*CHAPITRE VI.

Aire d'une surface $z = w(x, y)$.

Préliminaires.

§ 1. Nous allons consacrer ce chapitre à une des plus belles applications de la Théorie de l'intégrale lebesguienne, à savoir à la théorie de l'aire d'une surface courbe.

Nous avons vu (cf. Chap. III, § 8, et Chap. IV, § 8) que la théorie de Lebesgue permet de résoudre complètement les problèmes élémentaires concernant la longueur d'une ligne courbe et l'expression de sa longueur par une intégrale. Or, des problèmes analogues concernant les surfaces courbes comportent des difficultés bien plus sérieuses. Certains traités classiques du calcul différentiel et intégral, même de la deuxième moitié du XIX siècle, contiennent encore la définition inexacte de l'aire d'une surface. Imitant la définition de la longueur d'une courbe, on cherchait à définir l'aire d'une surface comme la limite des aires des polyèdres inscrits dans cette surface et tendant vers elle. H. A. Schwarz [I, p. 309] [1]) a remarqué le premier (dans une lettre à Genocchi) qu'une telle limite peut ne pas exister même dans le cas d'une surface aussi simple que celle d'un cylindre droit et que les aires de certaines suites de polyèdres inscrits peuvent tendre vers un nombre arbitraire non moindre que l'aire véritable du cylindre. A la même époque L. Peano et Ch. Hermite ont soumis l'ancienne définition à des critiques analogues et ont proposé des définitions nouvelles, basées sur des idées tout à fait différentes. Ce n'est que M. Lebesgue qui a repris dans sa Thèse [1, p. 298 et suivantes] la méthode ancienne, en la modifiant

[1]) Cf. aussi M. Fréchet [3].

d'une manière que l'on peut résumer à peu près comme suit: l'aire d'une surface est la limite inférieure des aires des polyèdres tendant uniformément vers cette surface (mais pas nécessairement inscrits dans elle)[1].

Cependant, dans le cas le plus général, lorsque la surface est donnée sous une forme paramétrique, cette définition exige certaines notions et considérations auxiliaires (cf. T. Radò [1; 4]) et les résultats acquis sont loin d'être aussi complets que ceux dont nous disposons pour les lignes courbes[2]. Les difficultés qui surgissent appartiennent plutôt à la Géométrie et à la Topologie qu'à la Théorie des fonctions de variable réelle.

Nous allons donc nous borner ici au cas des surfaces données par les fonctions continues de la forme $z = w(x, y)$, c. à d. qui peuvent être regardées comme des images (cf. Chap. V, § 1, p. 78) de ces fonctions. C'est à M. L. Tonelli [5; 6] que l'on doit les plus beaux et les plus complets résultats concernant ces surfaces. Ils feront l'objet principal de ce chapitre et seront formulés au § 15.

La théorie de M. Tonelli est basée sur la définition de l'aire, proposée par M. Lebesgue. Parmi les ouvrages modernes consacrés à la théorie de l'aire des surfaces, mais fondés sur d'autres définitions, sont à citer: W. H. Young [3], J. C. Burkill [3], S. Banach [4], J. Schauder [1].

M. T. Radò [1, pp. 154—169; 2] a développé les méthodes de M. Tonelli, en s'inspirant des idées plus anciennes de Z. de Geöcze et en procédant à l'aide de certaines fonctionnelles introduites par ce géomètre. Le résultat principal de M. Radò (voir § 14, th. 14), dont les applications seront discutées plus loin, permet de définir l'aire d'une surface comme la *limite* (tout court) de certaines expressions bien simples, tandis que la définition de M. Lebesgue ne permettait de l'obtenir directement que comme une *limite inférieure*. On est conduit par ces méthodes à baser d'une façon naturelle l'exposé de la théorie de l'aire d'une surface $z = w(x, y)$ sur la notion de fonction d'intervalle (cf. J. C. Burkill [2; 3]).

---

1) Cf. aussi M. Fréchet [4] et H. Lebesgue [6].

2) Pour le cas spécial où les fonctions $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ et $z = z(u, v)$, qui définissent paramétriquement la surface, satisfont à la condition de Lipschitz, voir T. Radò [4] et H. Rademacher [3].

Les propriétés fondamentales des fonctions d'intervalle ne seront étudiées ici (voir §§ 3—8) que dans des limites de généralité réduites en principe aux besoins des applications. Pour les propriétés différentielles des fonctions d'intervalle voir J. C. Burkill [4], S. Saks [3], R. C. Young [1], F. Riesz [5]; pour la théorie plus générale et abstraite, cf. aussi A. Kolmogoroff [1].

A moins d'une mention expresse, tous les raisonnements de ce chapitre seront formulés pour des fonctions de deux variables réelles, de sorte qu'un intervalle est à entendre ici comme un rectangle. L'extension sur les espaces à un nombre quelconque des dimensions ne présente pas de difficultés.

Aire d'une surface courbe.

§ 2. Etant donnée une fonction $w(x, y)$ continue dans un intervalle I_0, nous entendrons par *surface continue* $z = w(x, y)$ dans I_0 l'image de cette fonction (cf. Chap. V, § 1, p. 78).

Une surface continue $z = p(x, y)$ définie dans I_0 s'appellera *polyèdre*, lorsqu'il existe une décomposition de I_0 en nombre fini des triangles $T_1, T_2, \dots, T_n$ n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que la fonction $p(x, y)$ soit *linéaire* dans chacun d'eux, c. à d. que l'on ait

$$(2.1)\quad p(x,y) = A_i x + B_i y + C_i \text{ pour tout } (x,y) \in T_i \text{ où } i = 1, 2, \dots, n.$$

Les parties et les points d'un polyèdre qui correspondent respectivement aux triangles $\{T_i\}$ et à leurs sommets s'appelleront *faces* et *sommets* de ce polyèdre.

Nous appellerons *aire élémentaire* d'un polyèdre $z = p(x, y)$ la somme des aires de ses faces au sens de Géométrie élémentaire, c. à d., une surface étant un polyèdre donné en triangles $\{T_i\}$ par la formule (2.1), son aire élémentaire est le nombre

$$(2.2)\qquad |p| = \sum_{i=1}^{n} |T_i| \cdot \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + 1};$$

on en tire aussitôt la formule

$$(2.3)\qquad |p| = \iint\limits_{I_0} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\, dy.$$

Etant donnée une surface continue quelconque $z = w(x, y)$, nous appellerons son *aire* dans l'intervalle I_0 et nous désignerons par $L(w; I_0)$ la limite inférieure des aires élémentaires de polyèdres tendant uniformément vers cette surface. $L(w; I_0)$ est donc la borne inférieure de tous les nombres a, pour lesquels il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un polyèdre $z = p(x, y)$ tel que

$$(2.4) \quad |p| \geqslant a - \varepsilon \ \textit{et} \ |p(x,y) - w(x,y)| \leqslant \varepsilon \ \textit{pour tout point} \ (x,y) \in I_0.$$

On pourrait montrer en ce moment que pour les polyèdres l'*aire élémentaire* coïncide avec l'*aire* dans le sens de la définition générale qui vient d'être énoncée. Or, c'est une conséquence facile des théorèmes ultérieurs (voir p. 120), de sorte qu'une démonstration spéciale serait ici superflue.

Il est à remarquer que, conformément à la définition admise, l'aire d'une surface peut être finie ou infinie et que, par analogie aux lignes courbes, on serait tenté d'appeler „rectifiables" les surfaces dont l'aire est finie. Or, on réserve avec M. Lebesgue le terme *rectifiable* uniquement aux surfaces $z = w(x, y)$ qui satisfont à la condition de Lipschitz (voir plus loin, p. 109).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition.

Théorème 1. *Pour toute suite $\{w_n(x, y)\}$ de fonctions continues qui convergent uniformément dans un intervalle I_0 vers une fonction $w(x, y)$, on a*

$$(2.5) \qquad \liminf_n L(w_n; I_0) \geqslant L(w; I_0).$$

Fonctions d'intervalle. Intégrale de Burkill.

§ 3. Etant donnée une famille finie $\mathbf{S}$ d'intervalles (rectangles) $I_1, I_2, \ldots, I_n$, convenons de désigner d'une façon générale pour toute fonction d'intervalle $F(I)$ par $F(\mathbf{S})$ la somme des valeurs de $F(I)$ sur les intervalles appartenant à $\mathbf{S}$; en formule: $F(\mathbf{S}) = F(I_1) + F(I_2) + \ldots + F(I_n)$. La somme des aires de ces intervalles $\sigma(\mathbf{S})$ (cf. Chap. II, § 2) constitue donc un cas particulier de cette notation, à savoir où $F(I) = \sigma(I) = |I|$.

§ 4. On appelle *intégrale supérieure* et *inférieure* au sens de Burkill d'une fonction d'intervalle $F(I)$ sur une figure R_0, et on désigne par $\overline{\int}_{R_0} F$ et $\underline{\int}_{R_0} F$ respectivement, la limite supérieure et inférieure des nombres $F(\mathbf{I})$ pour les *subdivisions* quelconques $\mathbf{I}$ de R_0 dont les *nombres caractéristiques* $\delta(\mathbf{I})$ tendent vers 0 (cf. Chap. V, § 7, p. 91). En cas d'égalité de ces intégrales leur valeur commune s'appelle *l'intégrale définie* de Burkill (ou *l'intégrale* tout court) de la fonction $F(I)$ sur R_0 et on la désigne par $\int_{R_0} F$.

Si elle existe et est finie, la fonction F est dite *intégrable* sur R_0 au sens de Burkill. Nous écrirons parfois $B(F; R_0)$ au lieu de $\int_{R_0} F$. Si une fonction d'intervalle $F(I)$ est intégrable sur toute figure R situé dans R_0 (cf. plus loin th. 3) la fonction de figure $B(R) = \int_R F$, où $R \subset R_0$, sera appelée *intégrale indéfinie* de $F(I)$ dans R_0.

On déduit aussitôt de ces définitions le théorème suivant:

Théorème 2. *On a pour toute fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans $R_0 = R_1 + R_2$ où $R_1 \circ R_2 = 0$*

$$\overline{\int}_{R_0} F \geqslant \overline{\int}_{R_1} F + \overline{\int}_{R_2} F \quad \textit{et} \quad \underline{\int}_{R_0} F \leqslant \underline{\int}_{R_1} F + \underline{\int}_{R_2} F.$$

Il en résulte par soustraction le

Théorème 3. *Chaque fonction d'intervalle $F(I)$ qui est intégrable sur une figure R_0 l'est également sur toute figure $R \subset R_0$ et son intégrale $B(R) = \int_R F$ est une fonction additive de figure.*

§ 5. Appelons *écart* d'une fonction d'intervalle $F(I)$ *sur une figure R_0 le long d'une droite D* (parallèle à l'axe des x ou des y) le nombre

$$E_D(F; R_0) = \limsup_{\delta(\mathbf{S}) \to 0} |F(\mathbf{S})|,$$

où $\mathbf{S}$ est une famille finie quelconque d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre, situés dans R_0 et dont chacun admet des points communs avec la droite D.

Comme une généralisation du théorème du Chap. I, § 14, p. 19, sur les fonctions d'une variable réelle, on obtient le théorème suivant sur les fonctions d'intervalle.

Théorème 4. *Etant donnée une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans une figure R_0 et telle que $\overline{\int}_{R_0} |F| < \infty$, on n'a $E_D(F; R_0) > 0$ que tout au plus pour un ensemble dénombrable de droites D parallèles aux axes des coordonnées.*

Démonstration. On voit aisément que dans cette hypothèse le nombre des droites, p. ex. $x = \xi$, le long desquelles l'écart de F sur R_0 dépasse n^{-1} n'est pas supérieur à $n \cdot \overline{\int}_{R_0} |F|$. L'ensemble de toutes les droites $x = \xi$ le long desquelles cet écart est positif est par conséquent au plus dénombrable, c. q. f. d.

§ **6. Lemme 1.** *Etant donnée une fonction d'intervalle $F(I)$ intégrable sur une figure R_0, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que pour toute famille $\mathbf{S} = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ d'intervalles situés dans R_0 et n'empiétant pas les uns sur les autres l'inégalité $\delta(\mathbf{S}) < \eta$ entraîne l'inégalité*

$$(6.1)\qquad \left|\sum_{k=1}^{m}\left[F(I_k) - \int_{I_k} F\right]\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\eta > 0$ un nombre tel que pour toute division $\mathbf{I}$ de R_0

$$(6.2)\qquad \delta(\mathbf{I}) < \eta \quad \textit{entraîne} \quad \left|F(\mathbf{I}) - \int_{R_0} F\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $R_1 = R_0 \ominus \sum_{k=1}^{m} I_k$. En vertu du th. 3, p. 103, la fonction F est intégrable sur R_1. Il existe donc une subdivision $\mathbf{I}_1$ de R_1 telle que l'on a

$$(6.3)\qquad \delta(\mathbf{I}_1) < \eta \quad \textit{et} \quad \left|F(\mathbf{I}_1) - \int_{R_1} F\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $\mathbf{S} + \mathbf{I}_1$ constitue évidemment une subdivision de R_0 et on a, par l'hypothèse concernant $\mathbf{S}$ et selon (6.3), $\delta(\mathbf{S} + \mathbf{I}_1) < \eta$. En vertu de (6.2) on a donc l'inégalité $\left|F(\mathbf{S} + \mathbf{I}_1) - \int_{R_0} F\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, dont il suffit de soustraire la deuxième des relations (6.3) pour obtenir (6.1).

Théorème 5. *Une fonction d'intervalle $F(I)$ intégrable sur une figure R_0 étant continue* [1]*), il en est de même de son intégrale indéfinie $B(R) = \int_R F$.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe en raison du lemme précédent un $\eta > 0$ tel que, étant arbitrairement donnée une famille finie $\mathbf{S}$ d'intervalles situés dans R_0 et n'empiétant pas l'un sur l'autre,

[1]) cf. Chap. I, § 7.

$$(6.4)\qquad \delta(\mathbf{S}) < \eta \quad \textit{entraîne} \quad |F(\mathbf{S}) - B(\mathbf{S})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\mathbf{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ désignant une subdivision quelconque de R_0 telle que $\delta(\mathbf{I}) < \eta$, soit $\eta_1 > 0$ un nombre assujetti à la condition:

$$(6.5)\qquad |J| < \eta_1 \quad \textit{entraîne} \quad |F(J)| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad \textit{pour tout intervalle } J \subset R_0.$$

On a alors en vertu de (6.4) pour tout intervalle $I \subset R_0$ $\left|B(I) - \sum_{j=1}^{m} F(I \odot I_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}[B(I \odot I_j) - F(I \odot I_j)]\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, de sorte que, en substituant $I \odot I_j$ à J dans (6.5), $|I| < \eta_1$ entraîne $|B(I)| < \varepsilon$. La fonction $B(I)$ est donc continue, c. q. f. d.

§ **7. Lemme 2.** *Si l'intégrale d'une fonction d'intervalle $F(I)$ intégrable sur R_0 s'annule sur toute figure $R \subset R_0$, cette fonction est dans R_0 presque partout dérivable et sa dérivée y est presque partout nulle.*

Démonstration. En vertu du lemme 1, p. 104, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que pour toute famille finie $\mathbf{S}$ d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et situés dans R_0

$$(7.1)\qquad \delta(\mathbf{S}) < \eta \quad \textit{entraîne} \quad |F(\mathbf{S})| < \varepsilon.$$

Posons $E = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}(x) > 0]$ et $E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}(x) > n^{-1}]$. Evidemment $E = \sum_n E_n$. Or, pour tout n l'ensemble E_n est couvert au sens de Vitali (cf. Chap. II, § 7, p. 33) par une famille de carrés $Q \subset R_0$ tels que $F(Q) > n^{-1} \cdot |Q|$; en vertu du th. de Vitali (voir Chap. II, § 7, th. 14) on peut donc en extraire une suite finie $\mathbf{Q}^{(n)}$ de carrés n'empiétant pas l'un sur l'autre $Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, \dots, Q_{k_n}^{(n)}$ et tels que $E_n \subset \sum_{i=1}^{k_n} Q_i^{(n)}$, $\delta(\mathbf{Q}^{(n)}) < \eta$, $\sigma(\mathbf{Q}^{(n)}) > |E_n| - \varepsilon$ et $F(Q_i^{(n)}) > n^{-1} \cdot |Q_i^{(n)}|$ pour $i = 1, 2, \dots, k_n$. Il en résulte d'après (7.1) que l'on a $\varepsilon > F(\mathbf{Q}^{(n)}) > n^{-1} \cdot \sigma(\mathbf{Q}^{(n)}) > n^{-1} \cdot [|E_n| - \varepsilon]$, d'où $|E_n| < (n+1) \cdot \varepsilon$. Le nombre ε étant arbitraire, on a donc pour tout n naturel $|E_n| = 0$, ce qui donne par sommation $|E| = 0$.

La démonstration que l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[\underline{F}(x) < 0]$ est de mesure nulle est symétrique.

Ainsi, on a presque partout $F'(x) = 0$, c. q. f. d.

Théorème 6. *Entre toute fonction d'intervalle $F(I)$ intégrable dans une figure R_0 et son intégrale indéfinie $B(I) = \int_I F$ on a les relations*

$$\overline{B}(x) = \overline{F}(x) \quad et \quad \underline{B}(x) = \underline{F}(x) \quad presque\ partout\ dans\ R_0.$$

En particulier, *si l'une des fonctions $F(I)$ et $B(I)$ est presque partout dérivable, il en est de même de l'autre et leurs dérivées sont presque partout égales.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'intégrale indéfinie de la fonction $B(I) - F(I)$ s'annule identiquement et d'appliquer le lemme 2.

§ 8. **Théorème 7.** *Toute fonction d'intervalle $F(I)$ continue, telle que*

$$\overline{\int_{R_0}} |F| < \infty \tag{8.1}$$

et qui remplit pour tout intervalle $I \subset R_0$ la condition

$$F(I) \leqslant F(\mathbf{I}), \tag{8.2}$$

où $\mathbf{I}$ est une subdivision quelconque de I, est intégrable sur R_0.

Démonstration. Etant donné un ε positif arbitraire, soit $\mathbf{I}^* = \{I_1^*, I_2^*, \ldots, I_k^*\}$ une division de la figure R_0 telle que

$$F(\mathbf{I}^*) > \overline{\int_{R_0}} F - \varepsilon. \tag{8.3}$$

La fonction $F(I)$ n'admet sur R_0 en vertu de (8.1) et du th. 4, p. 103, des écarts positifs que le long des droites parallèles aux axes des coordonnées et constituant un ensemble au plus dénombrable. Par suite de la continuité de $F(I)$ on peut donc supposer (en modifiant légèrement, au besoin, les intervalles $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_k^*$) que la subdivision $\mathbf{I}^*$ satisfait en outre à la condition $E_D(F; R_0) = 0$ pour toutes les droites D qui contiennent des côtés des intervalles $I_i^* \in \mathbf{I}^*$. Il existe par conséquent un $\eta > 0$ tel que, étant donnée une famille quelconque $\mathbf{S}$ d'intervalles situés dans R_0, n'empiétant pas l'un sur l'autre et ayant des points communs avec des côtés des rectangles $\{I_i^*\}$, l'inégalité $\delta(\mathbf{S}) < \eta$ entraîne l'inégalité $F(\mathbf{S}) < \varepsilon$.

Ceci dit, considérons une subdivision arbitraire $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ de R_0 telle que $\delta(\mathbf{I}) < \eta$.

Par effet d'un numérotage convenable, on peut évidemment admettre que ce soient les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_m$ qui ont des points communs avec la somme des côtés des intervalles I_i^* de $\mathbf{I}^*$ tandis que les autres intervalles de $\mathbf{I}$ (s'il y en a) en soient disjoints. Enfin, convenons de poser $F(I_i^* \odot I_j) = 0$ pour $I_i^* \odot I_j = 0$. Il vient $\left|\sum_{j=1}^{m} F(I_j)\right| < \varepsilon$ et $\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} F(I_i^* \odot I_j)\right| < \varepsilon$, d'où en vertu de (8.3) et (8.2) on a $\overline{\int_{R_0}} F - \varepsilon < F(\mathbf{I}^*) \leqslant F(\mathbf{I}) - \sum_{j=1}^{m} F(I_j) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} F(I_i^* \odot I_j) < F(\mathbf{I}) + 2\varepsilon$.

Par conséquent $\overline{\int_{R_0}} F < F(\mathbf{I}) + 3\varepsilon$ pour toute subdivision $\mathbf{I}$ telle que $\delta(\mathbf{I}) < \eta$. Il en résulte que $\overline{\int_{R_0}} F \leqslant \underline{\int_{R_0}} F + 3\varepsilon$, de sorte que, ε étant arbitraire, $\overline{\int_{R_0}} F = \underline{\int_{R_0}} F$.

Inégalités auxiliaires.

§ 9. Nous rappelons ici deux inégalités élémentaires et bien connues, dont nous ferons usage dans les applications des théorèmes généraux qui précèdent à la théorie de l'aire des surfaces.

(i) *Pour toute suite finie de nombres x_i, y_i, z_i où $i = 1, 2, \ldots, n$, on a*

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité se déduit simplement par induction à partir de $n = 2$, où elle est directement vérifiable.

L'inégalité (i) possède une interprétation géométrique fort simple: elle exprime le fait que la longueur d'un côté du polygone fermé n'est jamais supérieure à la somme des longueurs de tous les autres côtés de ce polygone.

En remplaçant dans (i) les sommes par les intégrales, on obtient l'autre inégalité:

(ii) *$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ étant des fonctions non négatives et mesurables dans un ensemble mesurable E, on a*

$$\left[\left(\int_E x\,dt\right)^2 + \left(\int_E y\,dt\right)^2 + \left(\int_E z\,dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_E (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Dans le cas particulier où les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, elle est une conséquence directe de (i); dans le cas général on fait intervenir le th. 20, Chap. II, § 9, et on applique le théorème de Lebesgue sur l'intégration des suites monotones de fonctions (voir Chap. V, § 3).

Il est à noter que dans l'inégalité (ii) on doit entendre par t un point de l'espace n-dimensionnel; le symbole $\int\limits_E$ est à interpréter comme une intégrale sur l'ensemble E dans $\mathbf{R}_n$.

Fonctions à variation bornée et absolument continues de deux variables.

§ 10. Etant donnée une fonction $w(x, y)$ continue dans un intervalle $I = [a_1, b_1; a_2, b_2]$, désignons pour toute valeur ξ où $a_1 \leqslant \xi \leqslant b_1$ par $W_1(w; \xi; a_2, b_2)$ la variation absolue de la fonction $w(\xi, y)$ par rapport à la variable y dans l'intervalle $[a_2, b_2]$, et pour toute valeur η telle que $a_2 \leqslant \eta \leqslant b_2$ par $W_2(w; \eta; a_1, b_1)$ celle de la fonction $w(x, \eta)$ par rapport à x dans $[a_1, b_1]$. En désignant par J_1 et J_2 respectivement les intervalles linéaires $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$, nous poserons aussi $W_1(w; \xi; J_2) = W_1(w; \xi; a_2, b_2)$ et $W_2(w; \eta; J_1) = W_2(w; \eta; a_1, b_1)$, en omettant souvent le signe w dans tous ces symboles, lorsque la fonction $w(x, y)$ est fixée.

Par suite de la continuité de la fonction $w(x,y)$, les expressions non négatives $W_1(w; \xi; J_2)$ et $W_2(w; \eta; J_1)$ sont, comme il est facile de voir, des fonctions semicontinues inférieurement des variables ξ et η respectivement, donc mesurables. Par conséquent nous pouvons envisager les intégrales

$$\int_{a_1}^{b_1} W_1(w; \xi; J_2)\, d\xi \quad \textit{et} \quad \int_{a_2}^{b_2} W_2(w; \eta; J_1)\, d\eta .$$

Lorsque ces deux intégrales sont finies, la fonction $w(x, y)$ s'appelle *à variation bornée* dans I au sens de Tonelli.

Cette définition implique aussitôt que toute fonction à variation bornée de deux variables x, y est à variation bornée par rapport à x pour presque toute valeur de y et par rapport à y pour presque toute valeur de x.

Une fonction continue $w(x, y)$ sera dite *absolument continue* dans I au sens de Tonelli, lorsqu'elle y est à variation bornée et lorsque, de plus, elle est absolument continue par rapport à x

pour presque toute valeur de y, de même que par rapport à y pour presque toute valeur de x.

On dit qu'une fonction $w(x, y)$ satisfait dans I à la condition de Lipschitz, s'il existe une constante N telle que l'on ait pour tout couple (ξ', η') et (ξ'', η'') de points de I l'inégalité $|w(\xi', \eta') - w(\xi'', \eta'')| \leqslant N \cdot (|\xi' - \xi''| + |\eta' - \eta''|)$.

Toute fonction $w(x, \eta)$ qui satisfait dans un intervalle I_0 à la condition de Lipschitz est évidemment absolument continue dans I_0. En particulier, les polyèdres (voir la définition p. 101), de même que les fonctions de deux variables aux dérivées partielles continues, sont autant des fonctions absolument continues.

Expressions de Z. de Geöcze.

§ 11. Nous ferons correspondre à toute fonction $w(x, y)$ continue dans un intervalle $I = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ les expressions suivantes, introduites dans le calcul des aires de surfaces par Z. de Geöcze [1]:

$$G_1(w; I) = \int_{a_1}^{b_1} |w(x, b_2) - w(x, a_2)|\, dx, \quad G_2(w; I) = \int_{a_2}^{b_2} |w(b_1, y) - w(a_1, y)|\, dy,$$

$$G(w; I) = \{[G_1(w; I)]^2 + [G_2(w; I)]^2 + |I|^2\}^{\frac{1}{2}};$$

comme d'habitude, nous écrirons aussi tout court $G_1(I)$, $G_2(I)$ et $G(I)$ au lieu de $G_1(w; I)$, $G_2(w; I)$ et $G(w; I)$.

Théorème 8. *Etant donnée dans un intervalle $I_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ une fonction continue $w(x, y)$, ses expressions de de Geöcze $G_1(I)$, $G_2(I)$ et $G(I)$ sont des fonctions continues de l'intervalle $I \subset I_0$ admettant des intégrales déterminées (finies ou infinies) sur I_0 et on a*

$$(11.1) \qquad \int_{I_0} G_1 = \int_{a_1}^{b_1} W_1(x; a_2, b_2)\, dx \quad \textit{et} \quad \int_{I_0} G_2 = \int_{a_2}^{b_2} W_2(y; a_1, b_1)\, dy,$$

$$(11.2) \qquad G_1(I_0) \leqslant \int_{I_0} G_1, \quad G_2(I_0) \leqslant \int_{I_0} G_2 \quad \textit{et} \quad G(I_0) \leqslant \int_{I_0} G,$$

$$(11.3) \qquad \int_{I_0} G_i \leqslant \int_{I_0} G \leqslant \int_{I_0} G_1 + \int_{I_0} G_2 + |I_0| \quad \textit{où } i = 1, 2 .$$

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon > 0$ arbitraire, soit $\eta < \varepsilon$ un nombre positif tel que pour tout couple y_1, y_2 de valeurs de y

$$(11.4) \qquad |y_2 - y_1| < \eta \quad \textit{entraîne} \quad |w(x, y_2) - w(x, y_1)| < \varepsilon.$$

Désignons par M la borne supérieure de $|w(x,y)|$ et considérons dans I_0 un intervalle $I = [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2]$ tel que $|I| < \eta^2$. On a alors $\beta_1 - \alpha_1 < \eta$ ou bien $\beta_2 - \alpha_2 < \eta$. Dans le premier cas il vient $G_1(I) \leqslant (\beta_1 - \alpha_1) \cdot 2M < 2M \cdot \eta \leqslant 2M \cdot \varepsilon$ et dans le second on tire de (11.4) $G_1(I) \leqslant (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \varepsilon \leqslant (b_1 - a_1) \cdot \varepsilon$, de sorte que dans les deux cas l'inégalité $|I| < \eta^2$ entraîne l'inégalité $G_1(I) \leqslant (2M + b_1 - a_1) \cdot \varepsilon$. La fonction $G_1(I)$ est donc continue. Par raison de symétrie il en est de même de $G_2(I)$ et, enfin, la continuité de ces deux fonctions entraîne immédiatement celle de $G(I)$.

Ceci établi, nous allons montrer que les fonctions G_1 et G_2 sont intégrables et, en même temps, déduire les formules (11.1). Soit $\{\mathbf{I}_n\}$ une suite de subdivisions de I_0 telles que l'on ait

$$(11.5) \qquad \lim_n \delta(\mathbf{I}_n) = 0 \quad et \quad \lim_n G_1(\mathbf{I}_n) = \underline{\int_{I_0}} G_1.$$

Désignons pour tout n naturel par $\Phi_n(\xi)$ où $a_1 \leqslant \xi \leqslant b_1$ la somme des accroissements absolus de la fonction $w(\xi, y)$ sur les intervalles linéaires découpés à la droite $x = \xi$ par les rectangles de la division $\mathbf{I}_n$. On a donc d'une part

$$(11.6) \qquad G_1(\mathbf{I}_n) = \int_{a_1}^{b_1} \Phi_n(\xi)\, d\xi \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots$$

et d'autre part, par suite de la continuité de la fonction $w(\xi, y)$, les fonctions $\Phi_n(\xi)$ tendent pour tout ξ avec $n \to \infty$ vers la variation absolue de $w(\xi, y)$ par rapport à y dans l'intervalle $[a_2, b_2]$. Par suite, $\lim_n \Phi_n(\xi) = W_1(\xi; a_2, b_2)$, d'où en vertu du lemme de Fatou (Chap. V, § 4, th. 4) et d'après (11.6) et (11.5)

$$(11.7) \qquad \underline{\int_{I_0}} G_1 \geqslant \int_{a_1}^{b_1} W_1(\xi; a_2, b_2)\, d\xi.$$

Or, pour toute subdivision $\mathbf{I}$ de I_0 on a $G_1(\mathbf{I}) \leqslant \int_{a_1}^{b_1} W_1(\xi; a_2, b_2)\, d\xi$, d'où $\overline{\int_{I_0}} G_1 \leqslant \int_{a_1}^{b_1} W_1(\xi; a_2, b_2)\, d\xi$, ce qui donne avec (11.7) la première des formules (11.1). L'existence de l'intégrale $\int_{I_0} G_2$ et la deuxième de ces formules se déduisent d'une façon symétrique.

Passons à présent à la fonction G. Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_{I_0} G$ existe évidemment dans le cas où une au moins des intégrales $\int_{I_0} G_1$ et $\int_{I_0} G_2$ est infinie et qu'elle est alors aussi infinie en vertu des relations

$$(11.8) \qquad G_1(I) \leqslant G(I) \quad et \quad G_2(I) \leqslant G(I) \quad pour\ tout\ I \subset I_0.$$

Dans l'autre cas, les deux intégrales en question étant finies, l'inégalité évidente $G(I) \leqslant G_1(I) + G_2(I) + |I|$ donne

$$(11.9) \qquad \overline{\int_{I_0}} G \leqslant \int_{I_0} G_1 + \int_{I_0} G_2 + |I_0| < \infty;$$

d'autre part, pour toute division $\mathbf{I}$ d'un intervalle quelconque I situé dans $\mathbf{I}_0$ les inégalités non moins évidentes

$$(11.10) \qquad G_1(I) \leqslant G_1(\mathbf{I}) \quad et \quad G_2(I) \leqslant G_2(\mathbf{I})$$

donnent en vertu de l'inégalité (i), p. 107,

$$(11.11) \qquad G(I) \leqslant G(\mathbf{I}).$$

Or, la continuité de la fonction $G(I)$ étant déjà établie, les formules (11.9) et (11.11) entraînent en vertu du th. 7, p. 106, l'existence de l'intégrale déterminée de cette fonction sur I_0.

Pour achever la démonstration on n'a qu'à remarquer que les formules (11.10) et (11.11), entraînent immédiatement les formules (11.2) et, finalement, que la formule (11.3) résulte aussitôt de (11.8) et (11.9), c. q. f. d.

Comme corollaire du th. 8 ainsi établi, en particulier, comme conséquence des formules (11.1) et (11.3), on a le

Théorème 9. *Pour que la fonction d'intervalle $G(w; I)$, attachée à la fonction continue $w(x,y)$, soit intégrable sur un intervalle I_0 (c. à. d. pour que l'on ait $\int_{I_0} G < \infty$), il faut et il suffit que la fonction $w(x,y)$ soit à variation bornée dans I_0.*

§ 12. Convenons de désigner pour chaque intervalle I (sous réserve d'abréviations habituelles) respectivement par $\Gamma_1(w; I)$, $\Gamma_2(w; I)$ et $\Gamma(w; I)$ les intégrales $\int\limits_I G_1$, $\int\limits_I G_2$ et $\int\limits_I G$ des expressions de de Geöcze correspondant à une fonction continue $w(x, y)$.

Lemme. *Etant donnée une fonction continue $w(x, y)$, ses nombres dérivés partiels de Dini, à savoir $\overline{w}_x^+$, $\overline{w}_x^-$, $\underline{w}_x^+$, $\underline{w}_x^-$ et $\overline{w}_y^+$, $\overline{w}_y^-$, $\underline{w}_y^+$, $\underline{w}_y^-$ sont des fonctions mesurables.*

Démonstration. Il suffit de l'établir pour un quelconque de ces dérivés, p. ex. pour $\overline{w}_x^+$.

Etant donné un a réel arbitraire, considérons l'ensemble $E = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\,[\overline{w}_x^+(x, y) < a]$ et désignons par E_n l'ensemble de tous les points (x, y) satisfaisant à la condition suivante:

$$0 < h \leqslant \frac{1}{n} \text{ entraîne } \frac{w(x+h, y) - w(x, y)}{h} \leqslant a - \frac{1}{n} \text{ pour tout } h \text{ réel.}$$

Il vient $E = \sum\limits_n E_n$ et, chacun des ensembles E_n étant fermé par suite de la continuité de la fonction $w(x, y)$, l'ensemble E est un F_σ, de sorte que le dérivé $\overline{w}_x^+$ est une fonction mesurable.

Théorème 10. *Si une fonction continue $w(x, y)$ est à variation bornée sur I_0, les fonctions correspondantes $\Gamma_1(I)$, $\Gamma_2(I)$ et $\Gamma(I)$ sont des fonctions additives, continues et non négatives de l'intervalle $I \subset I_0$, et on a dans presque tout point (x, y) de I_0 les égalités*

$$(12.1) \qquad \Gamma'_1(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \Gamma'_2(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

et

$$(12.2) \qquad \Gamma'(x, y) = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. L'additivité et la continuité des fonctions en question résultent directement des th. 3, p. 103, 5, p. 104, et 8, p. 109. Il ne s'agit donc que d'établir les relations (12.1) et (12.2).

Or, pour tout rectangle partiel $I = [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2]$ de I_0 on a selon la formule (11.1) du th. 8 et selon le th. 14, Chap. IV, § 4, la relation suivante (où les transformations des intégrales sont effectuées suivant les théorèmes de Fubini et de Tonelli (Chap. IV, § 7, th. 16 et 17), rendus applicables aux dérivées partielles de la fonction continue $w(x, y)$ par le lemme qui précède):

$$\Gamma_1(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} W_1(x; \alpha_2, \beta_2)\, dx \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| dy\right] dx = \iint_I \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| dx\, dy.$$

On a par conséquent

$$(12.3) \qquad \Gamma'_1(x, y) \geqslant \left|\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}\right| \text{ pour presque tout point } (x, y) \text{ de } I_0.$$

D'autre part, en vertu du th. 7, Chap. IV, § 2, on a pour tout sous-intervalle $I = [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2]$ de I_0

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} W_1(x; \alpha_2, \beta_2)\, dx = \Gamma_1(I) \geqslant \iint_I \Gamma'_1(x, y)\, dx\, dy = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \Gamma'_1(x, y)\, dy\right] dx.$$

Soit $\{J_n\}$ la suite des sous-intervalles de $[a_2, b_2]$ aux extrémités rationnelles. Remplaçons dans l'inégalité précédente $[\alpha_2, \beta_2]$ par J_n. On obtient l'inégalité $\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} W_1(x; J_n) \geqslant \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int\limits_{J_n} \Gamma'_1(x, y)\, dy\right] dx$, valable pour tout intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$ situé dans $[a_1, b_1]$. Par conséquent, on a pour presque toute valeur x de $[a_1, b_1]$

$$(12.4) \qquad W_1(x; J_n) \geqslant \int_{J_n} \Gamma'_1(x, y)\, dy.$$

Désignons par E_n l'ensemble des points x de $[a_1, b_1]$ pour lesquels la relation (12.4) est en défaut et posons $E = \sum\limits_n E_n$. L'inégalité $W_1(x; J) \geqslant \int\limits_J \Gamma'_1(x, y)\, dy$ est donc remplie à la fois pour tous les sous-intervalles J de $[a_2, b_2]$ aux extrémités rationnelles et pour chaque point x de $[a_1, b_1]$, excepté les points de E. Si l'on considère maintenant, pour une valeur donnée de x n'appartenant pas à E, les deux membres de cette inégalité comme des fonctions de l'intervalle linéaire J, on en tire par dérivation par rapport à cet intervalle (en vertu du th. 14, Chap. IV, § 4) pour presque toute valeur y de $[a_2, b_2]$ l'inégalité

$$(12.5) \qquad \left|\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}\right| \geqslant \Gamma'_1(x, y).$$

Or, les ensembles E_n et, par conséquent, l'ensemble E sont de mesure linéaire nulle. Donc l'ensemble des points (x,y) de I_0 pour lesquels la relation (12.5) est en défaut est de mesure linéaire nulle sur presque toute droite parallèle à l'axe des y. Mais la fonction $\Gamma'_1(x,y)$, de même que la dérivée partielle $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ (cf. le lemme, p. 112) étant mesurables, il en résulte en vertu du th. de Fubini (voir Chap. IV, § 7, th. 16, ou seulement le lemme 5, p. 73) que l'ensemble des points (x,y) de I_0 où l'inégalité (12.5) est en défaut est de mesure plane nulle. En vertu de (12.3) on a donc presque partout dans I_0 la première des égalités (12.1).

La démonstration qu'il en est de même de la seconde est symétrique.

Enfin, pour montrer qu'il en est encore de même de l'égalité (12.2), il suffit de remarquer que, conformément au th. 6, p. 106, on a presque partout: d'une part, en vertu des relations (12.1),

$$G'_1(x,y) = \Gamma'_1(x,y) = \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| \quad \textit{et} \quad G'_2(x,y) = \Gamma'_2(x,y) = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|,$$

donc aussi

$$G'(x,y) = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}},$$

et d'autre part, $G'(x,y) = \Gamma'(x,y)$.

Théorème 11. *Pour que la fonction d'intervalle $\Gamma(I) = \Gamma(w; I)$ correspondant à une fonction $w(x,y)$, continue et à variation bornée dans un intervalle I_0, soit absolument continue dans cet intervalle, il faut et il suffit que la fonction $w(x,y)$ soit absolument continue.*

Si elle l'est, on a

$$\Gamma(I) = \iint\limits_I \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy. \tag{12.6}$$

Démonstration. En vertu du th. 8 (11.3), p. 109, la continuité absolue de la fonction $\Gamma(I)$ équivaut à la continuité absolue simultanée des fonctions $\Gamma_1(I)$ et $\Gamma_2(I)$.

Or, si la fonction $w(x,y)$ est absolument continue, on a en vertu du théorème 13, Chap. IV, § 4, pour tout sous-intervalle $I = [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2]$ de I_0 les égalités

$$\Gamma_1(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} W_1(x;\, \alpha_2, \beta_2)\, dx = \iint\limits_I \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| dx\, dy$$

et

$$\Gamma_2(I) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} W_2(y;\, \alpha_1, \beta_1)\, dy = \iint\limits_I \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx\, dy,$$

de sorte que les deux fonctions Γ_1 et Γ_2, donc aussi Γ, sont absolument continues.

Réciproquement, si la fonction Γ, donc aussi les fonction Γ_1 et Γ_2, sont absolument continues, on a pour tout intervalle $I_\xi = [a_1, \xi;\, a_2, b_2]$ où $a_1 \leqslant \xi \leqslant b_1$ l'égalité $\int_{a_1}^{\xi} W_1(x;\, a_2, b_2)\, dx = \Gamma_1(I_\xi) = \iint\limits_{I_\xi} \left|\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right| dx\, dy = \int_{a_1}^{\xi} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right| dy\right] dx$, qui par dérivation par rapport à ξ donne pour presque toute valeur de x la relation

$$W_1(x;\, a_2, b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left|\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right| dy. \tag{12.7}$$

Or, pour toute valeur donnée de x (pour laquelle $w(x,\eta)$ est à variation bornée en η) la différence $W_1(x;\, a_2, \eta) - \int_{a_2}^{\eta} \left|\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right| dy$ est une fonction non négative et non décroissante de la variable η (cf. th. 7, Chap. IV, § 2). Il résulte donc de (12.7) qu'on a pour presque toute valeur de x identiquement $W_1(x;\, a_2, \eta) = \int_{a_2}^{\eta} \left|\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right| dy$, c. à d. que la fonction $W_1(x;\, a_2, \eta)$, et par conséquent aussi $w(x,\eta)$, est absolument continue par rapport à η pour presque toute valeur de x. Par un raisonnement symétrique pour $W_2(y;\, a_1, \xi)$ on aboutit à la conclusion que la fonction $w(\xi, y)$ est en même temps absolument continue par rapport à ξ pour presque toute valeur de y. Comme elle est par hypothèse à variation bornée dans I_0, elle y est absolument continue au sens de Tonelli.

Enfin, la formule (12.6) est une conséquence directe du th. 10, notamment de la formule (12.2).

§ 13. Nous avons considéré jusqu'à présent l'expression $\Gamma(w; I)$ comme une fonction d'intervalle. Si on la traite comme une fonctionnelle dépendant de la fonction w, on parvient au théorème suivant, qui trouvera au § 15 son interprétation géométrique.

Théorème 12. *Etant donnée dans un rectangle I_0 une suite quelconque de fonctions continues $\{w_n(x, y)\}$, convergente dans I_0 vers une fonction continue $w(x, y)$, on a*

$$\liminf_n \Gamma(w_n; I_0) \geqslant \Gamma(w; I_0). \tag{13.1}$$

Démonstration. $\mathbf{I}_m$ désignant la division de I_0 en m^2 rectangles égaux, on a en vertu du th. 8 (formule (11.2), p. 109) pour m et n naturels quelconques $\Gamma(w_n; I_0) \geqslant G(w_n; \mathbf{I}_m)$ et en vertu du lemme de Fatou (Chap. V, § 4, th. 4) pour tout m naturel $\liminf_n G(w_n; \mathbf{I}_m) \geqslant G(w; \mathbf{I}_m)$. On a donc $\liminf_n \Gamma(w_n; I_0) \geqslant G(w; \mathbf{I}_m)$, ce qui entraîne la formule (13.1) par le passage à la limite avec $m \to \infty$.

Théorème de Radò.

§ 14. Nous pouvons passer à présent à la démonstration du th. de Radò, d'après lequel l'aire d'une surface quelconque $z = w(x, y)$ est égale à la valeur correspondante de l'expression Γ.

Observons d'abord que pour les polyèdres élémentaires c'est une conséquence immédiate des théorèmes qui viennent d'être établis. En effet, tout polyèdre $z = p(x, y)$ étant (cf. p. 109) une fonction absolument continue dans l'intervalle (le rectangle) I_0 où il est défini, on a d'après le th. 11, p. 114, et d'après la formule (2.3), p. 101:

$$\Gamma(p; I_0) = \iint_{I_0} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy = |p|. \tag{14.1}$$

Théorème 13. *Si une fonction continue $w(x, y)$ possède dans un rectangle $I_0 = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ les dérivées partielles continues, il existe une suite de polyèdres $\{z = p_n(x, y)\}$ inscrits dans la surface $z = w(x, y)$, convergents uniformément vers cette surface et tels que*

$$\lim_n |p_n| = \iint_{I_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy. \tag{14.2}$$

Démonstration. Désignons par $\mathbf{I}_n = \{I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,n^2}\}$ la subdivision de I_0 en n^2 intervalles égaux et par $(x_{n,i}, y_{n,i})$ où $i = 1, 2, \ldots, n^2$ le sommet inférieur gauche de $I_{n,i}$. Partageons tout intervalle $I_{n,i}$ à l'aide d'une diagonale en deux triangles rectangles $T'_{n,i}$ et $T''_{n,i}$ de façon que le sommet $(x_{n,i}, y_{n,i})$ soit celui de l'angle droit de $T'_{n,i}$. Considérons pour tout n le polyèdre $z = p_n(x, y)$ inscrit dans la surface $z = w(x, y)$ et correspondant au réseau formé dans I_0 par les $2n^2$ triangles $T'_{n,i}$ et $T''_{n,i}$ où $i = 1, 2, \ldots, n^2$.

Ceci dit, posons pour abréger

$$h_n = \frac{b_1 - a_1}{n} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{b_2 - a_2}{n}$$

et désignons par μ_n la borne supérieure des différences

$$|w'_x(x'', y'') - w'_x(x', y')| \quad \text{et} \quad |w'_y(x'', y'') - w'_y(x', y')|$$

prises pour tous les points (x', y') et (x'', y'') de I_0 tels que $|x'' - x'| \leqslant h_n$ et $|y'' - y'| \leqslant k_n$.

Or, $\Delta'_{n,i}$ et $\Delta''_{n,i}$ désignant respectivement les faces du polyèdre $z = p_n(x, y)$ qui viennent correspondre aux triangles $T'_{n,i}$ et $T''_{n,i}$, on constate aussitôt que les aires des projections de la face $\Delta'_{n,i}$ sur les plans xz et yz sont égales respectivement à

$$\frac{1}{2} h_n \cdot [w(x_{n,i}, y_{n,i} + k_n) - w(x_{n,i}, y_{n,i})] = \frac{1}{2} h_n k_n \cdot w'_y(x_{n,i}, y'_{n,i})$$

et

$$\frac{1}{2} k_n \cdot [w(x_{n,i} + h_n, y_{n,i}) - w(x_{n,i}, y_{n,i})] = \frac{1}{2} h_n k_n \cdot w'_x(x'_{n,i}, y_{n,i})$$

où

$$x_{n,i} \leqslant x'_{n,i} \leqslant x_{n,i} + h_n \quad \text{et} \quad y_{n,i} \leqslant y'_{n,i} \leqslant y_{n,i} + k_n.$$

On a donc $|\Delta'_{n,i}| = \frac{1}{2} \{[w'_x(x'_{n,i}, y_{n,i})]^2 + [w'_y(x_{n,i}, y'_{n,i})]^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} \cdot |I_{n,i}|$,

ce qui conduit en vertu de l'inégalité (i), p. 107, à l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^{n^2} |\Delta'_{n,i}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^2} \{[w'_x(x_{n,i}, y_{n,i})]^2 + [w'_y(x_{n,i}, y_{n,i})]^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} \cdot |I_{n,i}| \right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \mu_n \cdot |I_0|.$$

Remarquons que dans le membre gauche de cette inégalité le polynôme en dérivées partielles, qui sont continues par hypothèse, converge vers l'intégrale de la fonction $[(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}$ et que le produit figurant au membre droit tend vers 0 avec $n \to \infty$.

On a donc $\lim_n \sum_{i=1}^{n^2} |\Delta'_{n,i}| = \frac{1}{2} \iint_{I_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$ et la même limite s'obtient évidemment pour la somme des aires des faces $\Delta''_{n,i}$. Par l'addition on en tire la formule (14. 2), q. f. d.

Théorème 14 (de Radò). *On a pour toute fonction continue $w(x, y)$ définie dans un rectangle I_0 l'égalité $L(w; I_0) = \Gamma(w; I_0)$.*

Démonstration. Soit $\{p_n(x, y)\}$ une suite de polyèdres convergeant dans I_0 vers $w(x, y)$ et tels que $\lim_n |p_n| = L(w; I_0)$. On a par conséquent selon la formule (14. 1) et en vertu du th. 12 $L(w; I_0) = \lim_n \Gamma(p_n; I_0) \geqslant \Gamma(w; I_0)$. Il ne reste donc à établir que l'inégalité inverse $L(w; I_0) \leqslant \Gamma(w; I_0)$.

Cette inégalité étant évidente dans le cas où la fonction w n'est pas à variation bornée dans I_0 (puisqu'on a alors, en vertu du th. 9, p. 111, $\Gamma(w; I_0) = +\infty$), nous pouvons admettre que la fonction w est dans I_0 à variation bornée et même qu'elle l'est dans un rectangle J_0 contenant I_0 dans son intérieur.

Soient, en effet, I'_0 et I''_0 les rectangles égaux à I_0 et adjacents à I_0 suivant les côtés parallèles à l'axe des x. La fonction $w(x, y)$ peut être évidemment prolongée, sans cesser d'être continue et à variation bornée, sur I'_0 et I''_0 par les transformations symétriques relativement à leurs côtés communs avec I_0. On n'a donc qu'à repéter la même méthode, en l'appliquant au rectangle $I'_0 + I_0 + I''_0$ et aux rectangles J'_0 et J''_0 adjacents à lui suivant les côtés parallèles à l'axe des y, et de poser finalement $J_0 = J'_0 + I'_0 + I_0 + I''_0 + J''_0$.

Considérons à présent la suite des fonctions

$$w_n(x, y) = n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} w(x + u, y + v)\, du\, dv\, .$$

On voit aussitôt que ces fonctions (dites *moyennes intégrales* de la fonction $w(x, y)$) se trouvent définies partout dans l'intervalle I_0 pour toutes les valeurs suffisamment grandes de l'indice n, car à partir d'un n assez élevé les carrés $[x, x + n^{-1}; y, y + n^{-1}]$ sont sûrement situés dans J_0, quel que soit le point $(x, y) \in I_0$.

Les fonctions w_n possèdent dans I_0, par suite de la continuité de la fonction w, les deux propriétés suivantes: *elles convergent uniformément vers la fonction w* et *elles admettent partout des dérivées partielles continues*, puisqu'on a pour tout (x, y) de I_0

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} [w(x + n^{-1}, y + v) - w(x, y + v)]\, dv$$

et

$$\frac{\partial w_n}{\partial y} = n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} [w(x + u, y + n^{-1}) - w(x + u, y)]\, du\, .$$

La première de ces propriétés entraîne en vertu du th. 1, p. 102,

$$(14.3) \qquad L(w; I_0) \leqslant \liminf_n L(w_n; I_0)$$

et la seconde implique selon les théorèmes 13 et 11 que l'on a $L(w_n; I_0) \leqslant \iint_{I_0} \left[\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy = \Gamma(w_n; I_0)$, d'où en raison de (14. 3)

$$(14.4) \qquad L(w; I_0) \leqslant \liminf_n \Gamma(w_n; I_0)\, .$$

Ceci établi, convenons de désigner d'une façon générale par $I^{(u,v)}$ l'intervalle s'obtenant de I par la translation parallèle $x' = x + u, y' = y + v$ et par $\mathbf{I}^{(u,v)}$ la famille d'intervalles qui s'obtient d'une famille $\mathbf{I}$, en soumettant à la fois tous les intervalles de $\mathbf{I}$ à cette translation.

Or, pour tout sous-intervalle $I = [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2]$ de I_0 on obtient alors la formule $G_1(w_n; I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |w_n(x, \beta_2) - w_n(x, \alpha_2)|\, dx \leqslant$ $\leqslant n^2 \cdot \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} |w(x + u, \beta_2 + v) - w(x + u, \alpha_2 + v)|\, du\, dv\right] dx =$ $= n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} G_1(w; I^{(u,v)})\, du\, dv$ et une formule analogue pour G_2, d'où selon (ii), p. 107, $G(w_n; I) = \{[G_1(w_n; I)]^2 + [G_2(w_n; I)]^2 + |I|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$ $\leqslant n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \{[G_1(w; I^{(u,v)})]^2 + [G_2(w; I^{(u,v)})]^2 + |I^{(u,v)}|^2\}^{\frac{1}{2}} =$ $= n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} G(w; I^{(u,v)})\, du\, dv.$ En désignant par $\mathbf{I}_m$ la subdivision de I_0 en m^2 rectangles égaux, on obtient donc pour tout m

$$G(w_n;\ \mathbf{I}_m) \leqslant n^2 \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} G(w;\ \mathbf{I}_m^{(u,v)})\, du\, dv. \tag{14.5}$$

Comme on a en vertu du lemme, p. 104, uniformément en u, v $\lim\limits_m G(w;\ \mathbf{I}_m^{(u,v)}) = \Gamma(w;\ I_0^{(u,v)})$, nous pouvons effectuer sur les deux membres de l'inégalité (14.5) le passage à la limite avec $m \to \infty$, ce qui donne

$$\Gamma(w_n;\ I_0) \leqslant n^2 \cdot \int_0^{n^{-1}} \int_0^{n^{-1}} \Gamma(w;\ I_0^{(u,v)})\, du\, dv. \tag{14.6}$$

Enfin, on voit aisément que les aires des figures $I_0^{(u,v)} \ominus I_0$ et $I_0 \ominus I_0^{(u,v)}$ tendent vers 0 avec u, v et que chacune de ces figures est une somme de deux rectangles. Il en résulte, l'expression $\Gamma(w;\ I)$ étant en vertu du th. 10, p. 112, une fonction continue de l'intervalle I, que $\lim\limits_{u\to 0,\, v\to 0} \Gamma(w;\ I_0^{(u,v)}) = \Gamma(w;\ I_0)$, d'où en vertu de (14.4) et (14.6) l'inégalité $L(w;\ I_0) \leqslant \liminf\limits_n \Gamma(w_n;\ I_0) \leqslant \Gamma(w;\ I_0)$, c. q. f. d.

Théorème de Tonelli.

§ 15. Le th. de Radò, qui vient d'être établi, permet de remplacer dans les théorèmes 10—12 des §§ 12—14 l'expression $\Gamma(w;\ I)$ par l'aire de surface $L(w;\ I)$ et de saisir de la sorte la signification géométrique de ces théorèmes.

Ainsi p. ex. la formule (14.1), p. 116, exprime le fait que *l'aire élémentaire d'un polyèdre coïncide avec son aire entendue dans le sens de la définition générale de l'aire d'une surface.*

Le th. 12, p. 116, contient une généralisation du th. 1, p. 102; il permet de remplacer dans son énoncé la convergence uniforme par la convergence ordinaire: on obtient ainsi un théorème analogue au lemme de Fatou (cf. Chap. V, § 4, th. 4). Il en résulte que la convergence uniforme des polyèdres inscrits, exigée dans la définition de l'aire, peut être également remplacée par la convergence ordinaire, de sorte que *l'aire d'une surface continue $z = w(x,y)$ est la limite inférieure des aires des polyèdres tendant vers cette surface.*

Enfin, moyennant une interprétation des théorèmes 10 et 11 du § 12 à l'aide du th. de Radò, on obtient pour les surfaces de la forme $z = w(x,y)$ l'énoncé suivant, dont l'analogie avec les th. 8, 9 et 10, Chap. III, § 8, et le th. 18, Chap. IV, § 8, est évidente.

Théorème 15 (de Tonelli). a) *Pour qu'une surface continue $z = w(x,y)$ définie dans un rectangle I_0 ait une aire finie, il faut et il suffit que la fonction $w(x,y)$ soit à variation bornée dans I_0.*

b) *Si elle l'est, on a*

$$L(w;\ I_0) \geqslant \iint\limits_{I_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy; \tag{15.1}$$

l'expression $L(w;\ I)$ est alors une fonction additive et continue de l'intervalle $I \subset I_0$ et on a pour presque tout point $(x,y) \in I_0$

$$L'(x,y) = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{15.2}$$

c) *Pour que l'on ait l'égalité*

$$L(w;\ I_0) = \iint\limits_{I_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy, \tag{15.3}$$

il faut et il suffit que la fonction $w(x,y)$ soit absolument continue dans I_0; pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que l'aire $L(w;\ I)$ soit une fonction absolument continue de l'intervalle $I \subset I_0$.

Démonstration. L'énoncé a) résulte directement du th. 9, p. 111; b) et c) résultent des th. 10 et 11, p. 112 et 114, en vertu du th. 7, Chap. IV, § 2.

Au sujet du th. 15 voir L. Tonelli [6; 7]. La nécessité de la condition de a) a été établie un peu plus tôt par G. Lampariello [1]. Pour b) cf. aussi S. Saks [4].

La formule (15.3) de c) permet d'énoncer le th. 13, p. 116, dans la forme suivante.

Si une fonction $w(x,y)$ possède les dérivées partielles continues, il existe une suite de polyèdres inscrits dans la surface $z = w(x,y)$, tendant uniformément vers elle et dont les aires convergent vers l'aire de cette surface [1]).

La question si ce théorème se laisse étendre aux classes plus générales de fonctions, p. ex. aux fonctions absolument continues, reste probablement ouverte. Ce problème a été soulevé par M. T. Radò [5].

---

[1]) Pour des résultats plus précis voir H. Rademacher [3], W. H. Young [4], M. Fréchet [2] et T. Radò [5].