur E.*

Dans le cas particulier où l'ensemble E est un intervalle fermé, on a évidemment $V^*(F; E) = V(F; E) = W(F; E)$. Il est facile de voir aussi que l'on a toujours $V(F; E) \leqslant V^*(F; E)$, d'où:

(12. 1) *Toute fonction (VB*) sur un ensemble E est une fonction (VB) sur E.*

[1]) $\omega(F; I_k)$ désigne l'*oscillation* de la fonction $F(x)$ sur I_k (cf. Chap. I, § 14, p. 18).

Remarque. Par opposition à la variation faible, la valeur de la variation forte d'une fonction sur un ensemble E dépend par définition non seulement des valeurs qu'elle prend dans E, mais aussi de celles qu'elle prend dans l'intervalle entier compris entre les bornes de E. C'est pourquoi, comme il a été d'ailleurs convenu au § 1, p. 144, les fonctions (VB^*) seront toujours supposées définies dans un tel intervalle.

Etant données deux fonctions $F(x)$ est $G(x)$, bornées dans un intervalle I, et M désignant la borne supérieure des valeurs absolues de ces deux fonctions dans I, on a pour tout couple des nombres α, β les inégalités $\omega(\alpha \cdot F + \beta \cdot G; I) \leqslant |\alpha| \cdot \omega(F; I) + |\beta| \cdot \omega(G; I)$ et $\omega(F \cdot G; I) \leqslant M \cdot [\omega(F; I) + \omega(G; I)]$.

Ces évaluations montrent que

(12. 2) *Toute combinaison linéaire à coefficients constants de deux fonctions (VB*) sur un ensemble E, de même que le produit de ces fonctions, sont également des fonctions (VB*) sur E.*

Enfin, nous allons établir le théorème suivant:

(12. 3) *Si une fonction finie $F(x)$ est (VB*) sur un ensemble E, elle l'est également sur la fermeture $\bar{E}$ de cet ensemble.*

En effet, soient a et b les bornes de E, donc aussi de $\bar{E}$, $I = [a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une suite finie quelconque de points de $\bar{E}$ et $I_k = [a_k, a_{k+1}]$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$. On aperçoit aussitôt que $E \cdot I_k = 0$ entraîne $E \cdot I_{k-1} \neq 0$ et $E \cdot I_{k+1} \neq 0$. Par conséquent, en désignant par $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_r = n-1$ les indices des I_k pour lesquels $E \cdot I_k \neq 0$, par $j_0 < j_1 < \ldots < j_s$ ceux des autres I_k et enfin par J_m un intervalle quelconque aux extrémités situées respectivement dans $E \cdot I_{i_m}$ et dans $E \cdot I_{i_{m+1}}$, on a les évaluations suivantes:

$$\sum_{m=1}^{r-1} \omega(F; I_{i_m}) \leqslant \sum_{m=0}^{r-1} \omega(F; J_m), \quad \sum_{m=0}^{s} \omega(F; I_{j_m}) \leqslant \sum_{m=0}^{r-1} \omega(F; J_m),$$

$$\omega(F; I_{i_0}) = \omega(F; I_0) \leqslant \omega(F; I) \quad et \quad \omega(F; I_{i_r}) = \omega(F; I_{n-1}) \leqslant \omega(F; I),$$

d'où $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \omega(F; I_k) \leqslant 2 \sum\limits_{m=0}^{r-1} \omega(F; J_m) + 2\,\omega(F; I) \leqslant 2\,[V^*(F; E) + \omega(F; I)]$,

et finalement $V^*(F; \bar{E}) \leqslant 2\,[V^*(F; E) + \omega(F; I)] < +\infty$, c. q. f. d.

§ **13.** Comme une généralisation du th. de Lebesgue, analogue aux th. 3, p. 150, on a le théorème suivant pour les fonctions (VB^*).

Théorème 10. *Toute fonction $F(x)$ qui est (VB^*) sur un ensemble fermé E est presque partout dérivable dans E et, $G(x)$ désignant la fonction identique à $F(x)$ dans E et linéaire dans les intervalles I_n contigus à E, on a presque partout dans E l'égalité $F'(x) = G'(x)$.*

Démonstration. Soient a et b les bornes de E et $I = [a, b]$. Posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$M(x) = M(F; I_n) \quad et \quad m(x) = m(F; I_n), \quad lorsque \quad x \in I_n^{\circ}\,{}^{1)}$$

et

$$M(x) = m(x) = F(x), \quad lorsque \quad x \in E.$$

$F(x)$ étant par hypothèse une fonction (VB^*) sur l'ensemble E, les fonctions $M(x)$ et $m(x)$ sont à variation bornée sur l'intervalle I tout entier, donc presque partout dérivables dans I, et on a par suite de leur coïncidence dans E

(13.1) $\quad m'(x) = M'(x)$ *presque partout dans* E.

D'autre part, on a $m(x) \leqslant F(x) \leqslant M(x)$ et $m(x) \leqslant G(x) \leqslant M(x)$ pour tout $x \in I$ et, en particulier, $m(x) = F(x) = G(x) = M(x)$ pour tout $x \in E$. Dans tout point $x \in E$ où les deux fonctions $m(x)$ et $M(x)$ sont dérivables on a donc $m'(x) \leqslant \overline{F}^+(x) \leqslant M'(x)$ et $m'(x) \leqslant \overline{G}^+(x) \leqslant M'(x)$, et par conséquent, en vertu de (13.1), $m'(x) = \overline{F}^+(x) = \overline{G}^+(x) = M'(x)$ presque partout dans E.

On montre d'une façon analogue qu'il en est de même pour les trois autres dérivés de Dini des fonctions $F(x)$ et $G(x)$, d'où $m'(x) = F'(x) = G'(x) = M'(x)$ presque partout dans E, c. q. f. d.

Fonctions à variation bornée généralisée au sens restreint.

§ 14. Une fonction finie $F(x)$ sera dite *à variation bornée généralisée au sens restreint sur un ensemble* $E \subset I$ ou, en abrégé, une *fonction* (VBG^*) *sur* E, lorsque E est somme d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles tels que $F(x)$ est une fonction (VB^*) sur chacun d'eux.

Il en résulte que *toute fonction à variation bornée sur un intervalle I est une fonction (VBG^*) sur I.* De plus, on déduit de (12.1), (12.2) et (12.3) respectivement (voir p. 158 et 159) que

[1]) I° désigne l'*intérieur* de l'intervalle I (cf. Chap. I, § 3, p. 4).

(14.1) *Toute fonction (VBG^*) sur un ensemble E est en même temps une fonction (VBG) sur cet ensemble.*

(14.2) *Toute combinaison linéaire à coefficients constants de deux fonctions (VBG^*), ainsi que le produit de telles fonctions, sont autant des fonctions (VBG^*).*

(14.3) *Si une fonction finie $F(x)$ est (VBG^*) sur un ensemble E, cet ensemble est contenu dans une somme d'ensembles fermés $\{E_n\}$ sur lesquels $F(x)$ est une fonction (VB^*).*

Enfin, en vertu du th. 10 et de (14.3) on a pour les fonctions (VBG^*) la généralisation suivante du th. de Lebesgue (Chap. III, § 3, th. 2), analogue au théorème de Denjoy-Khintchine (th. 4, p. 150):

Théorème 11 (de Denjoy-Lusin). *Toute fonction (VBG^*) sur un ensemble E est presque partout dérivable dans E.*

Fonctions absolument continues au sens restreint.

§ 15. Une fonction $F(x)$ s'appellera *absolument continue au sens restreint sur un ensemble E* ou *fonction (AC^*) sur E*, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles $\{I_i\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les extrémités appartiennent à E

$$\sum_i |I_i| < \eta \quad \textit{entraîne} \quad \sum_i \omega(F; I_i) < \varepsilon.$$

Dans le cas particulier où E est une figure, cette définition coïncide avec celle des fonctions absolument continues au sens ordinaire. Elle en est donc une généralisation, pourtant moins avancée que la notion des fonctions (AC). Ainsi les énoncés (8.1)—(8.4), p. 151, restent vrais quand on y remplace (AC) par (AC^*). D'autre part, on y appliquera la remarque, p. 159.

Fonctions absolument continues généralisées au sens restreint.

§ 16. Une fonction $F(x)$ définie dans un intervalle I sera dite *absolument continue généralisée au sens restreint sur un ensemble $E \subset I$* ou *fonction (ACG^*) sur E*, lorsqu'elle est continue sur E et lorsqu'il existe une décomposition $E = \sum_n E_n$ telle que $F(x)$ soit une fonction (AC^*) sur E_n pour $n = 1, 2, \ldots$

(16.1) *Toute fonction* (ACG^*) *sur un ensemble* E *est en même temps une fonction* (VBG^*) *et* (ACG) *sur* E.

Par conséquent (en vertu du th. 11, p. 161) toute fonction (ACG^*) sur un ensemble E est dérivable presque partout dans E et, lorsque E est un intervalle, elle est (en vertu du corollaire, p. 155) déterminée à une constante additive près par les valeurs de sa dérivée données presque partout dans E. Plus généralement, en vertu du th. 6, p. 155, le th. 3, Chap. III, § 4, s'étend directement sur les fonctions (ACG^*):

(16.2) *Pour qu'une fonction* (ACG^*) *dans un intervalle* I *soit monotone non décroissante dans* I, *il faut et il suffit que sa dérivée y soit presque partout non négative.*

La réciproque de (16.1) est vraie pour des ensembles E *fermés*. Au lieu d'en donner ici une démonstration spéciale, nous allons établir quelques théorèmes plus généraux sur les relations qui se présentent entre les notions de fonctions (VB), (VBG), (AC), (ACG), (VB^*), (VBG^*), (AC^*) et (ACG^*), introduites dans ce chapitre.

Lemme. *Soient* $F(x)$ *une fonction quelconque finie dans un intervalle* $I_0=[a,b]$, E *un ensemble fermé à bornes* a *et* b, $\{I_k\}$ *la suite des sous-intervalles de* I_0 *contigus à* E, *enfin* $M=M(F;E)$ *et* $m=m(F;E)$. *On a alors*

$$\omega(F;I_0)\leqslant M-m+2\sum_{k=1}^{\infty}\omega(F;I_k). \tag{16.3}$$

Démonstration. Posons $M_0=M(F;I_0)$ et $m_0=m(F;I_0)$, et considérons pour un $\varepsilon>0$ quelconque un point x_0 de I_0 tel que $M_0\leqslant F(x_0)+\varepsilon$. Cette inégalité entraîne aussitôt, si $x_0\in E$, l'inégalité $M_0\leqslant M+\varepsilon$, et lorsque $x_0\in I_{k_0}$, elle entraîne l'inégalité $M_0\leqslant M+\omega(F;I_{k_0})+\varepsilon\leqslant M+\sum_{k=1}^{\infty}\omega(F;I_k)+\varepsilon$. On a donc dans les deux cas la formule

$$M_0\leqslant M+\sum_{k=1}^{\infty}\omega(F;I_k)+\varepsilon$$

et, d'une façon analogue,

$$m_0\geqslant m-\sum_{k=1}^{\infty}\omega(F;I_k)-\varepsilon.$$

On en tire par soustraction membre à membre, en tenant compte que $\varepsilon>0$ est arbitraire, la formule (16.3), q. f. d.

Remarque. Le coefficient 2 dans la formule (16.3) peut être facilement supprimé par une discussion supplémentaire concernant un détail de la démonstration.

Théorème 12. *Pour qu'une fonction* $F(x)$ *qui est* $\begin{cases}(VB)\\(AC)\end{cases}$ *sur un ensemble fermé* E *soit* $\begin{cases}(VB^*)\\(AC^*)\end{cases}$ *sur* E, *il faut et il suffit que la série de ses oscillations sur les intervalles contigus à* E *soit convergente.*

Démonstration. La nécessité de la condition étant évidente, il ne s'agit d'en démontrer que la suffisance.

Soient donc $\{I_k\}$ la suite des intervalles contigus à E, $\{J_n\}$ une suite finie *arbitraire* d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à E, enfin $m_n=m(F;E\cdot J_n)$ et $M_n=M(F;E\cdot J_n)$. Nous admettons par hypothèse que

$$\sum_k\omega(F;I_k)<+\infty. \tag{16.4}$$

Ceci dit, considérons séparément les deux cas à démontrer:

1° $F(x)$ *est une fonction* (VB) *sur* E, c. à d. que

$$V(F;E)<+\infty. \tag{16.5}$$

En vertu du lemme on a $\sum_n\omega(F;J_n)\leqslant\sum_n(M_n-m_n)+2\sum_k\omega(F;I_k)$, d'où $\sum_n\omega(F;J_n)\leqslant V(F;E)+2\sum_k\omega(F;I_k)$, ce qui implique en vertu de (16.4) et (16.5) que $V^*(F;E)\leqslant V(F;E)+2\sum_k\omega(F;I_k)<+\infty$. Ainsi, $F(x)$ est une fonction (VB^*) sur E.

2° $F(x)$ *est une fonction* (AC) *sur* E. Il existe donc pour tout $\varepsilon>0$ un $\eta>0$ tel que

$$\sum_n|J_n|<\eta \quad \textit{entraîne} \quad \sum_n(M_n-m_n)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.6}$$

En vertu de (16.4) on a pour un indice k_0

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\omega(F;I_k)<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{16.7}$$

Désignons par η_0 le plus petit des k_0+1 nombres $\eta, |I_1|, |I_2|, \ldots, |I_{k_0}|$ et par $\{J_n^*\}$ une suite arbitraire d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre, ayant leurs extrémités dans E et dont la somme des longueurs soit inférieure à η_0. Aucun des intervalles J_n^* ne contient donc aucun des k_0 premiers intervalles de la suite $\{I_k\}$, de sorte qu'on obient de (16.6) et (16.7) par le même raisonnement que dans 1° l'inégalité $\sum_n \omega(F; J_n^*) < \varepsilon$. Ainsi, $F(x)$ est une fonction (AC^*) sur E, c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement le

Théorème 13. *Si $F(x)$ est une fonction à la fois (VB^*) et (AC) sur un ensemble fermé E, elle est également une fonction (AC^*) sur E.*

L'hypothèse que E soit *fermé* est essentielle dans le th. 13. En effet, E désignant l'intervalle $[-1, 1]$ sans le point 0, sa fonction caractéristique $c_E(x)$ est une fonction (VB^*) et (AC) sur E, sans être (AC^*) sur cet ensemble.

Théorème 14. *Si $F(x)$ est à la fois (VBG^*) et (ACG) sur un ensemble fermé E, elle est aussi une fonction (ACG^*) sur E.*

Démonstration. D'une part, on a $E = \sum_i E_i$ et $F(x)$ est une fonction (VB^*) sur chaque E_i. D'autre part, $E = \sum_j H_j$ et $F(x)$ est une fonction (AC) sur chaque H_j. On a donc $E = \sum_{i,j} E_i \cdot H_j$. Par suite de la continuité de la fonction $F(x)$, en tant qu'une fonction (ACG), sur l'ensemble fermé E, les ensembles E_i et H_j, donc aussi le ensembles $E_i \cdot H_j$, peuvent être supposés fermés. En vertu du th. 13, $F(x)$ est par conséquent une fonction (AC^*) sur chacun d'eux, donc une fonction (ACG^*) sur leur somme E, c. q. f. d.

Il en résulte aussitôt le théorème suivant, analogue au th. 9, p. 158.

Théorème 15. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ qui est (VBG^*) sur un ensemble fermé E soit une fonction (ACG^*) sur E, il faut et il suffit qu'elle remplisse sur E la condition (N).*

Définitions de Denjoy-Lusin.

§ 17. Nos définitions des fonctions (VBG), (ACG), (VBG^*) et (ACG^*) sont basées sur les idées de M. A. Khintchine [3]. Les définitions de M. N. Lusin [I] et de M. A. Denjoy [6] sont un peu différentes, mais *pour les fonctions continues* elles sont équivalentes à celles de M. Khintchine. Nous les donnons ici sous la forme des conditions nécessaires et suffisantes dans le théorème qui va suivre.

Théorème 16. *Pour qu'une fonction $F(x)$ continue dans un intervalle I soit* $\left\{\begin{matrix}(VBG)\\(VBG^*)\\(ACG)\\(ACG^*)\end{matrix}\right.$ *dans I, il faut et il suffit que tout ensemble fermé $E \subset I$ contienne une portion P telle que $F(x)$ soit une fonction* $\left\{\begin{matrix}(VB)\\(VB^*)\\(AC)\\(AC^*)\end{matrix}\right.$ *sur P.*

Démonstration. Nous allons nous borner au cas des fonctions (VBG), le raisonnement pour les trois autres cas étant tout à fait analogue.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, $F(x)$ une fonction (VBG) sur I. On peut donc représenter l'intervalle I comme somme d'une suite d'ensembles $\{E_n\}$ tels que $F(x)$ soit une fonction (VB) sur chacun d'eux et, par suite de la continuité de $F(x)$, on peut les supposer fermés. Par conséquent tout ensemble fermé $E \subset I$ admet en vertu du th. de Baire, p. 144, une portion P contenue entièrement dans un des ensembles E_n. Comme une fonction (VB) sur E_n, $F(x)$ est donc à plus forte raison une fonction (VB) sur P.

La condition est suffisante. Soit $\{J_n\}$ la suite des sous-intervalles de I à extrémités rationnelles sur lesquels $F(x)$ est une fonction (VBG). Chaque intervalle J_n peut être représenté dans la forme $J_n = \sum_i E_n^i$ de manière que $F(x)$ soit une fonction (VB) sur tout E_n^i. Posons $H = I - \sum_n J_n^\circ$. Il vient

$$(17.1) \qquad I = H + \sum_n J_n^\circ = H + \sum_n \sum_i E_n^i.$$

Admettons maintenant que tout ensemble fermé situé dans I contienne une portion sur laquelle $F(x)$ est une fonction (VB). Pour conclure que $F(x)$ est une fonction (VBG) sur l'intervalle I tout entier, il ne s'agit donc, en vertu de (17.1), que de prouver qu'elle est (VB) sur l'ensemble fermé H. A ce but nous allons montrer davantage, à savoir que H se réduit aux extrémités de I.

En supposant notamment que H contienne un point, donc une portion, dans l'intérieur de l'intervalle I, cette dernière contiendrait par hypothèse à son tour une portion P sur laquelle $F(x)$ serait une fonction (VB). Il existerait donc un intervalle J à extrémités rationnelles, contenant *dans son intérieur* des points de P et tel que $P \cdot J = H \cdot J$. Par suite, $F(x)$ serait une fonction (VB) sur $H \cdot J$ et comme on a selon (17.1) $J \subset H \cdot J + \sum\limits_n \sum\limits_i E_n^i$, elle serait une fonction (VBG) sur l'intervalle J. On aurait en conséquence pour un n naturel $J = J_n$, donc $H \cdot J_n^{\circ} = P \cdot J_n^{\circ} \neq 0$, contrairement à la définition de H, c. q. f. d.

Le raisonnement utilisé dans la première partie de la démonstration, bien que très simple, mérite une attention spéciale, parce qu'on y voit les méthodes de Lebesgue se combiner à celles de Baire. La mise de ces deux méthodes en connexion étroite constitue un trait caractéristique des recherches de Denjoy et une des idées les plus heureuses et fécondes. Des raisonnements analogues seront employés à plusieurs reprises dans la suite.

Le th. 16, qui vient d'être établi, montre en particulier que toute fonction continue qui est une fonction (VBG) dans un intervalle I est en même temps une fonction (VB) dans un sous-intervalle de I. Il en résulte que pour toute fonction (VBG) continue dans un intervalle il existe des sous-intervalles où elle est presque partout dérivable et qui forment une famille *dense*, bien que cette fonction puisse (comme il a été montré au § 9, p. 153) n'admettre de dérivée dans aucun point d'un ensemble de mesure positive.