CHAPITRE III.

Fonctions à variation bornée.

Nombres dérivés des fonctions d'intervalle.

§ 1. Nous allons nous occuper dans ce chapitre de la dérivabilité des fonctions à variation bornée. La plupart des théorèmes qui vont suivre sont dus à M. Lebesgue; le plus important en est le théorème sur la dérivabilité presque partout des fonctions additives à variation bornée.

Par *dérivée supérieure* $\overline{F}(x)$ et *inférieure* $\underline{F}(x)$ au point x d'une fonction d'intervalle $F(I)$, nous entendons respectivement la limite supérieure et inférieure de l'expression $\dfrac{F(Q)}{|Q|}$, où Q désigne un carré arbitraire renfermant x et dont l'aire tend vers 0. Dans le cas où $\overline{F}(x) = \underline{F}(x)$, ce nombre porte le nom de *dérivée déterminée* ou *ordinaire* ou tout court de *dérivée* de la fonction $F(I)$ au point x; on la désigne par $F'(x)$. Une fonction $F(I)$ dont la dérivée dans un point x est *finie* s'appelle *dérivable* en ce point.

En dehors de ces dérivées, on introduit dans le cas spécial où il s'agit des fonctions d'intervalle *linéaire*, les nombres dérivés dits *unilatéraux*.

On appelle *nombre dérivé médian droit* au point x d'une fonction d'intervalle linéaire $F(I)$ tout nombre qui est limite des quotients $\dfrac{F(I_n)}{|I_n|}$ où $\{I_n\}$ est une suite d'intervalles ayant x pour l'extrémité gauche et dont la longueur tend vers 0. Le plus grand et le plus petit des nombres dérivés médians droits dans un point sont dits respectivement *dérivés supérieur* et *inférieur droits* en ce point. Les définitions des dérivés analogues du côté gauche sont symétriques.

Les dérivés supérieur et inférieur, droits et gauches, d'une fonction d'intervalle linéaire $F(I)$ dans un point x sont désignés respectivement par $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^+(x)$, $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^-(x)$ et connus sous le nom des *dérivés extrêmes* ou des quatre dérivés de Dini. Ce sont respectivement, comme on le voit aussitôt, la limite supérieure et inférieure du quotient $\dfrac{F(I)}{|I|}$ pour les intervalles I de longueur tendant vers 0 et ayant dans le point x leur extremité droite et gauche respectivement. On remarquera aussi que si $F(I)$ est une fonction *additive* d'intervalle linéaire, ses dérivées supérieure $\overline{F}(x)$ et inférieure $\underline{F}(x)$ sont respectivement le plus grand et le plus petit des quatre nombres dérivés de Dini.

Bien entendu, toutes ces définitions se transportent directement des fonctions d'intervalle linéaire sur celles d'une variable réelle.

§ 2. Le théorème général suivant, dû à M. S. Banach [2] concerne les fonctions d'intervalle aussi bien additives que non additives.

Théorème 1. *Les deux dérivées (supérieure et inférieure) de toute fonction d'intervalle sont des fonctions mesurables.*

Démonstration. Considérons p. ex. la dérivée supérieure $\overline{F}(x)$ d'une fonction quelconque d'intervalle $F(I)$. Posons pour a réel et n naturel quelconques:

$$(2.1)\quad A = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}(x) > a],\quad A_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\overline{F}(x) > a + \frac{1}{n}\right] \quad et \quad B_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\overline{F}(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\right],$$

et désignons par $\mathbf{Q}_{n,m}$ où $m = 1, 2, \ldots$ la famille de tous les carrés Q de diamètre $< \dfrac{1}{m}$ qui satisfont à l'inégalité $F(Q) > \left(a + \dfrac{1}{n}\right) \cdot |Q|$.

Soit n un nombre naturel quelconque. Il est évident alors que pour tout m la famille $\mathbf{Q}_{n,m}$ couvre l'ensemble A_n au sens de Vitali (cf. Chap. II, § 7, p. 33). En vertu du th. de Vitali, p. 34, il existe donc une suite finie ou dénombrable de carrés de $\mathbf{Q}_{n,m}$ qui couvre A_n *presque* entièrement. $S_{n,m}$ désignant la somme des carrés d'une telle suite, on a par conséquent

$$(2.2)\qquad A_n \subset S_{n,m} + T_{n,m} \quad pour \quad m = 1, 2, \ldots$$

où $T_{n,m}$ est un ensemble de mesure nulle. Soient

(2.3) $S_n = \prod_m S_{n,m}, \quad S = \prod_n S_n \quad et \quad T_n = \sum_m T_{n,m}, \quad T = \sum_n T_n.$

On a évidemment

(2.4) $$|T| \leqslant \sum_m \sum_n |T_{n,m}| = 0.$$

D'autre part, les ensembles $S_{n,m}$ étant par définition des F_σ, donc mesurables, il en résulte selon (2.3) que l'ensemble S est aussi mesurable.

Or, on a en vertu de (2.2) et (2.3) pour tout n naturel

(2.5) $$A_n \subset \prod_m (S_{n,m} + T_{n,m}) \subset \prod_m S_{n,m} + \sum_m T_{n,m} = S_n + T_n.$$

Réciproquement, si $x \in S_n$, il existe pour tout m naturel un carré Q de $\mathbf{Q}_{n,m}$ qui renferme x, de sorte que $\overline{F}(x) \geqslant a + n^{-1}$, d'où selon (2.1) $x \in B_n$. On a donc pour tout n naturel $S_n \subset B_n$, d'où en vertu de (2.5) et (2.3)

$$S = \prod_n S_n \subset \prod_n B_n = A = \prod_n A_n \subset \prod_n S_n + \sum_n T_n = S + T,$$

ce qui entraîne en raison de (2.4) que $|A - S| \leqslant |T| = 0$. Comme différant de l'ensemble mesurable S par un ensemble de mesure nulle, l'ensemble A est donc mesurable. Le nombre réel a auquel A correspond d'après (2.1) étant arbitraire, la fonction $\overline{F}(x)$ est en conséquence mesurable, c. q. f. d.

Théorème de Lebesgue.

§ 3. Nous allons établir d'abord deux lemmes qui nous seront souvent utiles dans la suite.

Lemme 1. *$F(R)$ étant une fonction additive non négative de figure, si l'inégalité $\overline{F}(x) > a$ se présente pour tout point x d'un ensemble E situé dans une figure R_0, on a $F(R_0) \geqslant a \cdot |E|$.*

Démonstration. On peut évidemment admettre que E soit situé dans l'intérieur de R_0, puisqu'en supprimant les points de E situés sur la frontière de R_0, on ne diminue E que d'un ensemble de mesure nulle.

Soit $\mathbf{Q}$ la famille des carrés Q situés à l'intérieur de R_0 et tels que

(3.1) $$F(Q) > a \cdot |Q|.$$

Comme $\mathbf{Q}$ couvre E au sens de Vitali, il existe dans $\mathbf{Q}$ (voir Chap. II, § 7, th. 14) pour tout $\eta > 0$ un système fini $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de carrés disjoints tels que

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_i| \geqslant |E| - \eta,$$

d'où, la fonction $F(R)$ étant par hypothèse monotone non décroissante, on conclut en vertu de (3.1) que $F(R_0) \geqslant F\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} F(Q_i) > a \cdot \sum_{i=1}^{n} |Q_i| > a \cdot (|E| - \eta)$ pour tout $\eta > 0$, ce qui entraîne l'inégalité q. f. d.

Lemme 2. *$F(R)$ étant une fonction additive monotone non négative, on a presque partout $\overline{F}(x) < +\infty$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver que cette inégalité a lieu presque partout dans n'importe quel carré Q. Or, en posant $E = Q \cdot \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}(x) = +\infty]$ on a d'après le lemme 1 pour tout n naturel $F(Q) \geqslant n \cdot |E|$, d'où $|E| = 0$.

Théorème 2 (de Lebesgue). *Chaque fonction additive $F(R)$ à variation bornée admet presque partout la dérivée finie.*

Démonstration. Toute fonction à variation bornée étant en vertu du th. de Jordan (Chap. I, § 11) différence de deux fonctions monotones non négatives, on peut admettre d'emblée que la fonction $F(R)$ est partout non négative. Soit donc $E = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{F}(x) > \underline{F}(x)]$ et supposons que

(3.2) $$|E| > 0.$$

Posons pour tout couple de nombres naturels m, n

(3.3) $$E_{m,n} = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\overline{F}(x) > \frac{m+1}{n} > \frac{m}{n} > \underline{F}(x)\right].$$

On a donc évidemment $E = \sum_m \sum_n E_{m,n}$ et il existe par conséquent en raison de (3.2) un couple m_0, n_0 tel que $|E_{m_0,n_0}| > 0$. Tout ensemble se laissant représenter comme somme d'une suite au plus dénombrable d'ensembles bornés, l'ensemble E_{m_0,n_0}, même s'il était non borné, contiendrait un ensemble borné A tel que

(3.4) $$|A| > 0.$$

Or, d'après (3.3) la famille $\mathbf{Q}$ des carrés Q tels que

$$F(Q) < \frac{m_0}{n_0} \cdot |Q| \tag{3.5}$$

couvre l'ensemble E_{m_0, n_0}, et par conséquent son sous-ensemble A, au sens de Vitali, de sorte qu'il existe dans $\mathbf{Q}$ d'après le th. 14, Chap. II, § 7, pour tout $\eta > 0$ une suite finie de carrés disjoints $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ telle que l'on a d'une part

$$\left| \sum_{i=1}^{n} Q_i \right| < |A| + \eta \tag{3.6}$$

et d'autre part

$$\left| \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot A \right| > |A| - \eta. \tag{3.7}$$

En posant donc $R_0 = \sum_{i=1}^{n} Q_i$, on conclut de (3.5) et (3.6) que

$$F(R_0) = \sum_{i=1}^{n} F(Q_i) < \frac{m_0}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \frac{m_0}{n_0} \cdot (|A| + \eta) \tag{3.8}$$

et de (3.3) et (3.7), en vertu du lemme 1, que

$$F(R_0) \geqslant \frac{m_0+1}{n_0} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot A \right| > \frac{m_0+1}{n_0} \cdot (|A| - \eta).$$

On a donc selon (3.8) $m_0 \cdot (|A| + \eta) > (m_0+1) \cdot (|A| - \eta)$ pour tout $\eta > 0$, de sorte que $|A| \leqslant 0$, ce qui est incompatible avec (3.4).

La supposition (3.2) implique ainsi une contradiction et par conséquent la fonction $F(R)$ admet presque partout une dérivée déterminée. Que cette dérivée est presque partout finie, c. à d. que la fonction $F(R)$ est presque partout dérivable, c'est une conséquence immédiate du lemme 2, qui précède.

Le théorème précédent a été démontré par M. Lebesgue [I, p. 128] d'abord pour les fonctions continues d'une variable réelle et plus tard généralisé par lui sur les fonctions continues d'intervalle dans $\mathbf{R}_n$ [5, p. 408 — 425]. Parmi les nombreux travaux consacrés à la simplification de la démonstration de ce théorème déjà classique, sont à citer les mémoires suivants: G. Faber [1], W. H. et G. C. Young [1], H. Steinhaus [1], Ch. J. de la Vallée Poussin [1; I, p. 103], A. Rajchman et S. Saks [1]. Tout récemment M. F. Riesz [4; 5] a donné une démonstration élégante, basée sur une idée tout à fait nouvelle, du th. de Lebesgue pour les fonctions d'une variable réelle, mais elle ne parait pas être susceptible d'une extension

directe aux fonctions d'intervalle n-dimensionnel. Enfin M. S. Banach [2, p. 177] a généralisé le théorème en question sur une classe de fonctions un peu plus vaste que celle des fonctions additives. La démonstration que nous donnons ici s'applique sans modification essentielle aussi au th. de M. Banach.

§ 4. Le théorème de Lebesgue sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée se laisse compléter pour les fonctions absolument continues comme il suit.

Théorème 3. *Pour qu'une fonction $F(R)$ additive et absolument continue soit partout non positive (non négative), il faut et il suffit que l'on ait*

$$F'(x) \leqslant 0 \qquad (F'(x) \geqslant 0) \qquad \textit{presque partout}. \tag{4.1}$$

Démonstration. La nécessité de la condition étant évidente, il ne s'agit que d'en établir la suffisance.

Soient R_0 une figure arbitraire et E l'ensemble de tous les $x \in R_0$ où la fonction F est dérivable et remplit la condition (4.1); soit enfin $|R_0 - E| = 0$. Par suite de la continuité absolue de F il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que

$$R \subset R_0 \quad \textit{et} \quad |R| \leqslant \eta \quad \textit{entraîne} \quad |F(R)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

La famille $\mathbf{Q}$ de tous les carrés Q qui satisfont aux conditions $Q \subset R_0$ et

$$F(Q) \leqslant \varepsilon \cdot |Q| \tag{4.3}$$

couvre E au sens de Vitali; il existe donc (v. Chap. II, § 7, th. 14) dans $\mathbf{Q}$ une suite finie de carrés disjoints $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tels que $\left| \sum_{i=1}^{n} Q_i \right| \geqslant |E| - \eta = |R_0| - \eta$, d'où $\left| R_0 \ominus \sum_{i=1}^{n} Q_i \right| \leqslant \eta$.

On en conclut par conséquent selon (4.3) et (4.2) que $F(R_0) = \sum_{i=1}^{n} F(Q_i) + F(R_0 \ominus \sum_{i=1}^{n} Q_i) \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} |Q_i| + \varepsilon \leqslant \varepsilon \cdot (|R_0| + 1)$, et finalement, ε étant supposé arbitraire, que $F(R_0) \leqslant 0$, c. q. f. d.

Corollaire. *Pour qu'une fonction additive et absolument continue soit identiquement nulle, il faut et il suffit que sa dérivée s'annule presque partout.*

En d'autres termes, une fonction absolument continue est partout définie par les valeurs de sa dérivée données presque partout. La généralisation de ce corollaire sur les fonctions arbitraires à variation bornée serait évidemment fausse.

Suites monotones de fonctions additives.

§ 5. **Théorème 4.** *Si une suite monotone $\{F_n(R)\}$ de fonctions additives presque partout dérivables converge vers une fonction $F(R)$, la fonction $F(R)$ est aussi presque partout dérivable et on a $F'(x) = \lim_n F'_n(x)$.*

Démonstration. On peut admettre que la suite monotone $\{F_n(R)\}$ est non décroissante, c. à d. que l'on a pour toute figure R les relations $F_n(R) \leqslant F_{n+1}(R) \leqslant F(R)$ où $F(R) = \lim_n F_n(R)$. En posant $\Phi_n(R) = F(R) - F_n(R)$, on aura donc

(5.1) $\quad \Phi_n(R) \geqslant \Phi_{n+1}(R) \geqslant 0 \quad$ *pour* $n = 1, 2, 3 \ldots$

et

(5.2) $\quad \lim_n \Phi_n(R) = 0.$

Les fonctions $\Phi_n(R)$, qui sont d'après (5.1) monotones, admettent en vertu du th. 2, p. 49, presque partout les dérivées finies et là où ces dérivées existent on a selon (5.1) $\Phi'_n(x) \geqslant \Phi'_{n+1}(x) \geqslant 0$, de sorte qu'elles constituent presque partout une suite monotone non croissante de nombres non négatifs. Cette suite admet donc presque partout la limite non négative $\lim_n \Phi'_n(x)$.

Nous allons prouver que l'on a

(5.3) $\quad \lim_n \Phi'_n(x) = 0 \quad$ *presque partout.*

E désignant en effet l'ensemble des points où cette limite est positive et E_m l'ensemble de ceux où elle dépasse $\frac{1}{m}$, on a évidemment $E = \sum_{m=1}^{\infty} E_m$, de sorte qu'en supposant $|E| > 0$, il existe un m_0 tel que $|E_{m_0}| > 0$. Borné ou non, l'ensemble E_{m_0} contient en tout cas un sous-ensemble borné A de mesure extérieure positive. Etant donné un carré arbitraire Q contenant A, on a en tout point $x \in A$ pour tout n naturel $\Phi'_n(x) \geqslant \lim_n \Phi'_n(x) > \frac{1}{m_0}$, d'où selon le lemme 1, § 3, p. 48, $\Phi_n(Q) \geqslant \frac{1}{m_0} \cdot |A|$ et par conséquent $\lim_n \Phi_n(Q) \geqslant \frac{1}{m_0} \cdot |A| > 0$, contrairement à (5.2).

On ne peut donc supposer que $|E| > 0$, de sorte que la propriété (5.3) se trouve établie. Or, la thèse du théorème en résulte par définition de Φ_n.

Le théorème 4 qui précède entraîne *pour les fonctions d'une variable réelle* le suivant

Théorème de Fubini[1]). *Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est une série convergente de fonctions monotones non décroissantes, on a presque partout $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, c. à d. que cette série est presque partout dérivable terme à terme.*

En effet, $F(R)$ et $F_n(R)$ désignant respectivement les fonctions de figure qui correspondent (cf. Chap. I, § 14, p. 17) à $f(x)$ et $f_n(x)$, on a par hypothèse $F_n(R) \geqslant 0$ pour tout R, de sorte que les fonctions $G_m(R) = \sum_{n=1}^{m} F_n(R)$ sont monotones, donc dérivables presque partout, et forment en outre une suite monotone. Il en résulte d'aprés le th. 4 que l'on a presque partout l'égalité $F'(x) = \lim_m G'_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x)$ et par conséquent l'égalité analogue pour les fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$.

Points de densité d'un ensemble.

§ **6.** Etant donné un ensemble E quelconque, nous poserons $M_E(R) = |E \cdot R|$ et appellerons cette fonction de figure R *fonction de la mesure extérieure de E.*

Il résulte du th. 11 c), Chap. II, § 6, que la fonction de la mesure extérieure d'un ensemble est toujours additive et l'inégalité

$$0 \leqslant M_E(R) = |E \cdot R| \leqslant |R|$$

montre qu'elle est absolument continue et partout non négative. En vertu de la même inégalité on a en tout point x

$$0 \leqslant \underline{M}_E(x) \leqslant \overline{M}_E(x) \leqslant 1,$$

et en vertu du th. de Lebesgue la dérivée $M'_E(x)$ existe presque partout.

Les nombres $\overline{M}_E(x)$ et $\underline{M}_E(x)$ s'appellent respectivement *densités extérieures supérieure et inférieure de l'ensemble E au point x* et dans le cas où $\overline{M}_E(x) = \underline{M}_E(x)$ *densité extérieure de E dans x.*

---

[1]) voir G. Fubini [2]; cf. aussi L. Tonelli [3], F. Riesz [4; 5], A. Rajchman et S. Saks [1].

En particulier, lorsque E est un ensemble linéaire, la fonction $M_E(R)$ de sa mesure extérieure est une fonction additive de figure linéaire et on en peut envisager (cf. ce Chap., § 1, p. 47) dans tout point x les quatre nombres dérivés de Dini $\overline{M}_E^+(x)$, $\underline{M}_E^+(x)$, $\overline{M}_E^-(x)$ et $\underline{M}_E^-(x)$, qui portent respectivement les noms de *densité extérieure droite* supérieure et inférieure, et *gauche* supérieure et inférieure *de E dans x*.

Les points x où la dérivée $M'_E(x)$ existe et est égale à 1, sont dits *points de densité extérieure*, et ceux où elle est égale à 0 sont appelés *points de dispersion* de E.

Si E est un ensemble mesurable, on supprime le mot „extérieur“ dans toutes ces dénominations. La fonction de la mesure d'un ensemble mesurable E et celle de la mesure de son complémentaire sont liées par l'identité évidente

$$M_E(R) + M_{CE}(R) = |E \cdot R| + |CE \cdot R| = |R|,$$

d'où en tout x

$$\overline{M}_E(x) + \underline{M}_{CE}(x) = \underline{M}_E(x) + \overline{M}_{CE}(x) = 1,$$

et par conséquent

$$(6.1) \qquad M'_E(x) + M'_{CE}(x) = 1 \quad \textit{presque partout}.$$

La dernière relation sera précisée davantage dans le th. 6, p. 55.

Théorème 5 (de Lebesgue *sur les points de densité*). *Presque tout point d'un ensemble en est un point de densité extérieure.*

Démonstration. C'est évident pour des ensembles G (ouverts). En effet, si $x \in G$, la relation $x \in Q$ entraîne pour tout carré Q suffisamment petit $Q \subset G$, donc $M_G(Q) = |G \cdot Q| = |Q|$; par conséquent on a alors $M'_G(x) = 1$ dans tout point de G.

Admettons à présent que l'ensemble donné E soit un G_δ, c. à d. $E = \prod_n G_n$ où $\{G_n\}$ est une suite d'ensembles ouverts et qui en outre peuvent être supposés non croissants. En vertu du th. 9, Chap. II, § 5, on a alors $M_E(R) = \lim_n M_{G_n}(R)$. Les fonctions $M_{G_n}(R)$ formant une suite non croissante, on a en vertu du th. 4 presque partout $M'_E(x) = \lim_n M'_n(x)$; or, G_n étant ouverts, on a pour tout $x \in E \subset G_n$, quel que soit n, $M'_{G_n}(x) = 1$, d'où $M'_E(x) = 1$ presque partout dans E.

Ceci établi, soit enfin E un ensemble quelconque. En vertu du th. 12, Chap. II, § 6, il existe un ensemble E^* contenant E, ayant avec E la même fonction de la mesure extérieure et étant un G_δ. On a par conséquent $M'_E(x) = M'_{E^*}(x) = 1$ presque partout dans E^*, donc à plus forte raison dans $E \subset E^*$, c. q. f. d.

Pour les ensembles mesurables le th. 5 prend la forme plus précise suivante, qui en résulte immédiatement en vertu de (6.1).

Théorème 6. *L'ensemble E étant mesurable, presque tout point $x \in E$ en est un point de densité et presque tout point $x \in CE$ en est un point de dispersion.*

Le théorème de Lebesgue qui vient d'être établi, montre qu'aucun ensemble mesurable E de mesure positive inférieure à 1 ne peut être réparti sur le segment [0,1] d'une façon géométriquement uniforme, mais qu'il y est nécessairement disposé par agglomérations, se concentrant en excès dans certains endroits et se raréfiant démesurément dans des autres. En effet, la présence des points de densité et de dispersion entraîne entre les points 0 et 1 l'existence de deux segments disjoints de longueur égale, dont l'un abonde et l'autre est très pauvre en points de E.

Cette interprétation suggestive est due à M. N. Lusin [I, p. 17]; pour la structure des ensembles linéaires voir aussi K. Knopp [1].

Fonctions singulières.

§ 7. **Théorème 7.** *Pour qu'une fonction additive $F(R)$ à variation bornée soit singulière, il faut et il suffit que sa dérivée s'annule presque partout.*

Démonstration. Nécessité. Comme toute fonction singulière est en vertu du th. 4, Chap. I, § 13, la somme de deux fonctions singulières monotones, à savoir, de ses deux variations, on peut admettre d'emblée que la fonction considérée $F(R)$ soit une fonction monotone non négative.

Posons $M = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\overline{F}(x) > 0]$ et $M_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\overline{F}(x) > \frac{1}{n}\right]$ et supposons que $|M| > 0$.

Comme $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, il existe un n_0 naturel tel que $|M_{n_0}| > 0$, donc aussi un ensemble borné $A \subset M_{n_0}$ tel que $|A| > 0$. Or, Q désignant un carré arbitraire qui contient A, et R une figure quelconque, les relations $R \subset Q$ et $|R| < \frac{|A|}{2}$ impliquent par définition de M_n et selon le lemme 1, p. 48, que $F(Q \ominus R) \geqslant \frac{1}{n_0} |(Q \ominus R) \cdot A| \geqslant \frac{|A|}{2n_0}$, donc que $F(R) = F(Q) - F(Q \ominus R) \leqslant F(Q) - \frac{|A|}{2n_0}$. Or, cette implication entraîne $S(F; Q) = E(F; Q) \leqslant F(Q) - \frac{|A|}{2n_0} < F(Q)$, où $E(F; Q)$ désigne l'écart et $S(F; Q)$ la fonction des singularités de F sur Q (cf. Chap. I, § 13). Par conséquent la fonction F ne serait pas singulière, ce qui prouve que la condition est nécessaire.

Suffisance. Soit $F(R)$ une fonction additive à variation bornée et admettons que $F'(x) = 0$ presque partout. Soit pour une figure R_0 et un $\varepsilon > 0$ quelconques $\mathbf{Q}$ la famille de tous les carrés $Q \subset R_0$ tels que

$$|F(Q)| < \frac{\varepsilon}{|R_0|} \cdot |Q|. \tag{7.1}$$

La famille $\mathbf{Q}$ couvre au sens de Vitali la figure R presque entière (c. à d. sauf, peut être, un ensemble de mesure nulle comprenant les points de R_0 où $F'(x) \neq 0$). Il existe par conséquent une suite finie $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de carrés de $\mathbf{Q}$ telle que pour $R_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i$ on a $|R_1| = \sum_{i=1}^{n} |Q_i| > |R| - \varepsilon$. Il en résulte, en posant $R_2 = R_0 \ominus R_1$, que $|R_2| < \varepsilon$, d'où, selon (7.1), $|F(R_0 \ominus R_2)| = |F(R_1)| = \left| F\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) \right| \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=1}^{n} |F(Q_i)| < \frac{\varepsilon}{|R_0|} \sum_{i=1}^{n} |Q_i| \leqslant \varepsilon$, de sorte que $F(R)$ satisfait à la condition, qui en vertu du th. 5, Chap. I, § 13, est suffisante pour que la fonction soit singulière, c. q. f. d.

On remarquera que le th. 7 entraîne aussi le corollaire du th. 3, puisqu'une fonction absolument continue est singulière dans le cas et dans le cas seulement où elle est identiquement nulle.

*Applications. Courbes rectifiables.

§ 8. Nous entendrons par *courbe* dans l'espace $\mathbf{R}_n$ un système quelconque de n fonctions $x_i = x_i(t)$ où $i = 1, 2, \ldots, n$ et $a \leqslant t \leqslant b$. Les courbes que nous allons traiter ici peuvent ne pas être continues, à savoir lorsque les fonctions $x_i(t)$, qui les définissent, sont elles-mêmes discontinues. Les considérations qui vont suivre seront formulées pour $n = 2$ (cas du plan), mais elles subsistent évidemment pour le cas général des courbes dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

Ceci dit, soit C une courbe définie dans l'intervalle $I_0 = [a, b]$ par le couple de fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$. La variable t portera le nom du *paramètre* de la courbe C. Le point p du plan aux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sera dit „point correspondant à la valeur t du paramètre" et „situé sur la courbe C"; nous le désignerons par $p(C; t)$. Bien entendu, le même point de la courbe peut correspondre à plus d'une valeur du paramètre.

Etant donné un intervalle $I = [\alpha, \beta]$, on appelle *chaîne* entre les extrémités α et β de I toute suite finie $\tau = \{t_j\}$ où $0 \leqslant j \leqslant m$ et $\alpha = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m = \beta$. Dans le cas où $I \subset I_0$, nous pouvons faire correspondre à la chaîne τ le nombre $\Lambda(C; \tau)$ dit *longueur du polygone inscrit* dans la courbe C et correspondant aux valeurs du paramètre qui forment cette chaîne. Ce nombre est défini par la formule

$$\Lambda(C; \tau) = \sum_{j=1}^{m} \rho(p_{j-1}, p_j),$$

où $p_j = p(C; t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$ et $\rho(p_{j-1}, p_j)$ désigne la distance (v. Chap. I, § 3, p. 3) entre les points p_{j-1}, p_j. Le nombre

$$L(C; I) = L(C; \alpha, \beta) = \operatorname*{borne\ sup}_{\tau} \Lambda(C; \tau)$$

où τ est une chaîne quelconque entre α et β s'appelle *longueur de l'arc* de la courbe C dans l'intervalle $I = [\alpha, \beta]$ et dans le cas où ce nombre est fini, la courbe C s'appelle *rectifiable* dans cet intervalle.

La conséquence immédiate de cette définition est que *la longueur de l'arc d'une courbe n'est jamais inférieure à celle de sa corde*, ce qui s'exprime par la formule

$$L(\alpha, \beta) \geqslant \rho[p(\alpha), p(\beta)] \tag{8.1}$$

(où le signe C est supprimé pour plus de brièveté).

Etant donnés dans l'intervalle I_0, où la courbe C est définie, trois points $\alpha < \beta < \gamma$, on a évidemment pour n'importe quelles chaines τ_1 et τ_2 données respectivement entre les points α et β et les points β et γ l'inégalité $\Lambda(C; \tau_1) + \Lambda(C; \tau_2) \leqslant L(\alpha, \gamma)$, d'où, en remplaçant les sommandes du membre gauche par leurs bornes supérieures, $L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma) \leqslant L(\alpha, \gamma)$.

D'autre part, $\tau = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \gamma\}$ étant une chaîne arbitraire entre α et γ, et h étant l'indice tel que $t_{h-1} \leqslant \beta \leqslant t_h$, on obtient, en posant $\tau_1 = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_{h-1}, \beta\}$ et $\tau_2 = \{\beta, t_h, \dots, t_n = \gamma\}$ (et en supprimant encore le signe C), l'inégalité $\Lambda(\tau) \leqslant \Lambda(\tau_1) + \Lambda(\tau_2) \leqslant$ $\leqslant L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$; donc aussi $L(\alpha, \gamma) \leqslant L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$, d'où

$$L(\alpha, \gamma) = L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma). \tag{8.2}$$

Ceci établi, nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Jordan.

Théorème 8. *Pour qu'une courbe C définie dans l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$ par les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ soit rectifiable dans cet intervalle, il faut et il suffit que ces deux fonctions soient à variation bornée dans I_0.*

Plus généralement, on a pour tout intervalle $I \subset I_0$

$$W(x; I) \leqslant L(I), \quad W(y; I) \leqslant L(I) \quad \text{et} \quad L(I) \leqslant W(x; I) + W(y; I). \tag{8.3}$$

Démonstration. $I = [a, b]$ étant un intervalle partiel arbitraire de I_0, on a pour toute chaîne $\tau = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$ l'égalité $\Lambda(\tau) = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{[x(t_j) - x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j) - y(t_{j-1})]^2}$, donc d'une part

$$\sum_{j=1}^{m} |x(t_j) - x(t_{j-1})| \leqslant \Lambda(\tau) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} |y(t_j) - y(t_{j-1})| \leqslant \Lambda(\tau)$$

et d'autre part

$$\Lambda(\tau) \leqslant \sum_{j=1}^{m} |x(t_j) - x(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{m} |y(t_j) - y(t_{j-1})|,$$

d'où on obtient pour la borne supérieure $L(I)$ de $\Lambda(\tau)$ les inégalités (8.3), q. f. d.

Il en résulte aussitôt le théorème suivant, qui nous permettra plus loin (v. Chap. IV, § 8) d'exprimer la longueur de la courbe par l'intégrale définie.

Théorème 9. *Si la courbe C est rectifiable dans l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$, elle l'est aussi dans tout intervalle $I \subset I_0$ et sa longueur $L(C; I)$ est une fonction additive non négative de l'intervalle I.*

Pour que cette fonction soit absolument continue, il faut et il suffit que les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ le soient.

Démonstration. La première partie du théorème s'obtient immédiatement de l'égalité (8.2), et les inégalités (8.3) montrent alors que la continuité absolue de $L(C; I)$ équivaut à celle des variations $W(x; I)$ et $W(y; I)$, donc en vertu du th. 3, Chap. I, § 13, à celle des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Théorème 10. *Si une courbe C définie par les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ est rectifiable dans un intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$, on a dans presque tout point t de I_0*

$$L'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \tag{8.4}$$

Démonstration. Remarquons que d'après le th. 8 et le théorème de Lebesgue, p. 49, les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $L(I)$ sont alors presque partout dérivables dans I_0. Nous allons montrer successivement que l'on a presque partout les deux relations:

$$L'(t) \geqslant \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \tag{8.5}$$

et

$$L'(t) \leqslant \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \tag{8.6}$$

On a, en effet, pour tout intervalle $[t, t+h]$ où $a \leqslant t < t+h \leqslant b$ l'inégalité $L(t, t+h) \geqslant \sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2}$, ce qui entraîne, en divisant par h et en passant à la limite pour $h \to 0$, la relation (8.5) dans tout point $t \in I_0$ où toutes les trois fonctions sont simultanément dérivables, c. à d. presque partout dans I_0.

Pour établir à son tour la relation (8.6), désignons par E l'ensemble de tous les points $t \in I_0$ où les trois dérivées $x'(t)$, $y'(t)$ et $L'(t)$ existent et remplissent l'inégalité $L'(t) > \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$, et par E_n, pour tout n naturel, l'ensemble des points $t \in E$ où les inégalités $a \leqslant t \leqslant b$ et $0 < b - a < \frac{1}{n}$ entraînent, quel que soit l'intervalle $I = [a, b]$ contenu dans l'intervalle I_0, l'inégalité suivante $\frac{L(a,b)}{b-a} > \sqrt{\left[\frac{x(b) - x(a)}{b-a}\right]^2 + \left[\frac{y(b) - y(a)}{b-a}\right]^2} + \frac{1}{n}$, qui équivaut à

$$L(a, b) - \rho[p(a), p(b)] > \frac{b-a}{n}. \tag{8.7}$$

On a par définition

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n . \tag{8.8}$$

Or, pour tout n naturel et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe évidemment une chaîne $\tau = \{a_0 = t_0, t_1, \dots, t_m = b_0\}$ telle que l'on ait à la fois $|t_j - t_{j-1}| < \frac{1}{n}$ et $L(a_0, b_0) < \Lambda(\tau) + \varepsilon$, c. à d. que

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ L(t_{j-1}, t_j) - \sqrt{[x(t_j) - x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j) - y(t_{j-1})]^2} \right\} < \varepsilon. \tag{8.9}$$

Mais pour tout $j = 1, 2, \dots, m$ on a selon l'inégalité (8.1) $L(t_{j-1}, t_j) \geqslant \sqrt{[x(t_j) - x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j) - y(t_{j-1})]^2}$; si l'on désigne donc par $\sum_j^{(n)}$ la somme s'étendant seulement sur les indices j des intervalles $[t_j, t_{j-1}]$ qui renferment des points de E_n, on en tire en vertu de (8.7) et (8.9) successivement $|E_n| \leqslant \sum_j^{(n)} (t_j - t_{j-1}) <$

$$< n \sum_j^{(n)} [L(t_{j-1}, t_j) - \rho(p(t_{j-1}), p(t_j))] < n \sum_{j=1}^{m} [L(t_{j-1}, t_j) - \rho(p(t_{j-1}), p(t_j))] <$$

$< n \cdot \varepsilon$, d'où, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, $|E_n| = 0$ quel que soit n, ce qui entraîne en vertu de (8.8) que $|E| = 0$ et par conséquent que l'on a presque partout la relation (8.6), c. q. f. d.

Ce théorème est dû à M. L. Tonelli [4]; cf. aussi F. Riesz [4].