CHAPITRE VII.

Intégrale de Perron.

Préliminaires. Intégrale de Newton.

§ 1. La Théorie de l'intégrale s'est développée, comme on sait, dans deux directions différentes, dont l'une correspond à la notion d'*intégrale définie* et l'autre à celle de *fonction primitive*.

C'est Leibniz qui est regardé d'habitude comme précurseur de la notion d'intégrale définie, entendue comme limite de certaines sommes approchées. Par contre, Newton est considéré plutôt comme représentant de l'autre tendance, à savoir de celle de *fonction primitive*, c. à d. où l'intégration est conçue comme une opération inverse de la dérivation.

Cette distinction entre les idées de Leibniz et de Newton est évidemment plutôt conventionnelle que rigoureuse. Les deux grands fondateurs du calcul infinitésimal ont été, en effet, conscients de la relation mutuelle entre les deux conceptions de l'intégrale, bien que leur manière de la justifier ne saurait plus nous satisfaire aujourd'hui.

L'évolution de la Théorie de l'intégrale a suivi au début la voie newtonienne. C'est facile à comprendre, si l'on songe combien une intégrale entendue comme opération inverse de la dérivation a dû paraître plus simple vis à vis de la notion d'intégrale définie, telle que la définissait Leibniz; de plus, elle convenait mieux aux besoins des calculs formels qui se sont développés à la suite de la découverte du nouvel algorythme. Ainsi p. ex. Euler nommait le calcul intégral *„methodus ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum"*.

Ce n'est que Cauchy [I, t. 4, p. 122] qui revient à l'idée de Leibniz pour l'incorporer à l'Analyse moderne. Il n'opère plus à l'aide des vagues notions d'infiniment petits, mais base sa

définition de l'intégrale sur la théorie générale des limites: il montre qu'il existe pour toute fonction $f(x)$ continue dans un intervalle $[a, b]$ une limite des sommes de la forme

$$(1.1) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) \quad \text{où} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

lorsque la longueur du plus grand des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ tend vers 0. D'après Cauchy c'est cette limite qui est par definition *l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ dans $[a, b]$*.

Bien que restreinte par Cauchy aux fonctions continues, la portée véritable de cette définition est beaucoup plus étendue; en effet, dès le début on appliquait au besoin son algorythme à l'intégration de certaines fonctions non continues. Mais c'est à Riemann que revient le mérite d'avoir distingué *explicitement* la classe générale de fonctions *bornées* pour lesquelles la limite des sommes (1.1) existe. Nous appelons aujourd'hui ces fonctions *fonctions intégrables* au sens de Riemann et la limite en question *l'intégrale riemannienne* de ces fonctions (cf. plus haut Chap. V, § 7).

En fait (cf. B. Riemann [1]), c'étaient des sommes plus générales que celles (1.1) de Cauchy que considérait Riemann, à savoir les sommes de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$ où ξ_i désigne un point arbitraire de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$; mais il est aisé de montrer que l'existence de leur limite équivaut à l'existence de celle des sommes (1.1). Cf. p. ex. D. C. Gillespie [1].

En dehors de cette définition de l'intégrale, nous devons à Cauchy la première démonstration rigoureuse de la relation fondamentale entre l'intégrale définie et la fonction primitive, à savoir de l'équivalence des deux idées d'intégrale dans le domaine des fonctions *continues*.

Cependant, cette équivalence disparait dès qu'on sort du domaine des fonctions continues pour passer de l'intégrale de Cauchy à celle de Riemann. En effet, il existe d'une part (comme on l'aperçoit aussitôt) des fonctions bornées et intégrables au sens de Riemann, mais n'admettant pas de fonction primitive, et d'autre part (comme l'a montré V. Volterra [1]; cf. aussi H. Lebesgue [I, p. 93]) des fonctions bornées qui admettent une fonction primitive, sans être intégrables au sens de Riemann.

Voyons donc en quoi change la situation, lorsqu'on passe de l'intégrale de Cauchy-Riemann à l'intégrale de Lebesgue. A ce but, remarquons d'abord que la notion newtonienne de la fonction primitive s'étend d'elle-même sur les fonctions de point dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Nous dirons notamment qu'une fonction de point $f(x)$ où $x \in \mathbf{R}_n$ est *intégrable au sens de Newton*, lorsqu'il existe une fonction de figure $F(R)$ où $R \subset \mathbf{R}_n$ additive, continue, partout dérivable dans $\mathbf{R}_n$ (c. à d. admettant partout une dérivée *finie* [1])) et dont la dérivée $F'(x)$ est égale dans tout point x à la valeur de la fonction f dans ce point. La fonction $F(R)$ sera dite alors *fonction primitive* de $f(x)$. Nous l'appellerons aussi *intégrale indéfinie de* Newton [2]) de la fonction $f(x)$.

L'unicité de la fonction primitive de Newton résulte dans le cas de $\mathbf{R}_1$ des théorèmes élémentaires du calcul différientiel, et dans le cas général elle est une conséquence du th. 1, p. 127, qui va suivre; l'unicité de l'intégrale de Newton n'est d'ailleurs que le cas particulier de celle de Perron.

Il est à remarquer à ce sujet que pour l'unicité de la fonction primitive l'hypothèse que sa dérivée soit *finie* est essentielle, de sorte que la suppression totale n'en est possible dans aucune des généralisations connues de la notion de fonction primitive. On sait, en effet, que même la fonction continue d'une variable réelle peut ne pas se trouver déterminée (à une constante additive près) par sa dérivée, lorsque cette dernière, tout en existant partout, admet des valeurs *infinies*. Il y a notamment *des fonctions continues $F(x)$ et $G(x)$ dont les dérivées (finies ou infinies) existent et sont partout égales dans l'intervalle* $[0,1]$ *sans que la différence $F(x) - G(x)$ soit une constante* (cf. H. Hahn [1] et S. Ruziewicz [1]).

Pour construire un tel couple de fonctions nous allons nous appuyer sur le théorème suivant:

Un ensemble fermé P de mesure nulle [3]) *étant arbitrairement donné dans l'intervalle $I = [0,1]$, il existe une fonction croissante $F(x)$ telle que l'on ait*

$$(1.2) \qquad F'(x) = +\infty \quad pour \quad x \in P \quad et \quad F'(x) < +\infty \quad pour \quad x \in I - P.$$

En voici la démonstration. Admettons pour simplifier que P contienne aussi les extrémités de I et désignons par $\{[a_n, b_n]\}$ la suite des intervalles contigus à P. Soient $k_n = b_n - a_n$ et $\{h_n\}$ une suite de nombres positifs tels qu'on ait

$$(1.3) \qquad \lim_n h_n \cdot k_n^{-1} = +\infty$$

et

$$(1.4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} h_n = 1.$$

(il suffit de poser p. ex. $h_n = \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}$ où $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} k_i$). Posons enfin

[1]) Cf. la définition de la dérivabilité, adoptée au Chap. III, § 1, p. 46.

[2]) Plusieurs auteurs (et M. Lebesgue est de leur nombre) appellent cette intégrale *intégrale de* Duhamel.

[3]) Nous verrons dans la suite (Chap. IX, § 3) que cette hypothèse est essentielle, l'ensemble des points où la dérivée devient infinie étant toujours de mesure nulle.

$$(1.5) \qquad f(x) = \begin{cases} h_n \cdot (x - a_n)^{-\frac{1}{2}} \cdot (b_n - x)^{-\frac{1}{2}}, & lorsque \quad a_n < x < b_n, \\ +\infty, & lorsque \quad x \in P. \end{cases}$$

Ainsi définie, la fonction $f(x)$ est dans I non négative et sommable sur I, puisque $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = h_n \int_{a_n}^{b_n} (x - a_n)^{-\frac{1}{2}} (b_n - x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\pi h_n$, d'où en vertu de (1.4) on obtient $\int_0^1 f(x)\,dx = 2\pi$, de sorte qu'on peut poser

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad pour \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

De plus, pour tout point x_0 de I on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. En effet, la fonction $f(x)$ est évidemment continue pour tout $x_0 \in I - P$; d'autre part, en désignant par m_n la borne inférieure de $f(x)$ dans $[a_n, b_n]$, on tire de (1.3) $\lim_n m_n = \lim_n 2 h_n k_n^{-1} = +\infty$, d'où l'égalité $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in P$. Par conséquent, on a pour tout x en vertu du th. 11, Chap. IV, § 3, l'égalité $F'(x) = f(x)$, d'où selon (1.5) les formules (1.2).

Ce th. établi, soient pour fixer les idées, P l'ensemble fermé $\overline{I - \sum_n I_n}$ qui a été considéré au Chap. I, § 15, p. 20, et $\varphi(x)$ la fonction (définie également p. 20) continue, non décroissante et *non constante dans I*, mais constante dans tout intervalle I_n contigu à P. En posant $G(x) = F(x) + \varphi(x)$, on a $G'(x) = F'(x)$ pour tout $x \in I - P$ et cette égalité subsiste pour tout $x \in P$, la dérivée de $F(x)$, et à plus forte raison celle de $G(x)$, devenant infinie en ce point.

Or, l'intégrale de Lebesgue, issue, comme on sait, de l'idée d'intégrale définie [1]) de Leibniz, Cauchy et Riemann, peut être conçue à la fois, conformément à sa définition descriptive, comme une modification particulière de l'intégrale de Newton. C'est une modification double: dans un sens elle constitue une *généralisation* de la notion newtonienne de fonction primitive, puisqu'elle permet de négliger un ensemble de mesure nulle dans l'égalité fondamen-

[1]) D'ailleurs, c'est l'ainsi dite définition *constructive* de l'intégrale de Lebesgue qui relie le mieux cette intégrale à la notion antérieure d'intégrale définie (cf. l'explication très suggestive dans la note de M. H. Lebesgue [7]). Pour le texte original de cette définition voir H. Lebesgue [1; I]; cf. aussi les définitions analogues dans les mémoires: W. H. Young [1], T. H. Hildebrandt [1], F. Riesz [1], A. Denjoy [7; 8], et dans l'Annexe.

tale $F'(x)=f(x)$; cependant, dans l'autre sens elle y introduit une *restriction* essentielle, car elle réduit le domaine des fonctions primitives à celui des fonctions absolument continues. Une telle restriction est, en effet, indispensable: bien que se laissant affaiblir p. ex. pour les intégrales de Denjoy (voir plus loin, Chap. VIII, § 1), elle ne pourrait jamais être supprimée totalement, à moins qu'on renonce au principe d'unicité de l'intégrale: il suffit de considérer l'exemple de la fonction singulière non constante (Chap. I, § 15) et dont la dérivée est presque partout nulle.

Nous voyons donc que des deux intégrales, à savoir celle de Lebesgue et celle de Newton, aucune n'embrasse l'autre. Déjà parmi *les fonctions finies d'une variable réelle* il en existe qui, tout en admettant des fonctions primitives de Newton, ne sont pas sommables.

Ainsi, p. ex. la fonction $F(x)=x^2 \sin \pi x^{-2}$ pour $x \neq 0$, complétée par l'égalité $F(0)=0$, admet partout dans l'intervalle $[0,1]$ une dérivée finie, égale à 0 pour $x=0$ et bornée dans tout intervalle $[\varepsilon, 1]$ où $0<\varepsilon<1$. La fonction $F(x)$ remplit donc dans tout intervalle $[\varepsilon, 1]$ la condition de Lipschitz; elle y est à plus forte raison *absolument continue*.

Or, on voit d'autre part qu'elle n'est même pas à variation bornée dans l'intervalle $[0,1]$ *tout entier*. La fonction $F'(x)$ ne peut donc être sommable dans $[0,1]$, car son intégrale indéfinie de Lebesgue coïnciderait alors, à une constante additive près, avec $F(x)$ dans l'intervalle $[0,1]$, ce qui est impossible.

En résumé, l'intégrale de Lebesgue, tout en rentrant dans l'ordre d'idées aussi bien de Leibniz que de Newton, n'en constitue point une synthèse définitive. Cette tâche n'a été accomplie que grâce aux généralisations dues à M. A. Denjoy et à M. O. Perron (la première étant influencée peut être par la manière dont M. Lebesgue a formulé ce problème et en a souligné l'importance déjà dans la I-e édition de ses *Leçons sur l'intégration* [I, Chap. V et VI]). Nous allons étudier ici d'abord la méthode de Perron, qui est plus élémentaire et dont le caractère de généralité vis à vis de l'intégrale newtonienne est plus manifeste.

Pour simplifier le langage, nous continuerons à nous servir de la terminologie planimétrique dans tout ce qui concerne les espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions.

Le théorème fondamental de la théorie de Perron.

§ 2. Convenons de dire qu'une propriété se présente *à peu près partout* dans un ensemble E, lorsque tous les points de E, sauf tout au plus une infinité *dénombrable*, jouissent de cette propriété.

Théorème 1. *$F(R)$ étant une fonction additive et continue de figure, si l'inégalité $\overline{F}(x) \leqslant 0$ se présente à peu près pour tous les points x d'une figure R_0, on a $F(R_0) \leqslant 0$.*

Par raison de symétrie, *la même relation subsiste entre les inégalités $\underline{F}(x) \geqslant 0$ et $F(R_0) \geqslant 0$.*

Démonstration. Nous allons l'établir au préalable dans l'hypothèse que l'on a à peu près partout dans R_0

$$\overline{F}(x) < 0. \tag{2.1}$$

Soit d'abord R_0 un *carré* et supposons, par contre, que $F(R_0)>0$. Désignons par $\{a_n\}$ la suite des points de R_0 où l'inégalité (2.1) est en défaut et définissons par induction une suite de carrés $\{Q_n\}$ satisfaisant pour tout n aux conditions:

$$R_0 = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots, \tag{2.2}$$

$$F(Q_n) > 0, \tag{2.3}$$

$$a_i \in R_0 - Q_n \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$\delta(Q_n) \leqslant 4^{-n}\, \delta(R_0). \tag{2.5}$$

Divisons à ce but le carré Q_n (supposé défini conformément à ces conditions) en un nombre fini $k_n > 4$ des carrés $Q_n^1, Q_n^2, \ldots, Q_n^{k_n}$ égaux et suffisamment petits pour que l'on ait $F(Q_n^j) < \frac{1}{5} F(Q_n)$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, k_n$. Par suite de la continuité de la fonction F, une telle division existe. Comme $0 < F(Q_n) = \sum_{j=1}^{k_n} F(Q_n^j)$ et comme a_{n+1} ne peut appartenir que tout au plus aux 4 carrés Q_n^j, il en existe au moins un qui ne contient pas a_{n+1} et pour lequel la valeur de la fonction F est positive. C'est lui qui sera désigné par Q_{n+1}.

La suite infinie $\{Q_n\}$ assujettie aux conditions (2.2) — (2.5) étant ainsi définie, soit $x \in \prod_n Q_n$. En vertu de (2.3) et (2.5) on a alors $x = \prod_n Q_n$ et $\overline{F}(x) \geqslant 0$, contrairement à (2.1), puisque le point x ne peut pas, en raison de (2.4), appartenir à la suite $\{a_n\}$. On a donc bien dans ce cas $F(R_0) \leqslant 0$.

Soit maintenant R_0 une *figure* quelconque. Ce cas se réduit évidemment à celui où R_0 est un *rectangle*. Or, étant donné un

$\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut toujours décomposer le rectangle R_0 en un nombre fini de carrés $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(m)}$ n'empiétant pas l'un sur l'autre et en un rectangle R suffisamment petit pour que l'on ait $|F(R)| < \varepsilon$. On a alors d'après le cas précédent $F(R_0) = \sum_{i=1}^{m} F(Q^{(i)}) + F(R) < \varepsilon$, d'où, ε étant arbitraire, $F(R_0) \leqslant 0$.

Ceci établi, passons au cas général où, au lieu de l'inégalité (2.1), on a à peu près partout dans la figure R_0 l'inégalité $\overline{F}(x) \leqslant 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a alors pour la fonction $H(R) = F(R) - \varepsilon \cdot |R|$ à peu près partout dans R_0 l'inégalité $\overline{H}(x) = \overline{F}(x) - \varepsilon < 0$, d'où, en vertu de ce qui vient d'être établi dans l'hypothèse (2.1), $\overline{H}(R_0) \leqslant 0$, c. à d. $F(R_0) - \varepsilon \cdot |R_0| \leqslant 0$ et par conséquent, ε étant arbitraire, $F(R_0) \leqslant 0$, c. q. f. d.

Fonctions majorantes et minorantes.

§ 3. Etant donnée une fonction de point $f(x)$ définie dans une figure R_0, appelons respectivement *fonction majorante* et *fonction minorante* de $f(x)$ dans R_0 les fonctions additives et continues quelconques $\Phi(R)$ et $\Psi(R)$ définies dans R_0 et satisfaisant pour tout $x \in R_0$ respectivement à la première et à la seconde des conditions

$$(3.1) \quad -\infty \neq \underline{\Phi}(x) \geqslant f(x) \quad \textit{et} \quad +\infty \neq \overline{\Psi}(x) \leqslant f(x).$$

Théorème 2. *$\Phi(R)$ et $\Psi(R)$ étant respectivement une majorante et une minorante quelconques d'une fonction $f(x)$ dans une figure R_0, on a $\Phi(R) \geqslant \Psi(R)$ pour toute figure $R \subset R_0$.*

Démonstration. La soustraction $\underline{\Phi}(R) - \overline{\Psi}(R)$ étant en vertu de (3.1) toujours possible à effectuer, on peut écrire, en posant $F(R) = \Phi(R) - \Psi(R)$, l'inégalité $\underline{F}(x) \geqslant \underline{\Phi}(x) - \overline{\Psi}(x)$ pour tout $x \in R_0$, d'où selon (3.1) $\underline{F}(x) \geqslant 0$. Par suite du th. 1 on a donc pour toute figure $R \subset R_0$ l'inégalité $F(R) \geqslant 0$, c. à d. $\Phi(R) \geqslant \Psi(R)$, c. q. f. d.

Intégrale définie de Perron.

§ 4. Dans le cas où une fonction $f(x)$ admet dans une figure R_0 des fonctions majorantes et minorantes et que la borne inférieure des valeurs de *toutes* les fonctions majorantes, prises

pour R_0, est *égale* à la borne supérieure des valeurs de *toutes* les fonctions minorantes, prises pour cette figure, la fonction $f(x)$ est dite *intégrable* sur R_0 au sens de Perron ou intégrable $(\mathcal{P})$ et la valeur commune $P = P(f; R_0)$ des deux bornes en question s'appelle son *intégrale définie* de Perron ou intégrale $(\mathcal{P})$ sur R_0; nous la désignerons par

$$(\mathcal{P}) \int_{R_0} f(x)\, dx.$$

En vertu du th. 2, cette définition implique aussitôt les deux théorèmes suivants.

Théorème 3. *Pour qu'un nombre P_0 soit l'intégrale définie $(\mathcal{P})$ de $f(x)$ sur R_0, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, la fonction $f(x)$ admette une telle majorante $\Phi(R)$ et une telle minorante $\Psi(R)$ que l'on ait simultanément $\Phi(R_0) - \Psi(R_0) < \varepsilon$ et $\Phi(R_0) \geqslant P_0 \geqslant \Psi(R_0)$.*

Théorème 4. *Toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0 l'est également sur toute figure $R \subset R_0$ et pour toute majorante $\Phi(R)$ et minorante $\Psi(R)$ de la fonction $f(x)$ dans R_0 on a $\Phi(R) \geqslant (\mathcal{P}) \int_R f(x)\, dx \geqslant \Psi(R)$.*

Théorème 5. *Toute fonction $f(x)$ qui est intégrable $(\mathcal{P})$ sur chacune des deux figures disjointes R_1 et R_2 l'est également sur la somme de ces figures et on a*

$$(4.1) \qquad (\mathcal{P}) \int_{R_1+R_2} f(x)\, dx = (\mathcal{P}) \int_{R_1} f(x)\, dx + (\mathcal{P}) \int_{R_2} f(x)\, dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement donné d'avance. Pour $i = 1, 2$ il existe en vertu du th. 4 une fonction majorante $\Phi_i(R)$ et une fonction minorante $\Psi_i(R)$ de $f(x)$ dans R_i telles que

$$(4.2) \qquad \Phi_i(R) \geqslant (\mathcal{P}) \int_R f(x)\, dx \geqslant \Psi_i(R) \qquad \textit{pour tout } R \subset R_i$$

et

$$(4.3) \qquad \Phi_i(R_i) - \Psi_i(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, les fonctions $\Phi(R) = \Phi_1(R \circ R_1) + \Phi_2(R \circ R_2)$ et $\Psi(R) = \Psi_1(R \circ R_1) + \Psi_2(R \circ R_2)$, définies pour tout $R \subset R_1 + R_2$, sont respectivement une majorante et une minorante de $f(x)$ dans

R_1+R_2 et on obtient en vertu de (4.2) et (4.3) les inégalites $\Phi(R_1+R_2) \geqslant (\mathcal{P})\int\limits_{R_1} f(x)\,dx + (\mathcal{P})\int\limits_{R_2} f(x)\,dx \geqslant \Psi(R_1+R_2)$ et $\Phi(R_1+R_2)-\Psi(R_1+R_2)<\varepsilon$, qui impliquent d'après le th. 3 l'intégrabilité $(\mathcal{P})$ de la fonction $f(x)$ sur R_1+R_2 et entraînent en même temps l'égalité (4.1), q. f. d.

Théorème 6. *Toute combinaison linéaire à coefficients constants $v_1\cdot f_1(x)+v_2\cdot f_2(x)$ de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ intégrables $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0 est aussi intégrable $(\mathcal{P})$ sur R_0 et on a*

$$(\mathcal{P})\int\limits_{R_0}(v_1\cdot f_1+v_2\cdot f_2)\,dx = v_1\cdot(\mathcal{P})\int\limits_{R_0} f_1\,dx + v_2\cdot(\mathcal{P})\int\limits_{R_0} f_2\,dx.$$

Démonstration. $\Phi(R)$ et $\Psi(R)$ étant respectivement une majorante et une minorante d'une fonction $f(x)$, les fonctions $-\Phi(x)$ et $-\Psi(x)$ sont respectivement une minorante et une majorante de $-f(x)$. Il en résulte facilement en vertu du th. 3 que *si $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0, la fonction $-f(x)$ y est aussi intégrable $(\mathcal{P})$ et on a $(\mathcal{P})\int\limits_{R_0} f\,dx = -(\mathcal{P})\int\limits_{R_0}(-f)\,dx$.*

De même, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant deux fonctions quelconques, v_1 et v_2 des constantes *non négatives*, $\Phi_i(R)$ et $\Psi_i(R)$ où $i=1,2$ respectivement une majorante et une minorante de la fonction $f_i(x)$, les fonctions $v_1\,\Phi_1(R)+v_2\,\Phi_2(R)$ et $v_1\,\Psi_1(R)+v_2\,\Psi_2(R)$ sont respectivement une majorante et une minorante de la fonction $v_1 f_1(x)+v_2 f_2(x)$. On en conclut sans peine, en appliquant le critère du th. 3 que *si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0, il en est de même de la fonction $v_1 f_1(x)+v_2 f_2(x)$ et on a $(\mathcal{P})\int\limits_{R_0}(v_1 f_1+v_2 f_2)\,dx = v_1\cdot(\mathcal{P})\int\limits_{R_0} f_1\,dx + v_2\cdot(\mathcal{P})\int\limits_{R_0} f_2\,dx$.*

La démonstration s'achève par superposition des deux propriétés qui viennent d'être établies.

§ 5. Théorème 7. *Chaque fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0 l'est également sur toute figure $R\subset R_0$; son intégrale $P(R)=(\mathcal{P})\int\limits_R f(x)\,dx$ est alors une fonction de figure $R\subset R_0$ continue, additive et presque partout dérivable dans R_0 et on y a presque partout $P'(x)=f(x)$.*

Démonstration. $\Phi(R)$ et $\Psi(R)$ étant respectivement une majorante et une minorante quelconques de $f(x)$ dans R_0, on a en

vertu du th. 4, p. 129, $\Phi(R)\geqslant P(R)\geqslant\Psi(R)$, et par suite $|P(R)|\leqslant|\Phi(R)|+|\Psi(R)|$ pour tout $R\subset R_0$. Il en résulte, les fonctions $\Phi(R)$ et $\Psi(R)$ étant par définition continues, qu'il en est de même de la fonction P.

D'autre part, pour tout couple d'intervalles I_1 et I_2 situés dans R_0 et tels que $I_1\cdot I_2=0$ on a, d'après le th. 5, $P(I_1+I_2)=P(I_1)+P(I_2)$ et cette égalité s'étend aussitôt, grâce à la continuité de la fonction $P(R)$, au cas où $I_1\circ I_2=0$. La fonction $P(R)$ est par conséquent additive dans R_0.

Enfin, un $\varepsilon>0$ étant donné arbitrairement, soit $\Phi_\varepsilon(R)$ une majorante de f telle que

$$0\leqslant\Phi_\varepsilon(R_0)-P(R_0)<\varepsilon^2 \tag{5.1}$$

(cf. th. 3, p. 129). La fonction

$$H(R)=\Phi_\varepsilon(R)-P(R) \tag{5.2}$$

est évidemment monotone et non négative, donc, en vertu du th. de Lebesgue (voir Chap. III, § 3, th. 2), presque partout dérivable. En posant $E_\varepsilon=\underset{x}{\mathrm{E}}\,[H'(x)>\varepsilon;\ x\in R_0]$, on a par conséquent (voir Chap. III, § 3, lemme 1) l'inégalité $H(R_0)\geqslant\varepsilon\cdot|E_\varepsilon|$, d'où selon (5.1) et (5.2)

$$|E_\varepsilon|<\varepsilon. \tag{5.3}$$

Or, pour tout point $x\in R_0$ où la fonction H est dérivable on a $\underline{\Phi}_\varepsilon(x)=H'(x)+\underline{P}(x)$, donc pour presque tout point $x\in R_0-E_\varepsilon$: $-\infty<\underline{\Phi}_\varepsilon(x)\leqslant\underline{P}(x)+\varepsilon$, c. à d. $-\infty\neq\underline{P}(x)\geqslant f(x)-\varepsilon$, d'où, en vertu de (5.3) et ε étant arbitraire, $-\infty\neq\underline{P}(x)\geqslant f(x)$ presque partout dans R_0. On déduit par un raisonnement tout à fait symétrique que $+\infty\neq\overline{P}(x)\leqslant f(x)$ presque partout dans R_0. On a ainsi dans R_0 presque partout $-\infty<\underline{P}(x)=\overline{P}(x)=f(x)<+\infty$, c. q. f. d.

En même temps, il est ainsi démontré que toute fonction $f(x)$ qui est intégrable $(\mathcal{P})$ est presque partout finie. Toute fonction de point qui est presque partout la dérivée d'une fonction de figure étant, d'autre part, mesurable (cf. Chap. III, § 2, th. 1), on obtient le

Théorème 8. *Toute fonction de point qui est intégrable $(\mathcal{P})$ est mesurable et presque partout finie.*

Intégrale indéfinie de Perron.

§ 6. Comme le montre le th. 7 du § précédent, toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{P})$ sur une figure R_0 l'est également sur toute figure $R \subset R_0$ et la fonction $P(f; R) = (\mathcal{P}) \int_{R_0} f(x)\, dx$ est additive dans R_0. Elle sera dite *intégrale indéfinie* de Perron ou *intégrale indéfinie* $(\mathcal{P})$ de la fonction $f(x)$ dans R_0.

Dans le cas particulier où $f(x)$ est une fonction de point dans $\mathbf{R}_1$, son intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ est une fonction additive de figure dans $\mathbf{R}_1$ et les fonctions d'une variable réelle qui lui viennent correspondre et qui ne diffèrent l'une de l'autre que par une constante (cf. Chap. I, § 14, p. 17) s'appelleront (tout comme pour l'intégrale lebesguienne) *intégrales indéfinies* $(\mathcal{P})$ de la fonction $f(x)$.

L'intégrale indéfinie de Perron embrasse par définition l'intégrale de Newton (définie au § 1, p. 124). En effet, si une fonction additive de figure $F(R)$ est fonction primitive d'une fonction de point $f(x)$, elle est en même temps sa fonction majorante et minorante à la fois, donc son intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$.

Le th. 9, qui va suivre, montre que l'intégrale de Perron embrasse également l'intégrale de Lebesgue. Il en résulte que la classe des fonctions intégrables $(\mathcal{P})$ est essentiellement plus étendue aussi bien de celle des fonctions intégrables au sens de Newton que de celle des fonctions sommables au sens de Lebesgue, et même de la somme de ces deux classes.

Théorème 9. *Toute fonction $f(x)$ intégrable sur une figure R_0 au sens de Lebesgue l'est également au sens de Perron et ses intégrales définies $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{P})$ sur R_0 sont égales.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe en vertu du th. 8, Chap. V, § 6, deux fonctions, à savoir une fonction semicontinue inférieurement $\varphi(x)$ et une fonction semicontinue supérieurement $\psi(x)$, qui remplissent les conditions:

$$(6.1) \quad -\infty \neq \varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant \psi(x) \neq +\infty \quad \textit{pour tout } x \in R_0$$

$$(6.2) \qquad \int_{R_0} (\varphi - f)\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{et} \quad \int_{R_0} (f - \psi)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction $f(x)$ étant sommable par hypothèse, il en est de même des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Or, en posant:

$$\Phi(R) = \int_R \varphi(x)\, dx \quad \textit{et} \quad \Psi(R) = \int_R \psi(x)\, dx,$$

on a, en vertu du th. 11, Chap. IV, § 3, les inégalités

$$\underline{\Phi}(x) \geqslant \varphi(x) > -\infty \quad \textit{et} \quad \overline{\Psi}(x) \leqslant \psi(x) < +\infty \quad \textit{pour tout } x \in R_0,$$

de sorte que les fonctions Φ et Ψ sont en raison de (6.1) respectivement une majorante et une minorante de $f(x)$ dans R_0. Enfin, on obtient de (6.1) et (6.2) les inégalités $\Phi(R_0) \geqslant \int_{R_0} f(x)\, dx \geqslant \Psi(R_0)$ et $\Phi(R_0) - \Psi(R_0) < \varepsilon$, ce qui prouve selon le th. 3, p. 129, que la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Perron et que ses intégrales $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{P})$ sur R_0 coïncident, c. q. f. d.

Pour les fonctions de signe constant, et même de signe *presque partout* constant, ce résultat peut être complété par deux théorèmes suivants, qui montrent que les deux opérations, à savoir $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{P})$, sont alors tout à fait équivalentes.

Théorème 10. *Toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathcal{P})$ et partout non négative sur une figure R_0 est sommable sur cette figure.*

Démonstration. On a pour tout $x \in R_0$, quelle que soit une majorante $\Phi(R)$ de $f(x)$, l'inégalité

$$\underline{\Phi}(x) \geqslant f(x) \geqslant 0.$$

En vertu du th. 1, p. 127, la fonction $\Phi(R)$ est donc monotone non négative. Par conséquent elle admet presque partout une dérivée bien déterminée, sommable sur R_0. L'inégalité précédente devient donc presque partout $\Phi'(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ et, $\Phi'(x)$ étant d'après le th. 7, Chap. IV, § 2, une fonction sommable, il en résulte en vertu du th. 12, Chap. IV, § 4, qu'il en est de même de la fonction $f(x)$, c. q. f. d.

Lemme. *Etant données dans une figure R_0 deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, dont $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{P})$ sur R_0 et $g(x)$ ne diffère de $f(x)$ que tout au plus dans les points où $f(x)$ prend des valeurs infinies, la fonction $g(x)$ est également intégrable $(\mathcal{P})$ et on a $(\mathcal{P}) \int_{R_0} g\, dx = (\mathcal{P}) \int_{R_0} f\, dx$.*

Démonstration. On peut évidemment se borner au cas où $f(x)$ et $g(x)$ ne diffèrent que p. ex. dans l'ensemble $E = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = +\infty]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe en vertu du th. 3, p. 129, une majorante Φ_f et une minorante Ψ_f de f dans R_0 telles que

$$\Phi_f(R_0) - \Psi_f(R_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3}$$

Posons

$$h(x) = \begin{cases} -\infty & pour\ x \in E \\ 0 & pour\ x \in CE. \end{cases}$$

L'ensemble E étant (en vertu du th. 8, p. 131) de mesure nulle, la fonction $h(x)$ est intégrable ($\mathcal{L}$), donc aussi (en vertu du th. 9, p. 132) intégrable ($\mathcal{P}$) et son intégrale ($\mathcal{P}$) sur R_0 est nulle. Soit $\Psi_h(R)$ une minorante de $h(x)$ sur R_0 telle que

$$\Psi_h(R_0) > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.4}$$

En posant alors

$$\Psi_g(R) = \Psi_f(R) + \Psi_h(R), \tag{6.5}$$

la fonction Ψ_g est une minorante de $g(x)$ dans R_0; en effet, pour tout $x \in R_0 \cdot E$ on a $\overline{\Psi}_h(x) \leqslant h(x) = -\infty$, ce qui donne en vertu de $\overline{\Psi}_f(x) < +\infty$, la relation $\overline{\Psi}_g(x) \leqslant \overline{\Psi}_f(x) + \overline{\Psi}_h(x) = -\infty \leqslant g(x)$, tandis que pour tout $x \in R_0 - E$ on a en vertu de (6.5) la relation $\overline{\Psi}_g(x) \leqslant \overline{\Psi}_f(x) + \overline{\Psi}_h(x) \leqslant \overline{\Psi}_f(x) \leqslant f(x) = g(x)$.

On a de plus, en vertu de (6.3), (6.4) et (6.5) les inégalités $\Phi_f(R_0) - \Psi_g(R_0) < \varepsilon$ et $\Phi_f(R_0) > (\mathcal{P}) \int_{R_0} f(x)\,dx > \Psi_f(R_0) \geqslant \Psi_g(R_0)$.

Or, la majorante $\Phi_f(R)$ de $f(x)$ étant en même temps une majorante de la fonction $g(x) \leqslant f(x)$, il en résulte en vertu du th. 3, p. 129, que $g(x)$ est une fonction intégrable ($\mathcal{P}$) sur R_0 et que son intégrale définie y est égale à celle de $f(x)$, c. q. f. d.

Théorème 11. *Deux fonctions équivalentes dans une figure R_0 n'y sont intégrables ($\mathcal{P}$) que simultanément et leurs intégrales définies ($\mathcal{P}$) sont égales.*

Démonstration. Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions équivalentes dans R_0. Admettons que la fonction $f_1(x)$ soit intégrable ($\mathcal{P}$) sur R_0. La fonction

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & lorsque\ f_1(x) \neq \pm\infty \\ 0\ , & lorsque\ f_1(x) = \pm\infty \end{cases}$$

est, en vertu du lemme, intégrable ($\mathcal{P}$) et on a l'égalité $(\mathcal{P}) \int_{R_0} g\,dx = (\mathcal{P}) \int_{R_0} f_1\,dx$.

Or, $g(x)$ étant partout finie par définition, la soustraction $f_2(x) - g(x)$ est partout possible, et comme $f_2(x) = g(x)$ presque partout, on a $\int_{R_0} (f_2 - g)\,dx = 0$. La fonction $f_2 = (f_2 - g) + g$ est donc, en vertu du th. 6, p. 130, aussi intégrable ($\mathcal{P}$) et on a $(\mathcal{P}) \int_{R_0} f_2\,dx = (\mathcal{P}) \int_{R_0} g\,dx = (\mathcal{P}) \int_{R_0} f_1\,dx$, c. q. f. d.

§ 7. Le th. suivant constitue une extension à l'intégrale ($\mathcal{P}$) du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones de fonctions.

Théorème 12. *Etant donnée une suite presque partout non décroissante $\{f_n(x)\}$ de fonctions intégrables ($\mathcal{P}$) sur une figure R_0 et dont la suite des intégrales définies $\{(\mathcal{P}) \int_{R_0} f_n\,dx\}$ est bornée supérieurement, la fonction limite $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est aussi intégrable ($\mathcal{P}$) sur R_0 et on a $\lim_n (\mathcal{P}) \int_{R_0} f_n\,dx = (\mathcal{P}) \int_{R_0} f\,dx$.*

Démonstration. Ce th. se réduit au th. de Lebesgue (Chap. IV, § 2, th. 6). On n'a qu'à considérer au lieu des fonctions $f_n(x)$ les fonctions $f_n(x) - f_1(x)$, qui, comme fonctions intégrables ($\mathcal{P}$) et presque partout non négatives, sont en vertu des th. 10 et 11 intégrables ($\mathcal{L}$).

Théorème 13. *Etant donnée dans R_0 une fonction additive et continue $F(R)$ remplissant à peu près partout [1]) la condition $+\infty \neq \overline{F}(x) \leqslant g(x)$, où $g(x)$ est une fonction intégrable ($\mathcal{P}$) sur R_0, on a $F(R_0) \leqslant (\mathcal{P}) \int_{R_0} g(x)\,dx$.*

De même, la condition symétrique $-\infty \neq \underline{F}(x) \geqslant g(x)$, supposée remplie à peu près partout, entraîne $F(R_0) \geqslant (\mathcal{P}) \int_{R_0} g(x)\,dx$.

Démonstration. Soit $\Phi(R)$ une majorante quelconque de $g(x)$ sur R_0. En posant $H(R) = \Phi(R) - F(R)$, on a à peu près

[1]) Cf. la définition, p. 126.

partout $\underline{H}(x) \geqslant \underline{\Phi}(x) - \overline{F}(x) \geqslant 0$, puisque par hypothèse on a partout $\overline{F}(x) < +\infty$ et à peu près partout $\underline{\Phi}(x) \geqslant g(x) \geqslant \overline{F}(x)$. Il en résulte d'après le th. 1, p. 127, que $H(R_0) \geqslant 0$, donc que $\Phi(R_0) \geqslant F(R_0)$, d'où, la majorante Φ de $g(x)$ étant arbitraire, $(\mathcal{P}) \int_{R_0} g(x)\, dx \geqslant F(R_0)$, c. q. f. d.

Théorème 14. *Etant donnée dans R_0 une fonction additive et continue $F(R)$, si ses dérivées supérieure et inférieure $\overline{F}(x)$ et $\underline{F}(x)$ y sont à peu près partout finies et intégrables $(\mathcal{P})$ sur R_0, la fonction $F(R)$ est presque partout dérivable dans R_0 et elle y est l'intégrale indéfinie $(\mathcal{P})$ de sa dérivée.*

Démonstration. En effet, d'après le th. 13 on a alors pour tout $R \subset R_0$ $(\mathcal{P}) \int_R \underline{F}(x)\, dx \leqslant F(R) \leqslant (\mathcal{P}) \int_R \overline{F}(x)\, dx$, d'où, en posant $H_1(R) = (\mathcal{P}) \int_R [\overline{F}(x) - \underline{F}(x)]\, dx$ et $H_2(R) = (\mathcal{P}) \int_R \overline{F}(x)\, dx - F(R)$, les fonctions H_1 et H_2 sont monotones non négatives. De plus, $H_1(R)$, comme l'intégrale $(\mathcal{P})$ de la fonction non négative $\underline{F} - \overline{F}$, est en même temps (en vertu du th. 10, p. 133) son intégrale $(\mathcal{L})$, donc une fonction absolument continue; par suite il en est autant de la fonction $H_2(R) \leqslant H_1(R)$. Par définition de H_2 on peut donc écrire $F(R) = (\mathcal{P}) \int_R \overline{F}(x)\, dx - H_2(R) = (\mathcal{P}) \int_R [\overline{F}(x) - H'_2(x)]\, dx$ et d'appliquer la deuxième partie du th. 7, p. 130.

On en déduit pour l'intégrale de Lebesgue les théorèmes analogues suivants.

Théorème 15. *Etant donnée dans R_0 une fonction additive et continue $F(R)$ remplissant à peu près partout les inégalités $\overline{F}(x) < +\infty$ et $\overline{F}(x) \leqslant g(x)$, où $g(x)$ est une fonction sommable sur R_0, on a*[1] $\overline{E}(F; R_0) = 0$ *(les inégalités symétriques $\underline{F}(x) > -\infty$ et $\underline{F}(x) \geqslant g(x)$, remplies à peu près partout, entraînant $\underline{E}(F; R_0) = 0$).*

Démonstration. Posons $G(R) = \int_{R_0} g(x)\, dx$. Pour tout $R \subset R_0$ on a donc, en vertu du th. 13, $F(R) \leqslant G(R)$ et, la fonction $G(R)$

[1] Voir pour la notation des écarts, Chap. I, § 12, p. 10.

étant (comme intégrale indéfinie $(\mathcal{L})$) absolument continue, il vient $\overline{E}(F; R) \leqslant \overline{E}(G; R) = 0$, d'où $\overline{E}(F; R) = 0$, c. q. f. d.

Il en résulte aussitôt le

Théorème 16. *Etant donnée dans R_0 une fonction additive et continue $F(R)$, si ses dérivées $\overline{F}(x)$ et $\underline{F}(x)$ sont à peu près partout finies et sommables sur R_0, la fonction $F(R)$ est absolument continue dans R_0, c. à d. une intégrale indéfinie $(\mathcal{L})$.*

Lemme de Zygmund.

§ 8. Nous allons achever ce chapitre par quelques théorèmes qui concernent exclusivement les fonctions d'*une* variable réelle. Parmi les théorèmes qui précèdent, il y a, en effet, qui donnent lieu pour ces fonctions à des énoncés bien plus précis.

Lemme (de Zygmund). *Etant donnée dans un intervalle $I_0 = [a, b]$ une fonction continue $F(x)$, si l'ensemble Y de toutes les valeurs prises par $F(x)$ dans l'ensemble $E = \underset{x}{\mathrm{E}}\, [\overline{F}^+(x) \leqslant 0]$ est partout discontinu (c. à d. ne contenant aucun intervalle ouvert non vide), la fonction $F(x)$ est dans I_0 monotone non décroissante.*

Démonstration. Soit $I = [\alpha, \beta]$ un sous-intervalle quelconque de I_0 et supposons que $F(\alpha) > F(\beta)$. L'ensemble Y étant partout discontinu, il existe par définition de E une valeur y_0 n'appartenant pas à Y et telle que

$$F(\alpha) > y_0 > F(\beta). \tag{8.1}$$

Soient A l'ensemble des points $x \in I$ satisfaisant à l'équation $F(x) = y_0$ et x_0 la borne supérieure de A. On a évidemment $A \subset I_0 - E$ et, par suite de la continuité de la fonction $F(x)$, $x_0 \in A \subset I_0 - E$. Il en résulte que

$$\overline{F}^+(x_0) > 0. \tag{8.2}$$

Mais, en raison de (8.1) et par définition de x_0, on a d'autre part $F(x) < y_0 = F(x_0)$ pour tout point x de l'intervalle $[x_0, \beta]$. Par conséquent $\overline{F}^+(x_0) \leqslant 0$, contrairement à (8.2).

Théorème 17. *Etant donnée dans un intervalle $I_0 = [a, b]$ une fonction continue $F(x)$ de variable réelle, si on a à peu près partout $\overline{F}^+(x) \geqslant 0$, la fonction $F(x)$ est monotone non décroissante.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction $F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon \cdot x$ donne dans I_0 partout $\overline{F}_\varepsilon^+(x) = \overline{F}^+(x) + \varepsilon$, donc à peu près partout $\overline{F}_\varepsilon^+(x) \geqslant \varepsilon > 0$. L'ensemble $E = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\overline{F}_\varepsilon^+(x) \leqslant 0]$ est par conséquent au plus dénombrable. Il en est donc de même de l'ensemble Y des valeurs prises par la fonction $F(x)$ dans E. Ainsi, l'ensemble Y est partout discontinu (en vertu d'un théorème élémentaire de la Théorie des ensembles, ou encore en vertu du théorème de la Théorie de la mesure, suivant lequel tout ensemble dénombrable est de mesure nulle).

Pour tout couple α, β de points de I_0 on a donc d'après le lemme de Z y g m u n d $0 \leqslant F_\varepsilon(\beta) - F_\varepsilon(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) + \varepsilon \cdot (\beta - \alpha)$, d'où, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, $F(\beta) \geqslant F(\alpha)$.

*Théorèmes de S c h e e f f e r et de D i n i.

§ 9. Le th. 17 se rattache à deux théorèmes provenant du dernier siècle et connus sous les noms des théorèmes de S c h e e f f e r et de D i n i.

Le premier (voir L. S c h e e f f e r [1, p. 183 et 282]) mérite attention par sa simplicité et par son rôle historique du précurseur des recherches modernes sur les conditions permettant de déterminer une fonction par ses nombres dérivés (cf. les résultats plus récents aux chapitres IX et X de ce livre).

Le second a été établi par U. D i n i déjà en 1878 dans son livre classique (voir [1]).

Théorème de S c h e e f f e r. Toute fonction continue qui admet à peu près partout un nombre dérivé supérieur fini à droite, est déterminée (à une constante additive près) par ce dérivé, donné à peu près partout.

Démonstration. Il s'agit de montrer que, si pour deux fonctions continues $F(x)$ et $G(x)$ les nombres dérivés $\overline{F}^+(x)$ et $\overline{G}^+(x)$ sont à peu près partout finis et égaux, la différence $F(x) - G(x)$ est une constante.

En posant, en effet, $H(x) = F(x) - G(x)$, on a à peu près partout $\underline{H}^+(x) + \overline{G}^+(x) \leqslant \overline{F}^+(x) \leqslant \overline{H}^+(x) + \overline{G}^+(x)$, d'où $\underline{H}^+(x) \leqslant 0 \leqslant \overline{H}^+(x)$. Par conséquent, la fonction $H(x)$ est en vertu du th. 17 à la fois non croissante et non décroissante, donc constante, c. q. f. d.

Théorème de D i n i. Etant donnée dans un intervalle $I = [a, b]$ une fonction continue $F(x)$, les bornes supérieures et inférieures de ses

quatre nombres dérivés de D i n i sont respectivement égales à la borne supérieure et inférieure des quotients $\dfrac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$ où x_1 et x_2 sont des points quelconques de I.

Démonstration. En effet, soit p. ex. $m \leqslant \overline{F}^+(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. L'application du th. 17 aux fonctions $F(x) - m \cdot x$ et $F(x) - M \cdot x$, dont les dérivés supérieurs droits sont respectivement l'un non négatif et l'autre non positif, donne alors l'inégalité $m \cdot (x_2 - x_1) \leqslant F(x_2) - F(x_1) \leqslant M \cdot (x_2 - x_1)$ pour toutes deux valeurs x_2 et x_1 où $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$.

Corollaire. Si un quelconque des quatre nombres dérivés de D i n i d'une fonction continue est continu dans un point donné, il en est de même des trois autres et tous les quatre nombres en question sont égaux, de sorte que la fonction considérée est dérivable dans ce point.

Intégrale de P e r r o n d'une fonction de variable réelle.

§ 10. Le th. 17 permet de préciser pour les fonctions d'une variable réelle les th. 13—16 comme il suit.

Théorème 18. *Etant donnée dans un intervalle $I = [a, b]$ une fonction continue $F(x)$ remplissant à peu près partout la condition $+\infty \neq \underline{F}^+(x) \leqslant g(x)$, où $g(x)$ est une fonction intégrable $(\mathcal{P})$ sur $[a, b]$, on a $F(b) - F(a) \leqslant (\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,dx$ (la condition symétrique $-\infty \neq \overline{F}^+(x) \geqslant g(x)$, supposée remplie à peu près partout, entraîne l'inégalite symétrique $F(b) - F(a) \geqslant (\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,dx$).*

Si, en outre, la fonction $g(x)$ est sommable, on a $\overline{E}(F; I) = 0$ (dans le cas symétrique $\underline{E}(F; I) = 0$).

Théorème 19. *Si un nombre dérivé médian[1]) à droite $\lambda(x)$ d'une fonction continue $F(x)$ est à peu près partout fini et intégrable $(\mathcal{P})$ sur un intervalle $[a, b]$, la fonction $F(x)$ est dérivable presque partout dans $[a, b]$ et on a $F(b) - F(a) = (\mathcal{P})\int_a^b F'(x)\,dx$.*

[1]) voir Chap. III, § 1, p. 46.

Si, en outre, le dérivé $\lambda(x)$ est sommable sur $[a, b]$, la fonction $F(x)$ est absolument continue dans $[a, b]$.

La démonstration du th. 18 ne diffère de celle des th. 13 et 15 que par l'application du th. 17 au lieu du th. 1. La première partie du th. 19 résulte du th. 18, puisqu'on a $\underline{F}^{+}(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant \overline{F}^{+}(x)$. Enfin, la deuxième partie de ce théorème est une conséquence directe de la première.

Les th. 18 et 19 constituent en raison du th. 13, Chap. IV, § 4, une généralisation du th. de Lebesgue [I, p. 122; 2; 3; 4; II, p. 183]: *pour que l'un des nombres dérivés d'une fonction* (continue), *supposé fini, soit sommable, il faut et il suffit que cette fonction soit à variation bornée; sa variation totale* (c. à d. absolue) *est l'intégrale de la valeur absolue du nombre dérivé.* Cf. aussi, dans le même ordre d'idées, H. Lebesgue [2, p. 423] où l'on trouve le théorème suivant sur les fonctions additives d'intervalle dans l'espace: *une fonction d'intervalle additive* (et continue), *à variation bornée, et dont les nombres dérivés sont partout finis, est l'intégrale indéfinie de ses nombres dérivés.* Les th. 13—16 présentent, en vertu du th. 7, Chap. IV, § 2, des généralisations de cet énoncé.

La méthode des fonctions *majorantes* et *minorantes* a été imaginée par M. Ch. J. de la Vallée-Poussin pour étudier les propriétés de l'intégrale de Lebesgue et celles des fonctions additives d'ensemble. Une méthode tout-à-fait équivalente (celle des *Ober-* et *Unterfunktionen*) a été inventée indépendamment par M. O. Perron [1], qui en a fait la base d'une nouvelle définition de l'intégrale, n'exigeant pas la théorie de la mesure.

La définition primitive de Perron ne concernait que l'intégrale des fonctions bornées. Elle a été étendue aux fonctions non bornées par M. O. Bauer [1], qui a montré que l'intégrale de Perron embrasse celle de Lebesgue; il a généralisé en même temps la définition de l'intégrale ($\mathcal{P}$) sur les fonctions de point d'un espace euclidien arbitraire.

Les recherches ultérieures ont mis en évidence l'équivalence entre l'intégrale de Perron et l'une (celle au sens restreint) des deux intégrales de Denjoy (voir Chap. X).

Pour la généralisation de l'intégrale de Perron, équivalente à l'autre intégrale de Denjoy (à celle au sens large), voir J. Ridder [3], et pour d'autres généralisations J. C. Burkill [5].

Notons encore la conséquence suivante du th. 18, qui constitue une généralisation du th. 17, p. 137:

Si pour une fonction continue $F(x)$ on a $\overline{F}^{+}(x) \neq -\infty$ à peu près partout et en même temps $\overline{F}^{+}(x) \geqslant 0$ presque partout, la fonction $F(x)$ est non décroissante[1].

[1]) C. Carathéodory [I, p. 580].

On en déduit aussitôt la généralisation suivante du théorème de Scheeffer:

Si pour un couple de fonctions continues $F(x)$ et $G(x)$ les nombres dérivés $\overline{F}^{+}(x)$ et $\overline{G}^{+}(x)$ sont à peu près partout finis et presque partout égaux, les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ ne diffèrent que par une constante[1]).

Dans le même ordre d'idées le théorème suivant est à mentionner: *si la dérivée $F'(x)$ (finie ou infinie) d'une fonction continue $F(x)$ existe à peu près partout et est non négative presque partout, la fonction $F(x)$ est non décroissante.* Il en résulte aisément que *toute fonction continue dans un intervalle I dont la dérivée existe à peu près partout et est bornée dans I, abstraction faite d'un ensemble de mesure nulle, est une intégrale indéfinie de sa dérivée.*

Ce théorème, dont la démonstration est d'ailleurs très simple (cf. G. Goldowsky [1] et L. Tonelli [8]), est digne d'attention, puisque l'exemple p. 125 montre qu'une fonction continue admettant partout une dérivée déterminée sommable n'est pas nécessairement une intégrale indéfinie.

[1]) Ce corollaire sera généralisé davantage dans la suite (voir Chap. X, § 4, th. de Denjoy).