CHAPITRE V.

Intégrale de Lebesgue

(définition géométrique).

Image et aire d'une fonction.

§ 1. La définition géométrique [1]) de l'intégrale, donnée également par Lebesgue, s'inspire de l'idée à la fois la plus ancienne et la plus naturelle de l'intégrale, où celle-ci est entendue comme la mesure d'une „aire" attachée à la fonction d'une certaine manière bien connue.

Commençons par fixer la terminologie. Etant donnés un point $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace $\mathbf{R}_n$ et un nombre réel y, nous désignerons par (x, y) le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ de l'espace $\mathbf{R}_{n+1}$. Soit $y=f(x)$ une fonction de point définie dans un ensemble $E \subset \mathbf{R}_n$. Nous entendrons par *image* de $f(x)$ sur E l'ensemble $T(f; E)$ de tous les points $(x, f(x))$ de $\mathbf{R}_{n+1}$ où $x \in E$ et $f(x) \neq \infty$. Nous appellerons respectivement *aire supérieure* et *inférieure* de $f(x)$ sur E l'ensemble $\overset{*}{A}(f; E)$ de tous les points (x, y) où $x \in E$ et $0 \leqslant y \leqslant \overset{*}{f}(x)$, et l'ensemble $\underset{*}{A}(f; E)$ de tous ceux où $x \in E$ et $0 \geqslant y \geqslant \underset{*}{f}(x)$, les astérisques étant entendus au sens du Chap. IV, § 4, p. 65.

Dans le cas d'une fonction f de signe constant, son aire supérieure, lorsque f est non négative, et son aire inférieure, lorsque f est non positive, s'appellera *aire* tout court et sera désignée par $A(f; E)$. Il est évident que, quelle que soit la fonction f, on a toujours

$$\overset{*}{A}(f; E) = A(\overset{*}{f}; E) \quad \text{et} \quad \underset{*}{A}(f; E) = A(\underset{*}{f}; E).$$

[1]) Un exposé systématique de la Théorie de l'intégrale lebesguienne, basé sur la définition géométrique de cette intégrale, se trouve dans le livre de M. C. Carathéodory [I, Chap. VIII].

Les images et les aires des fonctions définies dans l'espace $\mathbf{R}_n$ ou dans un ensemble $E \subset \mathbf{R}_n$ sont donc, par définition, des ensembles situés dans $\mathbf{R}_{n+1}$. En cas de doute sur l'espace dont il est question, et par conséquent sur la mesure qu'il y a à considérer, nous désignerons la mesure de l'ensemble E dans $\mathbf{R}_n$ par $m_n(E)$.

Excepté le th. 7, p. 86, qui par sa nature même concerne exclusivement les fonctions d'*une* variable réelle, tous les autres théorèmes de ce chapitre subsistent dans tout $\mathbf{R}_n$ où $n \geqslant 1$. Toutefois, pour simplifier le langage, nous les énoncerons aux §§ 2—6 pour $\mathbf{R}_1$ et aux §§ 7 — 9, consacrés à l'intégrale de Stieltjes, pour $\mathbf{R}_2$.

§ 2. **Lemme 1.** *Etant donnés un ensemble linéaire quelconque E et l'ensemble plan E_v composé de tous les points (x, y) tels que $x \in E$ et $0 \leqslant y \leqslant v$, la mesurabilité plane de E_v est, quel que soit $v > 0$, équivalente à la mesurabilité linéaire de E et on a dans ce cas*

$$m_2(E_v) = v \cdot m_1(E). \tag{2.1}$$

Démonstration. Tout ensemble étant somme d'une suite non décroissante d'ensembles bornés, nous pouvons admettre que E soit un ensemble borné, donc compris p. ex. dans l'intervalle $I=[0, a]$, et, en conséquence, que E_v est situé dans le rectangle $Q=[0, a; 0, v]$.

Or, si E_v est mesurable dans le plan, on a en vertu du th. de Fubini (v. Chap. IV, § 7; d'ailleurs seul le lemme 5, p. 73, suffit ici):

$$m_2(E_v) = \iint_Q c_{E_v}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^v \left[\int_0^a c_{E_v}(x, y)\, dx\right] dy, \tag{2.2}$$

la fonction $c_{E_v}(x, y)$ étant mesurable par rapport à x sur presque toutes les droites parallèles à l'axe des x. Mais, dans le rectangle Q tout entier, on a évidemment $c_{E_v}(x, y) = c_E(x)$; par conséquent la fonction $c_E(x)$ est mesurable par rapport à x, c. à d. que l'ensemble E est linéairement mesurable.

En même temps on a en vertu de la relation (2.2) l'égalité

$$m_2(E_v) = \int_0^v \left[\int_0^a c_E(x)\, dx\right] dy = \int_0^v m_1(E)\, dy = v \cdot m_1(E).$$

Reste donc à montrer que, réciproquement, si E est mesurable, il en est de même de E_v. En effet, tout E mesurable se laisse représenter selon le th. 11, Chap. II, § 6, sous la forme $E=\sum_i F_i+H$, où F_i sont des ensembles fermés et H est un ensemble de mesure linéaire nulle. En désignant par $(F_i)_v$ et par H_v les ensembles des points $(x,y)\in E_v$ où l'on a respectivement $x\in F_i$ et $x\in H$, on a donc $E_v=\sum_i (F_i)_v+H_v$. Les ensembles $(F_i)_v$ étant évidemment fermés et H_v un ensemble de mesure plane nulle, on conclut donc que l'ensemble E_v est mesurable dans le plan, c. q. f. d.

Théorème 1. *L'image de toute fonction mesurable $f(x)$ définie dans un ensemble mesurable E est de mesure plane nulle.*

Démonstration. Tout ensemble mesurable se laissant représenter comme somme d'une suite d'ensembles mesurables bornés, nous pouvons nous restreindre au cas où E est borné.

Or, pour tout $\varepsilon>0$ les ensembles $E_n=E\cdot \underset{x}{\mathrm{E}}[n\cdot\varepsilon\leqslant f(x)<(n+1)\cdot\varepsilon]$ où $n=0,\pm1,\ldots$ sont évidemment mesurables (puisque $f(x)$ est mesurable dans E) et, selon le lemme 1 on a pour l'image $T(f;E)$: $m_2[T(f;E)]\leqslant\sum_{n=-\infty}^{+\infty}m_2[T(f;E_n)]\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}m_1(E_n)\leqslant\varepsilon\cdot m_1(E)$. Il en résulte, $m_1(E)$ étant par hypothèse fini, que $m_2[T(f;E)]=0$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Etant donnée une fonction $f(x)$ mesurable, finie, non négative et n'admettant dans une figure R qu'un nombre fini des valeurs différentes, l'aire $A(f;R)$ de $f(x)$ est un ensemble mesurable et on a*

$$m_2[A(f;R)]=\int_R f(x)\,dx.$$

Démonstration. Soient v_i où $1\leqslant i\leqslant n$ les valeurs de $f(x)$ respectivement dans les sous-ensembles E_i de R. Or, on a en vertu du lemme 1 l'égalité $m_2[A(f;R)]=\sum_{i=1}^{n}m_2[A(f;E_i)]=\sum_{i=1}^{n}v_i\cdot m_1(E_i)$ et en vertu du th. 9, Chap. IV, § 3, l'égalité $\int_R f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}v_i\cdot m_1(E_i)$, d'où l'égalité à démontrer.

Théorème 2. *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit mesurable dans un ensemble mesurable E, il faut et il suffit que ses deux aires $\overset{*}{A}(f;E)$ et $\underset{*}{A}(f;E)$ soient mesurables.*

Démonstration. Toute fonction étant la somme de ses parties non négative et non positive (v. Chap. IV, § 4, p. 66), il suffit évidemment d'envisager le cas où $f(x)$ est une fonction non négative.

Or, si l'aire $A(f;E)$ est mesurable, elle est d'après le th. de Fubini (d'ailleurs déjà selon le lemme 5, p. 73), mesurable sur presque toute droite parallèle à l'axe des abscisses, c. à d. que pour presque toutes les valeurs de ξ l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in E, f(x)\geqslant\xi]$ est mesurable linéairement. Par conséquent, il existe pour tout a réel une suite décroissante des nombres $\{\xi_n\}$ tendant vers a et telle que les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in E; f(x)\geqslant\xi_n]$ où $n=1,2,\ldots$ sont linéairement mesurables. Il en est donc de même de l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in E; f(x)>a]=\sum_n\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in E; f(x)\geqslant\xi_n]$, et comme il en est ainsi pour tout a, la fonction $f(x)$ est mesurable dans E.

Réciproquement, si la fonction non négative $f(x)$ est mesurable dans E, elle est en vertu du th. 20, Chap. II, § 9, limite d'une suite non décroissante $\{f_n(x)\}$ de fonctions mesurables, non négatives, finies et ne prenant dans E qu'un nombre fini des valeurs. On a alors $A(f;E)=\sum_n A(f_n;E)+T(f;E)$ et, comme en vertu du lemme 2 les aires $A(f_n;E)$ sont mesurables, en même temps qu'en vertu du th. 1 l'image $T(f;E)$ est de mesure nulle, l'aire $A(f;E)$ est mesurable, c. q. f. d.

Théorème 3. *Pour toute fonction $f(x)$ sommable sur une figure R on a*

$$\int_R f(x)\,dx=m_2[\overset{*}{A}(f;R)]-m_2[\underset{*}{A}(f;R)].$$

Pour qu'une fonction $f(x)$ mesurable dans R soit sommable sur cette figure, il faut et il suffit que ses deux aires $\overset{*}{A}(f;R)$ et $\underset{*}{A}(f;R)$ aient des mesures finies.

Démonstration. Evidemment, il suffit encore de se borner au cas de la fonction $f(x)$ non négative. $\{f_n(x)\}$ étant une suite non décroissante de fonctions mesurables, non négatives, ne prenant qu'un nombre fini des valeurs et telles que $f(x)=\lim_n f_n(x)$ pour tout point $x\in R$ (cf. th. 20, Chap. II, § 9), on a la relation $A(f;R)=\sum_n A(f_n;R)+T(f;R)$, d'où en vertu du lemme 2

$$m_2[A\,(f;\,R)] = \lim_n m_2[A\,(f_n;\,R)] = \lim_n \int_R f_n(x)\,dx\,. \tag{2.3}$$

Or, si l'aire $A\,(f;\,R)$ est de mesure finie, le th. de Lebesgue sur l'intégration des suites monotones de fonctions (cf. th. 6, Chap. IV, § 2) implique en vertu de (2.3) que la fonction-limite $f(x)$ est sommable et que $m_2[A\,(f;\,R)] = \int_R f\,(x)\,dx$.

Réciproquement, si $f\,(x)$ est sommable sur R, les intégrales $\int_R f_n\,dx$ forment une suite bornée par $\int_R f\,dx$ et alors, en vertu de (2.3), l'aire $A\,(f;\,R)$ est de mesure finie.

Définition géométrique de l'intégrale.

§ 3. Les th. 2 et 3, permettent de généraliser la définition de l'intégrale de Lebesgue comme il suit.

Une fonction $f\,(x)$ définie presque partout dans un ensemble mesurable E sera dite *sommable* sur E, lorsque ses deux aires $\overset{*}{A}\,(f;E)$ et $\underset{*}{A}\,(f;E)$ sont mesurables et de mesure finie. Par l'*intégrale* $\int_E f\,(x)\,dx$ nous entendrons alors la différence $m\,[\overset{*}{A}\,(f;E)] - m\,[\underset{*}{A}\,(f;E)]$.

Nous négligeons donc dans cette définition le mode dont se comporte la fonction $f\,(x)$ dans un sous-ensemble de E de mesure nulle, puisque ce dernier est évidemment sans aucun effet sur la mesurabilité des aires de $f\,(x)$ et sur la valeur de leur mesure.

Par suite des th. 2 et 3, la nouvelle définition est, dans le cas où E est une figure, équivalente à la définition donnée au Chap. IV, § 1. Or, l'intégrale considérée sur des ensembles mesurables quelconques peut être ramenée également à celle considérée sur des figures élémentaires, donc à l'intégrale qui est donnée aussi bien par la définition géométrique de tout à l'heure que par la définition descriptive du Chap. IV, § 1. Notamment, on aperçoit aussitôt que, *$f\,(x)$ étant une fonction sommable sur un ensemble E et $g\,(x)$ la fonction définie par les conditions*

$$g\,(x) = \begin{cases} f\,(x) & \text{pour} \quad x \in E \\ 0 & \text{pour} \quad x \in CE, \end{cases}$$

on a sur toute figure R

$$\int_R g\,dx = \int_{E\cdot R} f\,dx\,,$$

donc en particulier pour $R \supset E$

$$\int_R g\,dx = \int_E f\,dx\,;$$

réciproquement, *si E est borné, la sommabilité de f sur E équivaut à celle de g sur toute figure $R \supset E$.*

Cet énoncé permet d'étendre immédiatement les propriétés de l'intégrale établies au Chap. IV à l'intégrale lebesguienne générale, définie sur des ensembles mesurables arbitraires.

Dans le cas des fonctions non négatives il est commode d'élargir la notion d'intégrale définie, de façon à embrasser aussi les fonctions non sommables. Nous admettrons notamment pour toute fonction f mesurable, non négative et non sommable dans un ensemble mesurable E que $\int_E f\,(x)\,dx = +\infty$. Cette extension formelle de la notion d'intégrale définie permet de maintenir l'égalité

$$\int_E f\,(x)\,dx = m\,[A\,(f;\,E)\,] \tag{3.1}$$

pour toutes les fonctions f mesurables non négatives dans un ensemble mesurable E quelconque. L'extension parallèle du th. de Lebesgue concernant l'intégration des suites monotones de fonctions donne le théorème suivant, qui résulte des propriétés générales de la mesure lebesguienne (v. Chap. II, § 5, th. 9) par l'application du th. 1, p. 80, et de la formule (3.1):

Si $\{f_n(x)\}$ est une suite non décroissante de fonctions mesurables et non négatives dans un ensemble mesurable E et si l'on a $f\,(x) = \lim_n f_n(x)$, alors

$$\int_E f\,dx = \lim_n \int_E f_n\,dx\,. \tag{3.2}$$

Parmi les autres conséquences de la définition géométrique de l'intégrale sont à noter les suivantes:

(3.3) *Toute fonction est sommable sur chaque ensemble de mesure nulle et son intégrale sur lui est nulle.*

(3.4) *Toute fonction sommable sur un ensemble mesurable E l'est aussi sur tout sous-ensemble mesurable de E.*

(3.5) *Etant donnée une fonction f sommable dans un ensemble E qui est somme d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles mesurables disjoints* $\{E_n\}$, *on a* $\int_E f(x)\,dx = \sum_n \int_{E_n} f(x)\,dx$.

La définition géométrique, plus que les autres, met en évidence le dégré de généralité de l'intégrale de Lebesgue. Pour qu'une fonction soit sommable, il faut: 1⁰ qu'elle remplisse une condition (d'ailleurs très générale) de régularité, à savoir qu'elle soit mesurable, 2⁰ qu'elle ne soit pas „trop grande", c. à d. que ses aires soient de mesure finie.

Les généralisations de l'intégrale lebesguienne ne nous conduisent pas au delà de 1⁰, mais élargissent essentiellement la condition 2⁰, en permettant d'intégrer certaines fonctions dont les deux aires sont de mesure infinie.

La méthode d'intégration de Lebesgue peut être comparée à une méthode de sommation des séries numériques qui consisterait à en effectuer séparément la sommation des termes positifs et celle des termes négatifs, et qui serait ainsi restreinte, par sa nature même, aux séries absolument convergentes.

Intégration des suites de fonctions.

§ 4. Nous allons établir à présent deux théorèmes simples, mais importants, qui concernent spécialement l'intégration des suites de fonctions.

Le premier de ces théorèmes est connu sous le nom du *lemme de* Fatou, car pour la première fois (d'ailleurs sous une forme un peu moins générale) on le trouve dans le Mémoire classique de P. Fatou [1, p. 375] sur les séries trigonométriques. Le second, dû à M. Lebesgue [5, en particulier p. 375] et portant le nom du *théorème sur l'intégration terme à terme des suites de fonctions,* constitue d'après M. de la Vallée Poussin [I, p. 44] „un des plus beaux résultats de la théorie"; cf. aussi Ch. J. De la Vallée Poussin [1, p. 445—453], R. L. Jeffery [1] et T. H. Hildebrandt [2].

Théorème 4 (lemme de Fatou). *Etant donnée une suite quelconque* $\{f_n(x)\}$ *de fonctions non négatives et mesurables dans un ensemble mesurable E on a*

$$\int_E \liminf_n f_n(x)\,dx \leqslant \liminf_n \int_E f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Posons $g_i(x) = \text{borne inf}\,[f_i(x), f_{i+1}(x), f_{i+2}(x), \ldots]$ où $i = 1, 2, \ldots$ Ainsi définie, $\{g_i(x)\}$ est une suite non décroissante de fonctions non négatives et mesurables dans E, convergente

dans cet ensemble vers $\liminf_i f_i(x)$. On a donc d'après le th. de Lebesgue (voir (3.2), p. 83):

$$\int_E \liminf_i f_i(x)\,dx = \lim_i \int_E g_i(x)\,dx \leqslant \liminf_i \int_E f_i(x)\,dx.$$

Théorème 5 (de Lebesgue *sur l'intégration terme à terme*). *Etant donnée une suite* $\{f_n(x)\}$ *de fonctions mesurables dans un ensemble mesurable E et qui remplissent pour une fonction* $\varphi(x)$ *sommable sur E l'inégalité*

(4.3) $\quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ *presque partout pour* $n = 1, 2, \ldots,$

on a

$$(4.4)\qquad \liminf_n \int_E f_n\,dx \geqslant \int_E \liminf_n f_n\,dx, \qquad \limsup_n \int_E f_n\,dx \leqslant \int_E \limsup_n f_n\,dx.$$

Lorsque, en outre la suite $\{f_n\}$ *converge dans E presque partout vers une fonction f, cette suite est intégrable terme à terme, c. à d. qu'on a*

$$(4.5)\qquad \lim_n \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx.$$

Démonstration. Posons $g(x) = \liminf_n f_n(x)$ et $h(x) = \limsup_n f_n(x)$. Nous pouvons admettre évidemment que l'inégalité (4.3) est remplie partout dans E. On obtient alors du lemme de Fatou (th. 4, p. 84), $\liminf_n \int_E (\varphi + f_n)\,dx \geqslant \int_E (\varphi + g)\,dx$ et $\liminf_n \int_E (\varphi - f_n)\,dx \geqslant \int_E (\varphi - h)\,dx$, ce qui donne aussitôt les relations (4.4).

En outre, si on a presque partout $\lim_n f_n(x) = f(x)$, on tire de (4.4) la relation $\liminf_n \int_E f_n\,dx \geqslant \int_E f\,dx \geqslant \limsup_n \int_E f_n\,dx$, d'où l'égalité (4.5), c. q. f. d.

Théorème de la moyenne.

§ 5. Les deux théorèmes sur l'intégrale lebesguienne, qui vont suivre, relèvent de l'Analyse classique, où on les démontre pour les intégrales de Cauchy et de Riemann. Importants par leurs nombreuses applications dans diverses branches de l'Analyse, ils sont connus sous le nom des théorèmes ou des formules *de la moyenne*. Le premier de ces théorèmes [1]) est presque évident; le second est d'une nature un peu plus délicate et ne concerne que les fonctions d'une variable.

Théorème 6 *(I-er th. de la moyenne). Etant données dans un intervalle $I=[a,b]$ deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, dont $f(x)$ est bornée et $g(x)$ est presque partout non négative, si $f(x)$ et $g(x)$ sont sommables sur I, il en est de même de $f(x)\cdot g(x)$ et il existe un nombre μ compris entre les bornes des valeurs de $f(x)$ dans I tel que l'on a*

$$(5.1)\qquad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. En vertu du corollaire, p. 66, la fonction $f(x)\cdot g(x)$ est sommable dans I comme produit d'une fonction sommable et d'une fonction mesurable bornée. En désignant respectivement par M et m les bornes de $f(x)$ dans I, on a donc $m\cdot\int_a^b g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\leqslant M\cdot\int_a^b g(x)\,dx$, d'où, en posant $\mu=\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right]:\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$, on a en même temps $m\leqslant\mu\leqslant M$, c. q. f. d.

Théorème 7 *(II-me th. de la moyenne). Etant données dans l'intervalle $I=[a,b]$ deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, dont $f(x)$ est sommable et $g(x)$ finie et non décroissante dans I, la fonction $f(x)\cdot g(x)$ est sommable dans I et il existe un point $\xi\in I$ tel que*

$$(5.2)\qquad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Nous allons l'établir d'abord pour le cas particulier où la fonction $g(x)$ est en outre *absolument continue* dans I.

[1]) Plus loin (§ 7, th. 14) nous en donnerons une généralisation pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes.

Posons $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. En vertu du th. sur l'intégration par parties (th. 15, Chap. IV, § 5) on a donc

$$(5.3)\qquad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=F(b)\cdot g(b)-\int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx.$$

Or, la dérivée $g'(x)$ étant non négative, on a suivant le I-er th. de la moyenne $\int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx=\mu\cdot\int_a^b g'(x)\,dx=\mu\cdot[g(b)-g(a)]$ où μ est compris entre les bornes de $f(x)$ dans I. Par suite de la continuité de $F(x)$, il existe donc dans I un point ξ tel que $\mu=F(\xi)$, d'où selon (5.3), $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=F(b)\cdot g(b)-F(\xi)\cdot[g(b)-g(a)]=$ $=g(a)\cdot F(\xi)+g(b)\cdot[F(b)-F(\xi)]=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\,dx$, c. à d. la formule (5.2).

Ceci établi, passons au cas général. Soit pour tout n naturel $g_n(x)$ une fonction qui est linéaire dans chacun des intervalles $\left[a+i\cdot\frac{b-a}{n},\ a+(i+1)\cdot\frac{b-a}{n}\right]$ pour $i=0,1,\ldots,n-1$ et qui coïncide avec $g(x)$ aux extrémités de ces intervalles. Chacune des fonctions $g_n(x)$ ainsi définies étant finie, non décroissante et, en outre, absolument continue dans I, il existe pour tout n, d'après ce qui vient d'être établi, un $\xi_n\in I$ tel que

$$(5.4)\qquad \int_a^b g_n f\,dx=g_n(a)\int_a^{\xi_n} f\,dx+g_n(b)\int_{\xi_n}^b f\,dx=g(a)\int_a^{\xi_n} f\,dx+g(b)\int_{\xi_n}^b f\,dx.$$

Or, on voit sans peine que la suite $g_n(x)$ converge vers $g(x)$ en tout point où la fonction $g(x)$ est continue et, une fonction monotone n'admettant que tout au plus une infinité dénombrable des points de discontinuité (cf. Chap. I, § 14, p. 19), on a l'égalité $g(x)\cdot f(x)=\lim_n g_n(x)\cdot f(x)$, sauf dans un ensemble au plus dénombrable de points de I. De plus, N désignant le plus grand des deux nombres $|g(a)|$ et $|g(b)|$, on a $|g_n(x)\cdot f(x)|\leqslant N\cdot|f(x)|$, de sorte qu'on peut appliquer le th. 5, p. 85. Par conséquent,

$\lim\limits_{n}\int\limits_{a}^{b} g_n(x)\cdot f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} g(x)\cdot f(x)\,dx$ et d'autre part, en désignant par $\{\xi_{n_i}\}$ une suite convergente extraite de $\{\xi_n\}$ et en posant $\xi = \lim\limits_{i} \xi_{n_i}$, on a $\lim\limits_{i}\int\limits_{a}^{\xi_{n_i}} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx$ et $\lim\limits_{i}\int\limits_{\xi_{n_i}}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$. Il suffit donc de substituer n_i à n dans la formule (5.4), pour en obtenir par le passage à la limite avec $i\to\infty$ la formule (5.2), q. f. d.

Théorème de Vitali-Carathéodory.

§ 6. **Lemme.** *Etant données deux fonctions mesurables non négatives $g(x)$ et $h(x)$ qui remplissent dans un ensemble mesurable et borné E l'inégalité $g(x)\leqslant h(x)$, on a*

$$(6.1)\qquad \int\limits_{E} [h(x)-g(x)]\,dx = m_2\,[A(h;E)-A(g;E)]$$

(en supposant $h(x)-g(x)=0$, lorsque $h(x)=g(x)=+\infty$).

Démonstration. Posons pour tout $n=1,2,\ldots$

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), & \text{si } g(x)\leqslant n,\\ n, & \text{si } g(x)>n,\end{cases}\quad \text{et}\quad h_n(x)=\begin{cases} h(x), & \text{si } h(x)\leqslant n,\\ n, & \text{si } h(x)>n.\end{cases}$$

Les fonctions $h_n(x)$ et $g_n(x)$ ainsi définies étant non négatives et sommables sur E, on a conformément à la définition géométrique de l'intégrale (voir p. 82):

$$\int\limits_{E}(h_n-g_n)\,dx = m_2[A(h_n;E)]-m_2[A(g_n;E)] = m_2[A(h_n;E)-A(g_n;E)],$$

ce qui entraîne l'égalité (6.1) en vertu du th. de Lebesgue, p. 83, et du th. 10, Chap. II, § 6, puisque les suites $\{h_n(x)-g_n(x)\}$ et $\{A(h_n;E)-A(g_n;E)\}$ sont non décroissantes et convergent vers la fonction $h(x)-g(x)$ et vers l'ensemble $A(h;E)-A(g;E)$ respectivement.

Théorème 8. *Etant donnée une fonction $f(x)$ mesurable dans une figure R, il existe deux suites monotones de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ et $\{\psi_n(x)\}$ qui remplissent les conditions suivantes:*

1° *les fonctions φ_n sont semicontinues inférieurement et les fonctions ψ_n sont semicontinues supérieurement,*

2° *chacune des fonctions φ_n est bornée inférieurement et chacune des fonctions ψ_n l'est supérieurement,*

3° *la suite $\{\varphi_n\}$ est non croissante et la suite $\{\psi_n\}$ est non décroissante,*

4° $\varphi_n(x)\geqslant f(x)\geqslant \psi_n(x)$ *pour tout $x\in R$ et pour tout $n=1,2,\ldots$,*

5° $\lim\limits_{n}\varphi_n(x)=f(x)=\lim\limits_{n}\psi_n(x)$ *presque partout dans R,*

6° *si, en outre, la fonction $f(x)$ est sommable sur R, on a* $\lim\limits_{n}\int\limits_{R}(\varphi_n-f)\,dx=\lim\limits_{n}\int\limits_{R}(f-\psi_n)\,dx=0.$

Démonstration. Commençons par le cas particulier où la fonction $f(x)$ est non négative.

La construction de la suite $\{\varphi_n\}$. Soit J l'ensemble de tous les points (x,y) où $x\in R$ et $y\geqslant 0$. L'aire $A(f;R)$ étant d'après le th. 2, p. 80, un ensemble mesurable, il existe une suite $\{\Gamma_n\}$ d'ensembles ouverts tels que l'on a pour chaque n

$$(6.2)\qquad A(f;R)\subset\Gamma_n \quad \text{et}\quad m_2[\Gamma_n-A(f;R)]<\frac{1}{n}.$$

On peut admettre évidemment que la suite $\{\Gamma_n\}$ est descendante. En posant donc $\Phi_n=J-\Gamma_n$, on obtient une suite ascendante $\{\Phi_n\}$ d'ensembles fermés tels que, d'après (6.2),

$$(6.3)\qquad \Phi_n\cdot A(f;R)=0 \quad \text{pour tout } n=1,2,\ldots$$

Ceci dit, désignons pour tout point $x\in R$ par $\varphi_n(x)$ le plus petit nombre y tel que le point (x,y) appartient à Φ_n et dans le cas où Φ_n ne contient aucun point d'abscisse x, posons $\varphi_n(x)=+\infty$.

Or, la suite $\{\Phi_n\}$ étant ascendante, la suite $\{\varphi_n\}$ satisfait à la condition 3°. Les fonctions φ_n étant non négatives, elles remplissent également la condition 2°, et la condition 4° se trouve vérifiée en vertu de (6.3). En même temps, pour tout a réel l'ensemble $\mathop{E}\limits_{x}[\varphi_n(x)\leqslant a]$ est, comme on l'aperçoit aussitôt, la projection sur l'axe des x de la partie de l'ensemble fermé Φ_n comprise dans la bande $0\leqslant y\leqslant a$; il est donc aussi un ensemble fermé et les fonctions $\varphi_n(x)$ sont par conséquent (voir th. 22, Chap. II, § 10) semicontinues inférieurement, d'où la condition 1°. Enfin, on a pour tout n naturel $A(f;R)\subset A(\varphi_n;R)\subset\Gamma_n+T(\varphi_n;R)$, d'où on tire $A(\varphi_n;R)-A(f;R)\subset\Gamma_n+T(\varphi_n;R)-A(f;R)$, donc $m_2[A(\varphi_n;R)-A(f;R)]\leqslant m_2[\Gamma_n-A(f;R)]+m_2[T(\varphi_n;R)]=$ $=m_2[\Gamma_n-A(f;R)]$, car la mesure plane de l'image d'une fonction mesurable est selon le th. 1, p. 80, nulle. Il en résulte d'après (6.2) selon le lemme précédent que $\lim\limits_n \int\limits_R [\varphi_n - f]\, dx = \lim\limits_n m_2 [A(\varphi_n; R) - A(f; R)] = 0$, ce qui entraîne à la fois les conditions 5^0 et 6^0.

La construction de la suite $\{\psi_n\}$ est tout à fait analogue et même un peu plus simple. Ψ désignant un F_σ tel que

$$(6.4) \qquad \Psi \subset A(f; R) \quad et \quad m_2 [A(f; R) - \Psi] = 0,$$

posons $\Psi = \sum\limits_n \Psi_n$ où $\{\Psi_n\}$ est une suite ascendante d'ensembles fermés et bornés. Soit $\psi_n(x)$ pour tout $x \in R$ le plus grand y tel que le point (x, y) appartient à Ψ_n et, si Ψ_n ne contient aucun point d'abscisse x, soit $\psi_n(x) = 0$.

Ainsi définie, chacune des fonctions ψ_n est bornée et la suite $\{\psi_n\}$ est monotone non décroissante, de sorte que les conditions 2^0 et 3^0 sont remplies. Comme $\Psi_n \subset \Psi \subset A(f; R)$, il en est de même de la condition 4^0. En même temps, chaque ensemble de la forme $\underset{x}{\mathrm{E}} [\psi_n(x) \geqslant a]$, comme projection sur l'axe des x de la partie de l'ensemble fermé et borné Ψ_n, contenue dans le demi-plan $y \geqslant a$, est fermé, de sorte que chacune des fonctions $\psi_n(x)$ est semicontinue supérieurement, conformément à la condition 1^0.

Enfin, pour établir les conditions 5^0 et 6^0, posons $\psi(x) = \lim\limits_n \psi_n(x)$. On a alors $\psi(x) \leqslant f(x)$ et $\Psi = \lim\limits_n \Psi_n \subset A(\psi; R)$, donc, en vertu de (6.4) et du lemme précédent $\int\limits_R (f - \psi)\, dx = m_2 [A(f; R) - A(\psi; R)] = 0$, d'où $f(x) = \psi(x) = \lim\limits_n \psi_n(x)$ presque partout dans R. Nous parvenons ainsi à la condition 5^0, et en même temps, en raison du th. de Lebesgue (voir § 3, p. 83) à la condition 6^0.

Ceci établi, passons au cas général, où f est une fonction mesurable arbitraire. Soient $\{\varphi_n^*\}$ et $\{\psi_{*n}\}$ les suites de fonctions remplissant respectivement par rapport aux fonctions non négatives $\overset{*}{f}$ et $-\underset{*}{f}$ les conditions $1^0 - 6^0$, imposées aux suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$. Comme $f = \overset{*}{f} + \underset{*}{f}$, on constate que les fonctions $\varphi_n(x) = \varphi_n^*(x) - \psi_{*n}(x)$ remplissent ces mêmes conditions par rapport à la fonction f donnée (il est à ajouter que, quoique les fonctions φ_n^* et ψ_{*n} puissent prendre des valeurs infinies, la première ne prend nullepart la valeur $-\infty$ et la seconde $+\infty$, de sorte que leur différence $\varphi_n(x)$ est partout bien déterminée). La définition de ψ_n est symétrique.

Les conditions 1^0 et 5^0 impliquent que toute fonction mesurable est presque partout la limite d'une suite convergente (vers une limite finie ou infinie) de fonctions semicontinues et coïncide par conséquent presque partout avec une fonction de la 2-me classe de Baire. Ce résultat, dû à G. Vitali [4] (cf. aussi W. Sierpiński [3]), a été élargi par M. C. Carathéodory [I, p. 406], qui a établi pour toute fonction mesurable $f(x)$ l'existence de deux suites de fonctions satisfaisant aux conditions $1^0 - 5^0$. La condition 6^0, qui renferme comme nous le verrons plus loin (Chap. VI, § 6) le théorème des MM. de la Vallée-Poussin et Perron sur l'existence pour les fonctions sommables des fonctions *majorantes* et *minorantes*, a été ajoutée ici pour la raison que sa démonstration se rattache d'une façon naturelle à celle des conditions $1^0 - 5^0$.

Intégrale de Riemann-Stieltjes.

§ 7. Nous allons compléter l'étude des propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue par l'examen de ses relations avec l'intégrale de Riemann. Nous envisagerons en même temps une opération un peu plus générale que l'intégrale riemannienne, à savoir l'intégrale de Riemann-Stieltjes, qui joue un rôle considérable dans plusieurs parties de l'Analyse et qui nous sera utile p. ex. dans la démonstration pour l'intégrale de Denjoy du théorème généralisé sur l'intégration par parties, ainsi que dans celle du II-me théorème de la moyenne (voir Chap. X, §§ 5, 6).

Commençons par quelques définitions. Etant donnée dans un espace $\mathbf{R}_n$ une suite finie d'intervalles $\mathbf{S} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, nous désignerons par $\delta(\mathbf{S})$ et appellerons *nombre caractéristique* de $\mathbf{S}$ le plus grand diamètre des $I_i \in \mathbf{S}$. Toute famille $\mathbf{I}$ d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre, contenus dans une figure R_0 et couvrant cette figure sera dite *division* ou *subdivision* de R_0.

Etant donnée une fonction de point $g(x)$ définie dans un ensemble E, désignons d'une façon générale par $M(g; E)$ et $m(g; E)$ respectivement la borne supérieure et inférieure des valeurs de $g(x)$ dans E. Si une fonction bornée $g(x)$ et une fonction additive à variation bornée $F(R)$ sont données dans une figure R_0, nous poserons pour chaque figure $R \subset R_0$:

$$N_F(g;R)=M(g;R),\quad n_F(g;R)=m(g;R),\quad \textit{lorsque}\quad F(R)\geqslant 0$$

et

$$N_F(g;R)=m(g;R),\quad n_F(g;R)=M(g;R),\quad \textit{lorsque}\quad F(R)<0,$$

et nous ferons correspondre à toute subdivision $\mathbf{I}=\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ de R_0 deux nombres

$$(7.1)\qquad S_F(g;\mathbf{I})=\sum_{k=1}^{m} N_F(g;I_k)\cdot F(I_k)$$

et

$$(7.2)\qquad s_F(g;\mathbf{I})=\sum_{k=1}^{m} n_F(g;I_k)\cdot F(I_k),$$

qu'on appellera respectivement *somme approchée supérieure* et *inférieure* de g relative à la fonction F et à la subdivision $\mathbf{I}$.

On a évidemment pour toute subdivision $\mathbf{I}$ de R_0:

$$M(|g|;R_0)\cdot W(F;R_0)\geqslant S_F(g;R_0)\geqslant s(g;R_0)\geqslant -M(|g|;R_0)\cdot W(F;R_0).$$

Nous appellerons respectivement *intégrale supérieure* et *inférieure* de $g(x)$ au sens de Riemann-Stieltjes, prise sur R_0 *par rapport à la fonction* $F(R)$, la limite supérieure des sommes (7.1) et la limite inférieure des sommes (7.2), lorsqu'on fait varier indéfiniment la subdivision $\mathbf{I}$ de façon que $\delta(\mathbf{I})$ tende vers 0. Ces intégrales seront désignées respectivement par

$$(7.3)\qquad (\mathcal{S})\overline{\int_{R_0}} g(x)\,dF \quad \textit{et}\quad (\mathcal{S})\underline{\int_{R_0}} g(x)\,dF.$$

En vertu des inégalités précédentes elles sont finies et on a $(\mathcal{S})\overline{\int_{R_0}} g\,dF\geqslant(\mathcal{S})\underline{\int_{R_0}} g\,dF$. Dans le cas où elles sont égales, leur valeur commune portera le nom d'*intégrale* de Riemann-Stieltjes de $g(x)$ sur R_0 *par rapport à* $F(R)$; nous la désignerons par

$$(7.3)\qquad (\mathcal{S})\int_{R_0} g\,dF$$

(d'ailleurs, en omettant pour abréger le signe $(\mathcal{S})$ dans les calculs) et dirons alors que la fonction $g(x)$ est *intégrable* sur R_0 au sens de Riemann-Stieltjes *par rapport à* $F(R)$.

En particulier, lorsque $F(R)=|R|$, les intégrales (7.3) et (7.4) s'appelleront simplement *intégrales* de Riemann *de* $g(x)$ *sur* R_0 et seront désignées respectivement par

$$(7.5)\qquad (\mathcal{R})\overline{\int_{R_0}} g(x)\,dx,\quad (\mathcal{R})\underline{\int_{R_0}} g(x)\,dx\quad \textit{et}\quad (\mathcal{R})\int_{R_0} g(x)\,dx.$$

C'est à T J. Stieltjes [1, p. 68—75] que nous devons cette généralisation de l'ancienne intégrale de Riemann ou, plus précisément, sa relativisation envers une fonction quelconque à variation bornée (cf. aussi: W. H. Young [2] et R. C. Young [1]). L'intégrale de Lebesgue se prête à une généralisation analogue, connue sous le nom d'*intégrale de Lebesgue-Stieltjes* (voir p. ex. H. Lebesgue [II, Chap. XI]). M-elle N. Bary et M. D. Menchoff [1] ont donné une généralisation particulièrement intéressante de l'intégrale lebesguienne dans le genre de Stieltjes, mais qui s'éloigne considérablement des autres généralisations de ce genre.

Les définitions qui précèdent donnent aussitôt le

Théorème 9. *Etant donnée dans* $R_0=R_1+R_2$ *où* $R_1\circ R_2=0$ *des fonctions additives de figure* F, F_1 *et* F_2 *à variation bornée et des fonctions de point* g, g_1 *et* g_2 *bornées, on a*

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} \overline{\int_{R_0}}(g_1+g_2)\,d(F_1+F_2) &\leqslant \sum_{i,j=1}^{2}\overline{\int_{R_0}} g_i\,dF_j,\\ \underline{\int_{R_0}}(g_1+g_2)\,d(F_1+F_2) &\geqslant \sum_{i,j=1}^{2}\underline{\int_{R_0}} g_i\,dF_j,\end{aligned}$$

$$(7.7)\qquad \overline{\int_{R_0}} g\,dF\geqslant\overline{\int_{R_1}} g\,dF+\overline{\int_{R_2}} g\,dF,\quad \underline{\int_{R_0}} g\,dF\leqslant\underline{\int_{R_1}} g\,dF+\underline{\int_{R_2}} g\,dF,$$

et, dans le cas particulier où la fonction F est monotone, les inégalités (7.7) *deviennent égalités.*

Les formules (7.6) et (7.7) entraînent respectivement les deux théorèmes suivants.

Théorème 10. *Si les fonctions bornées g_1 et g_2 sont intégrables au sens de Riemann-Stieltjes sur une figure R_0 respectivement par rapport aux fonctions à variation bornée F_1 et F_2, toute combinaison linéaire de g_1 et g_2 est intégrable sur R_0 par rapport à toute combinaison linéaire de F_1 et F_2 et on a*

$$\int_{R_0}(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)\;d(\beta_1 F_1+\beta_2 F_2)=\sum_{i,j=1}^{2}\alpha_i\beta_j\int_{R_0} g_i\,dF_j.$$

Théorème 11. *Toute fonction bornée g qui est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes sur une figure R_0 par rapport à une fonction F à variation bornée, l'est également sur toute figure $R \subset R_0$ et l'intégrale $\int_R g\,dF$ y est une fonction additive de figure R.*

Théorème 12. *Etant données dans une figure R_0 une fonction bornée $g(x)$ et une fonction additive monotone $F(R)$, quelles que soient les subdivisions $\mathbf{I}$ de R_0, les sommes approchées $S_F(g; \mathbf{I})$ et $s_F(g; \mathbf{I})$ tendent respectivement avec $\delta(\mathbf{I}) \to 0$ vers des limites bien déterminées.*

Démonstration. On peut évidemment se borner à envisager les sommes approchées supérieures $S(g; \mathbf{I})$ et admettre que la fonction monotone $F(R)$ est non décroissante.

Etant données deux subdivisions quelconques $\mathbf{I}'$ et $\mathbf{I}''$ de R_0, soient I'_i où $i = 1, 2, \dots, n$ les intervalles donnés par $\mathbf{I}'$ et, pour tout i, I''_{ij} où $j = 1, 2, \dots, j_i$ les intervalles donnés par $\mathbf{I}''$ qui sont situés respectivement dans I'_i. Soient enfin I''_k où $k = 1, 2, \dots, m$ les autres intervalles de $\mathbf{I}''$, à savoir, qui contiennent à l'intérieur des points situés sur les côtés des I'_i. Une évaluation facile conduit (p. ex. sur le plan) à l'inégalité $\sum_{k=1}^{m} |I''_k| \leqslant 24\,n \cdot \delta(R_0) \cdot \delta(\mathbf{I}'')$, d'où

$$S(g; \mathbf{I}'') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{j_i} M(g; I''_{ij}) \cdot |I''_{ij}| + \sum_{k=1}^{m} M(g; I''_k) \cdot |I''_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M(g; I'_i) \cdot |I'_i| + 24\,n \cdot \delta(R_0) \cdot \delta(\mathbf{I}'') \cdot M(|g|; R_0) \leqslant$$

$$\leqslant S(g; \mathbf{I}') + 24\,n \cdot \delta(R_0) \cdot \delta(\mathbf{I}'') \cdot M(|g|; R_0).$$

En faisant donc tendre $\delta(\mathbf{I}'')$ vers 0, on obtient pour tout $\mathbf{I}'$ l'inégalité $\limsup_{\delta(\mathbf{I}'') \to 0} S(g; \mathbf{I}'') \leqslant S(g; \mathbf{I}')$, d'où $\limsup_{\delta(\mathbf{I}'') \to 0} S(g; \mathbf{I}'') \leqslant \liminf_{\delta(\mathbf{I}') \to 0} S(g; \mathbf{I}')$ et par conséquent, $\mathbf{I}'$ et $\mathbf{I}''$ désignant des subdivisions quelconques, $\limsup_{\delta(\mathbf{I}) \to 0} S(g; \mathbf{I}) = \liminf_{\delta(\mathbf{I}) \to 0} S(g; \mathbf{I})$, c. q. f. d.

Théorème 13. *Chaque fonction continue de point $g(x)$ est intégrable par rapport à chaque fonction de figure $F(R)$ à variation bornée.*

Démonstration. La décomposition canonique de Jordan (Chap. I, § 10, p. 9) et le th. 10, p. 93, nous permettent de nous borner au cas où la fonction $F(R)$ est monotone. Or, $\mathbf{I}$ désignant

une subdivision quelconque de la figure R_0 où ces fonctions sont supposées définies, on a par suite de la continuité de $g(x)$ l'égalité $\lim_{\delta(\mathbf{I}) \to 0} [S(g; \mathbf{I}) - s(g; \mathbf{I})] = 0$, qui révient en vertu du th. 12 à l'égalité

$\overline{\int_{R_0}} g\,dF = \underline{\int_{R_0}} g\,dF$, c. q. f. d.

Théorème 14 *(de la moyenne). Une fonction de point $g(x)$ étant intégrable sur une figure R_0 par rapport à une fonction monotone de figure $F(R)$, il existe un nombre μ compris entre les bornes de $g(x)$ dans R_0 et tel que*

$$\int_{R_0} g\,dF = \mu \cdot F(R_0).$$

Démonstration. $F(R)$ étant supposée non négative, on a $m(g; R_0) \cdot F(R_0) \leqslant \int_{R_0} g\,dF \leqslant M(g; R_0) \cdot F(R_0)$, de sorte que le nombre $\mu = [\int_{R_0} g\,dF] : [F(R_0)]$ vérifie la thèse du théorème.

Théorème 15. *Etant données dans une figure R_0 une fonction continue $g(x)$ et une fonction additive à variation bornée $F(R)$, la fonction additive $G(R) = \int_R g\,dF$ est presque partout dérivable et on a presque partout $G'(x) = g(x) \cdot F'(x)$.*

Démonstration. Grâce à la décomposition canonique de Jordan des fonctions à variation bornée (voir p. 9) et en vertu des th. 10 et 13, la fonction $F(R)$ peut être supposée monotone. En raison du th. 14 il existe donc pour tout point $x \in R_0$ où elle est dérivable et pour tout carré $Q \subset R_0$ contenant x, un nombre $\mu(Q)$ compris entre les bornes de $g(x)$ dans Q et tel que l'on ait $\dfrac{G(Q)}{|Q|} = \mu(Q) \cdot \dfrac{F(Q)}{|Q|}$. Or, la fonction $g(x)$ étant continue, $\mu(Q)$ tend vers $g(x)$ avec $|Q| \to 0$, d'où l'égalité q. f. d.

§ 8. Nous allons montrer que les intégrales par rapport à une fonction quelconque à variation bornée $F(R)$ peuvent être toujours ramenées à des intégrales par rapport aux fonctions monotones, à savoir par rapport aux variations de cette fonction. Nous poserons pour abréger:

$\overline{W}(R) = \overline{W}(F; R)$, $\underline{W}(R) = \underline{W}(F; R)$, $W(R) = W(F; R)$ *et* $M = M(|g|; R_0)$.

Lemme. *Etant données dans R_0 une fonction $g(x)$ bornée et une fonction $F(R)$ à variation bornée, on a*

$$(8.1)\quad \overline{\int}_{R_0} g\,dF \geqslant \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} - M\cdot|\underline{W}(R_0)| \;\; et \;\; \overline{\int}_{R_0} g\,dF \geqslant \overline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W} - M\cdot\overline{W}(R_0).$$

Démonstration. Soit $\mathbf{I}$ une subdivision quelconque de R_0 en intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_m$, supposés numérotés de manière que l'on ait $F(I_k) \geqslant 0$ pour j premiers intervalles (s'il y en a) et $F(I_k) < 0$ pour $m-j$ derniers. Il s'ensuit de (7.1), p. 92, que

$$S_{\overline{W}}(g;\,\mathbf{I}) \leqslant \sum_{k=1}^{j} M(g;\,I_k)\cdot\overline{W}(I_k) + M\cdot\sum_{k=j+1}^{m}\overline{W}(I_k)$$

et

$$S_F(g;\,\mathbf{I}) \geqslant \sum_{k=1}^{j} M(g;\,I_k)\cdot F(I_k) + M\cdot\sum_{k=j+1}^{m} F(I_k),$$

d'où $S_{\overline{W}}(g;\mathbf{I}) - S_F(g;\mathbf{I}) \leqslant M\sum_{k=1}^{m}[\overline{W}(I_k) - F(I_k)] = -M\sum_{k=1}^{m}\underline{W}(I_k) = M\cdot|\underline{W}(R_0)|$ et par conséquent $S_{\overline{W}}(g;\mathbf{I}) \leqslant S_F(g;\mathbf{I}) + M\cdot|\underline{W}(R_0)|$.

La première des formules (8.1) s'en obtient par le passage à la limite supérieure avec $\delta(\mathbf{I}) \to 0$ et la seconde se déduit de la première par le changement simultané des signes des fonctions $g(x)$ et $F(R)$.

Théorème 16. *Etant données dans une figure R_0 une fonction $g(x)$ bornée et une fonction $F(R)$ à variation bornée, on a*

$$(8.2)\quad \overline{\int}_{R_0} g\,dF = \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} + \overline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W} \quad et \quad \underline{\int}_{R_0} g\,dF = \underline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} + \underline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W}.$$

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon > 0$, soit R_1 une figure telle que $R_1 \subset R_0$ et $F(R_1) > \overline{W}(R_0) - \varepsilon$, de sorte que

$$(8.3)\qquad \underline{W}(R_1) > -\varepsilon$$

et, en posant $R_2 = R_0 \ominus R_1$,

$$(8.4)\qquad \overline{W}(R_2) < \varepsilon.$$

Selon le th. 9, p. 93, on a donc, $\overline{W}(R)$ étant une fonction monotone, $\overline{\int}_{R} g\,d\overline{W} = \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} - \overline{\int}_{R_2} g\,d\overline{W} \geqslant \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} - M\varepsilon$ et selon (8.3),

d'une façon analogue, $\underline{\int}_{R_2} g\,d\underline{W} \geqslant \underline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W} - M\varepsilon$. On en tire, en vertu de (8.3) et (8.4), en appliquant consécutivement le lemme qui précède et le th. 9 (la première des formules (7.7)), l'inégalité $\overline{\int}_{R_0} g\,dF \geqslant \overline{\int}_{R_1} g\,dF + \overline{\int}_{R_2} g\,dF \geqslant \overline{\int}_{R_1} g\,d\overline{W} + \overline{\int}_{R_2} g\,d\underline{W} - M\cdot[\overline{W}(R_2) + |\underline{W}(R_1)|] \geqslant \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} + \overline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W} - 4M\varepsilon$, d'où, ε étant arbitraire, $\overline{\int}_{R_0} g\,dF \geqslant \overline{\int}_{R_0} g\,d\overline{W} + \overline{\int}_{R_0} g\,d\underline{W}$. Or, l'inégalité inverse étant évidente en raison du th. 9, p. 93, on aboutit à la première des formules (8.2). La seconde s'en obtient, en affectant la fonction $g(x)$ du signe inverse.

Le th. 16 étant ainsi établi, les formules (8.2) donnent par soustraction le

Théorème 17. *Pour qu'une fonction bornée soit intégrable par rapport à une fonction donnée à variation bornée, il faut et il suffit qu'elle le soit par rapport à ses deux variations relatives.*

§ 9. Dans le cas où la fonction par rapport à laquelle on effectue l'intégration est absolument continue, les deux intégrales de Riemann-Stieltjes se ramènent facilement à l'intégrale de Lebesgue. Désignons à ce but par $N(g;x)$ le maximum ou le minimum de la fonction $g(x)$ au point x, suivant que l'on a $F'(x) \geqslant 0$ ou $F'(x) < 0$, et, inversement, par $n(g;x)$ le minimum ou le maximum de $g(x)$ en x dans les mêmes circonstances, c. à d. suivant que c'est la première ou la seconde des inégalités qui se présente. Les nombres $N(g;x)$ et $n(g;x)$, en tant que fonctions de point, ne se trouvent donc définis que presque partout dans R_0; or, c'est ce qui suffit, lorsqu'il s'agit des intégrales de Lebesgue.

Théorème 18. *Etant données dans R_0 une fonction bornée $g(x)$ et une fonction additive absolument continue $F(R)$, on a les formules*

$$(9.1)\qquad \begin{aligned} (S)\overline{\int}_{R_0} g\,dF &= \int_{R_0} N(g;x)\cdot F'(x)\,dx \\ (S)\underline{\int}_{R_0} g\,dF &= \int_{R_0} n(g;x)\cdot F'(x)\,dx, \end{aligned}$$

les intégrales figurant dans leurs membres droits étant entendues au sens de Lebesgue.

Démonstration. En raison du th. 13, Chap. IV, § 4 et du th. 16, p. 96, la fonction $F(R)$ peut être supposée monotone non négative. Soit $\{\mathbf{I}_n\}$ une suite de subdivisions de R_0 telles que $\lim\limits_n \delta(\mathbf{I}_n) = 0$. Désignons par $I_j^{(n)}$ où $j = 1, 2, \ldots, k_n$ les intervalles donnés par $\mathbf{I}_n$ et par $M^{(n)}(x)$ la fonction égale à $M(g; I_j^{(n)})$ à l'intérieur de $I_j^{(n)}$, et p. ex. à 0 sur les côtés des intervalles de $\mathbf{I}_n$. Il est facile de voir que pour tout point x qui n'est situé sur les côtés d'aucun intervalle $I_j^{(n)}$ où $n = 1, 2, \ldots$ et $j = 1, 2, \ldots, k_n$, par conséquent *presque partout* dans R_0, on a alors

$$(9.2)\quad \lim_n M^{(n)}(x) = N(g; x) \quad \textit{et} \quad |M^{(n)}(x)| \leqslant M(|g|; R_0).$$

Cependant, $S_F(g; \mathbf{I}_n) = \sum\limits_{j=1}^{k_n} M(g; I_j^{(n)}) \cdot F(I_j^{(n)}) = \sum\limits_{j=1}^{k_n} \int\limits_{I_j^{(n)}} M^{(n)}(x) \cdot F'(x)\, dx =$ $= \int\limits_{R_0} M^{(n)}(x) \cdot F'(x)\, dx$. Par le passage à la limite avec $n \to \infty$ on en obtient en vertu de (9.2) et du th. 5, p. 85, la première des formules (9.1). La démonstration de la seconde est symétrique.

Les égalités (9.1) donnent par soustraction le critère suivant pour l'intégrabilité par rapport à des fonctions absolument continues.

Théorème 19. *Pour qu'une fonction $g(x)$ bornée dans une figure R_0 soit intégrable sur R_0 au sens de Riemann-Stieltjes par rapport à une fonction absolument continue $F(R)$, il faut et il suffit que la fonction $g(x)$ soit continue dans presque tous les points x où $F'(x) \neq 0$.*

Dans ces conditions on a $\int\limits_{R_0} g\, dF = \int\limits_{R_0} g(x) \cdot F'(x)\, dx.$

On en déduit en particulier, en posant $F(R) = |R|$, le

Théorème 20. *Pour qu'une fonction $g(x)$ bornée dans une figure R_0 soit intégrable sur R_0 au sens de Riemann, il faut et il suffit qu'elle soit presque partout continue dans R_0.*

Cette condition étant réalisée, la fonction $g(x)$ est sommable dans R_0 et son intégrale de Riemann coïncide avec celle de Lebesgue.

La condition qui précède est due à M. Lebesgue [1; I, p. 29]. D'autres conditions, basées sur des théories plus anciennes de la mesure ont été données antérieurement par M. V. Volterra [1] et par A. Harnack [1].