

CHAPITRE II.

Mesure de Lebesgue. Ensembles et fonctions mesurables.**Préliminaires.**

§ 1. Toutes les définitions et théorèmes de ce chapitre seront énoncés dans le langage planimétrique, quoiqu'ils concernent (bien entendu, avec des modifications terminologiques évidentes) non seulement \mathbf{R}_2 (le plan), mais aussi bien \mathbf{R}_1 (la droite) et tout espace \mathbf{R}_n où $n > 2$.

La Géométrie élémentaire fait correspondre d'une façon univoque à certains ensembles de points dans le plan les nombres bien déterminés qui s'appellent *aires* de ces ensembles. Dans les cours usuels de Géométrie la classe de ces ensembles n'est pas précisée davantage, mais elle embrasse toujours les polygones et, plus généralement, les parties du plan limitées par un nombre fini des lignes polygonales (fermées). Les *figures* (figures élémentaires) au sens du chapitre précédent (voir p. 5) y appartiennent donc en tout cas, et, de plus, l'aire que nous leur avons assignée coïncide avec celle de la Géométrie élémentaire.

En dehors de ces ensembles, la Géométrie élémentaire introduit les définitions supplémentaires qui font correspondre des aires à un certain nombre d'autres figures (cercle, ellipse, etc.). Mais c'est seulement aux recherches générales relevant de la Théorie des ensembles que nous devons une extension méthodique de la notion d'aire aux classes bien plus vastes d'ensembles. Il est remarquable que ces recherches, qui ont conduit aux théories contemporaines de la *mesure des ensembles*, se soient développées beaucoup moins à la suite des problèmes de Géométrie qu'en rapport avec ceux de l'Analyse, avant tout avec la tendance de généraliser et de préciser la notion d'intégrale définie.

On en trouve parfois l'expression même dans la terminologie: ainsi du Bois-Reymond appelle *intégrables* les ensembles que nous appelons aujourd'hui de mesure nulle au sens de Jordan.

Les théories de la mesure ont subi au cours de leur développement des modifications parallèles à l'évolution des exigences de la Théorie des fonctions. Dans notre exposé, c'est la théorie de H. Lebesgue qui jouera le rôle le plus important; nous lui consacrons ce chapitre. Il est cependant à noter que le terrain en a été préparé par des théories plus anciennes, liées aux noms de Cantor, Stolz, Harnack, du Bois-Reymond, Peano, Jordan, etc., mais n'ayant à l'heure actuelle qu'une valeur plutôt historique. En particulier, ce sont les idées de Jordan qui semblent avoir influencé la pensée de H. Lebesgue.

Pour mieux comprendre en quoi consiste le progrès apporté par M. Lebesgue, envisageons les méthodes dont on procédait avant lui. Comme on sait, la Géométrie élémentaire définit l'aire (le volume) des figures curvilignes, en les approchant *du dedans* et *du dehors* par deux suites de figures construites *ad hoc* et dont les aires (volumes) se trouvent définies auparavant. Les théories générales de la mesure se sont inspirées de la même méthode, en établissant toutefois les deux modes d'approximation de manière qu'ils soient applicables aux ensembles les plus généraux. Or, l'identité des résultats, que donne en Géométrie élémentaire l'approximation par figures inscrites et circonscrites, disparaît lorsqu'on passe aux ensembles arbitraires, d'où la nécessité de distinguer (dans les théories générales) de deux mesures, appelées le plus souvent *mesure intérieure* et *extérieure*.

Dans la théorie de Peano-Jordan la mesure extérieure d'un ensemble borné quelconque E est la borne inférieure des sommes des aires de rectangles d'une famille finie \mathbf{S} couvrant E , lorsqu'on fait varier \mathbf{S} tant que l'on veut. L'heureuse idée de M. Lebesgue consiste à faire remplacer dans cette définition les systèmes \mathbf{S} finis par *finis ou dénombrables*: cette modification, insignifiante en apparence, a eu pour conséquence une série de nouvelles propriétés, dont ne jouissait aucune des théories précédentes, et grâce auxquelles la théorie lebesgienne de la mesure est devenue une base des généralisations importantes des anciennes méthodes d'intégration.

La mesure lebesgienne a subi à son tour des généralisations ultérieures dans plusieurs directions. Telles sont les relativisations qui ont conduit M. Ch. J. de la Vallée-Poussin [I, Chap. VI] et [1] à la notion de poids extérieur et qui se prêtent comme base naturelle à l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes; les extensions plus abstraites, dues à M. C. Carathéodory [II, Chap. V] (cf. aussi H. Hahn [I, Chap. VI]); la notion de *mesure k -dimensionnelle* dans les espaces à $n \geq k$ dimensions, due essentiellement au même auteur et qui, développée et approfondie récemment par M. A. Besicovitch [1] l'a conduit à des généralisations importantes de certains résultats de la théorie lebesgienne des fonctions. Cf. aussi F. Hausdorff [1], W. Sierpiński [5] et A. Kolmogoroff [3].

Mesure extérieure.

§ 2. Soit \mathbf{S} une famille quelconque de rectangles, finie ou dénombrable. Désignons par $\sigma(\mathbf{S})$ la somme des aires des rectangles qui appartiennent à \mathbf{S} ; c'est donc toujours un nombre réel non négatif, fini ou infini.

Etant donné un ensemble arbitraire $E \subset \mathbf{R}_2$, nous appellerons *mesure extérieure* de E et désignerons par $m_e(E)$ la borne inférieure des nombres $\sigma(\mathbf{S})$, lorsque \mathbf{S} parcourt toutes les familles de rectangles couvrant E .

Nous allons démontrer d'abord que la mesure extérieure ainsi définie constitue, en effet, une généralisation de l'aire d'intervalle, à savoir que pour les rectangles et, plus généralement, pour les figures élémentaires R elle coïncide avec leur aire $|R|$.

Couvrons à ce but R par une famille \mathbf{S} quelconque de rectangles, finie ou dénombrable. Remplaçons, pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné, tout rectangle K de \mathbf{S} par un rectangle K^* contenant K dans son intérieur et tel que

$$(2.1) \quad |K^*| \leq (1 + \varepsilon) \cdot |K|.$$

Les intérieurs des rectangles K^* ainsi obtenus forment une famille d'ensembles ouverts qui couvre R . En vertu du th. de Borel-Lebesgue (Chap. I, § 4, p. 5) il en existe par conséquent un nombre fini $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*$ tel qu'on a $R \subset \sum_{i=1}^n K_i^*$. On en déduit aussitôt par un raisonnement banal de Géométrie élémentaire que $|R| \leq \sum_{i=1}^n |K_i^*|$, donc selon (2.1) que $|R| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \sigma(\mathbf{S})$.

Or, le nombre ε et la famille \mathbf{S} qui couvre R étant arbitraires, il en résulte par définition de la mesure extérieure que

$$(2.2) \quad |R| \leq m_e(R).$$

D'autre part, divisons R d'une manière quelconque en nombre fini de rectangles n'empiétant pas les uns sur les autres. Nous obtenons ainsi une famille de rectangles \mathbf{S}_0 , couvrant R et on a $\sigma(\mathbf{S}_0) = |R|$, d'où $|R| \geq m_e(R)$, ce qui donne en vertu de (2.2) l'égalité $|R| = m_e(R)$.

Ce résultat nous permet de simplifier la notation par l'extension du signe $| \cdot |$, réservé jusqu'à présent pour l'aire de

figures, à la mesure extérieure d'un ensemble quelconque. Nous écrirons donc dorénavant $|E|$ au lieu du symbole plus compliqué $m_e(E)$.

Les ensembles de mesure extérieure nulle s'appelleront tout court *ensembles de mesure nulle*. Lorsqu'une propriété (V) se présente pour tous les points d'un ensemble E , sauf pour des points d'un sous-ensemble de mesure nulle de E , nous dirons (suivant M. Lebesgue) que *presque tous* les points de E jouissent de la propriété (V) ou bien que la condition (V) y est remplie *presque partout*.

Une conséquence immédiate de la définition de la mesure extérieure est que tout ensemble fini est de mesure nulle. Le théorème qui va suivre implique en particulier qu'il en est de même de tout ensemble dénombrable, ce qui est d'ailleurs facile à prouver directement.

§ 3. **Théorème 1.** *On a pour toute suite finie ou infinie d'ensembles $\{E_n\}$*

$$\left| \sum_n E_n \right| \leq \sum_n |E_n|.$$

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon > 0$ arbitraire, couvrons tout E_n d'une famille \mathbf{S}_n de rectangles tels que $\sigma(\mathbf{S}_n) \leq |E_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ et posons $\mathbf{S} = \sum_n \mathbf{S}_n$. Il en résulte que \mathbf{S} couvre la somme $\sum_n E_n$, donc $\left| \sum_n E_n \right| \leq \sigma(\mathbf{S}) \leq \sum_n \sigma(\mathbf{S}_n) \leq \sum_n |E_n| + \varepsilon$, ce qui entraîne l'inégalité à démontrer, lorsque ε tend vers 0.

Théorème 2. *Il existe pour tout ensemble E et pour tout $\varepsilon > 0$:*
1° *un ensemble ouvert G tel que*

$$E \subset G \text{ et } |G| \leq |E| + \varepsilon,$$

2° *un ensemble H étant un G_δ et tel que*

$$E \subset H \text{ et } |H| = |E|.$$

Démonstration. Couvrons E d'une famille dénombrable $\mathbf{S} = \{K_n\}$ de rectangles telle que

$$(3.1) \quad |E| \geq \sigma(\mathbf{S}) - \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n |K_n| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

A tout rectangle K_n faisons correspondre un rectangle K_n^* contenant K_n dans son intérieur et tel que

$$(3.2) \quad |K_n| > |K_n^*| - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

En posant $G = \sum_n (K_n^*)^o$, on a donc $E \subset \sum_n K_n \subset G$ et, selon (3.1) et (3.2), $|E| \geq \sum_n \left(|K_n^*| - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_n |K_n^*| - \varepsilon > |G| - \varepsilon$.

2° Faisons correspondre à E pour tout n naturel un ensemble ouvert G_n tel que $E \subset G_n$ et $|G_n| \leq |E| + \frac{1}{n}$, ce qui est possible en vertu de 1°. L'ensemble $H = \prod_n G_n$ est évidemment un G_δ cherché.

Ensembles mesurables.

§ 4. Un ensemble E est dit *mesurable*, lorsqu'il existe un ensemble ouvert G tel que

$$(4.1) \quad E \subset G \text{ et } |G - E| < \varepsilon.$$

Cette condition est analogue à celle du th. 2 (1°), mais elle est essentiellement plus restrictive: il existe en effet des ensembles non mesurables (bien que les ensembles dont on a, au moins jusqu'à présent, affaire en Analyse soient tous mesurables). Le premier exemple d'ensemble non mesurable a été signalé par G. Vitali en 1905. Bien que nous disposons aujourd'hui d'un grand nombre des méthodes conduisant aux ensembles non mesurables, elles s'appuient toutes sur l'ainsi dit *axiome du choix* de M. E. Zermelo et nous ne connaissons jusqu'à présent aucun exemple *effectif* de l'ensemble non mesurable; pour les détails voir W. Sierpiński [2].

La mesure extérieure d'un ensemble mesurable E s'appelle tout court sa *mesure* et s'écrit $m(E)$ au lieu de $m_e(E)$; nous continuerons cependant d'employer le symbole $|E|$ pour désigner la mesure extérieure aussi bien des ensembles E mesurables que des non mesurables.

La définition des ensembles mesurables montre aussitôt que tous les ensembles ouverts sont mesurables. De même, on conclut immédiatement du th. 2 que tout ensemble de mesure nulle est mesurable. Nous allons montrer qu'il en est encore de même des ensembles fermés et que les opérations d'addition et de multiplication des suites (finies ou infinies) d'ensembles ne conduisent pas au delà des ensembles mesurables.

Théorème 3. *La somme d'une suite (finie ou dénombrable) d'ensembles mesurables est un ensemble mesurable.*

Démonstration. Soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles mesurables et $E = \sum_n E_n$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe pour tout n un ensemble ouvert G_n tel que $E_n \subset G_n$ et $|G_n - E_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. En posant $G = \sum_n G_n$, on obtient en conséquence $E \subset G$ et, en vertu du th. 1, p. 25, $|G - E| \leq \sum_n |G_n - E_n| \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, ce qui prouve que l'ensemble E est mesurable.

Lemme. *Etant donnés deux ensembles quelconques fermés, bornés et disjoints F_1 et F_2 , on a*

$$(4.2) \quad |F_1 + F_2| = |F_1| + |F_2|.$$

Démonstration. Soit, pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné, \mathbf{S} une famille finie de rectangles couvrant $F_1 + F_2$ et telle que

$$(4.3) \quad \sigma(\mathbf{S}) < |F_1 + F_2| + \varepsilon.$$

Nous pouvons évidemment admettre que tous les rectangles de \mathbf{S} soient de diamètre inférieur à $\rho(F_1, F_2)$, donc qu'aucun d'eux n'ait des points communs avec F_1 et F_2 à la fois. En désignant par \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 les sous-familles de \mathbf{S} dont les rectangles admettent respectivement des points communs avec F_1 et F_2 , l'ensemble F_1 se trouvera entièrement couvert par \mathbf{S}_1 , de même que F_2 par \mathbf{S}_2 , et on aura $\sigma(\mathbf{S}) \geq \sigma(\mathbf{S}_1) + \sigma(\mathbf{S}_2)$. On en tire donc selon (4.3) que $|F_1 + F_2| > \sigma(\mathbf{S}) - \varepsilon \geq \sigma(\mathbf{S}_1) + \sigma(\mathbf{S}_2) - \varepsilon \geq |F_1| + |F_2| - \varepsilon$, d'où, ε étant arbitraire, $|F_1 + F_2| \geq |F_1| + |F_2|$, ce qui donne en vertu du th. 1, p. 25, l'égalité (4.2).

Théorème 4. *Tous les ensembles fermés sont mesurables.*

Démonstration. Tout ensemble fermé non borné situé dans un espace euclidien quelconque se laissant représenter comme somme d'une suite d'ensembles fermés bornés, la démonstration se réduit en raison du th. 3 au cas où l'ensemble F donné est borné.

Soit, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, G un ensemble ouvert tel que

$$(4.4) \quad F \subset G \text{ et } |G| < |F| + \varepsilon.$$

L'ensemble $H = G - F$ est donc ouvert et il se laisse par conséquent représenter comme somme d'une suite de rectangles $\{K_n\}$ n'empiétant pas les uns sur les autres.

On peut le faire p. ex. comme suit: $\{P_n\}$ désignant une suite régulière des réseaux (cf. Chap. I, § 5), soient $\{K_n^1\}$ la suite (finie ou dénombrable) des carrés du réseau P_1 qui sont contenus dans H et $\{K_n^i\}$ pour $i=2, 3, \dots$ celle des carrés de P_i qui sont contenus dans H , sans l'être dans aucun carré de $\{K_n^{i-1}\}$. La somme des carrés de toutes les suites $\{K_n^i\}$ ainsi définies coïncide, comme on le voit aisément, avec l'ensemble H et aucun de ces carrés n'empiète sur un autre.

Pour tout n l'ensemble $\sum_{i=1}^n K_i \cdot F$ est donc vide, d'où, en vertu du lemme précédent et de (4.4), on a $|\sum_{i=1}^n K_i| + |F| = |\sum_{i=1}^n K_i + F| < |G| < |F| + \varepsilon$ et par conséquent $\sum_{i=1}^n |K_i| < \varepsilon$, de sorte que $\sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$. On a donc finalement $|G - F| = |H| < \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$, ce qui prouve en raison de (4.4) que l'ensemble F est mesurable.

Théorème 5. *Le complémentaire d'un ensemble mesurable est un ensemble mesurable.*

Démonstration. Etant donné un ensemble mesurable A , il existe pour tout n naturel un ensemble ouvert G_n tel que $A \subset G_n$ et $|G_n - A| < n^{-1}$. En posant donc $F_n = C G_n$, on obtient une suite $\{F_n\}$ d'ensembles fermés tels que

$$F_n \subset CA \text{ et } |CA - F_n| = |G_n - A| < \frac{1}{n} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

Par conséquent $|CA - \sum_n F_n| = 0$, de sorte qu'on peut poser

$$CA = H + \sum_n F_n,$$

où H est un ensemble de mesure nulle, donc sûrement mesurable. Il en résulte aussitôt en vertu des th. 3 et 4 que l'ensemble CA est mesurable, c. q. f. d.

Théorème 6. *Pour qu'un ensemble A soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé F tel que*

$$(4.5) \quad F \subset A \text{ et } |A - F| < \varepsilon.$$

Démonstration. En raison du th. 5, pour qu'un ensemble A soit mesurable, il faut et il suffit que CA le soit, c. à d. que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble ouvert G tel qu'on ait les relations $CA \subset G$ et $|G - CA| < \varepsilon$; or, elles sont équivalentes aux relations (4.5) pour l'ensemble fermé $F = CG$.

On remarquera que la propriété (4.5), qui caractérise selon le th. 6 les ensembles mesurables, est symétrique à la propriété (4.1), qui les caractérise par définition (cf. p. 26). L'une concerne l'approximation des ensembles mesurables du dehors par des ensembles ouverts qui les contiennent et l'autre du dedans par des ensembles fermés qu'ils contiennent.

Théorème 7. *Le produit d'une suite d'ensembles mesurables, de même que la différence de deux ensembles mesurables, est un ensemble mesurable.*

Démonstration. Soit $A = \prod_n A_n$ où les ensembles A_n sont mesurables. On a alors $A = C \sum_n C A_n$ et en appliquant les th. 3 et 5, on constate tour à tour que $C A_n$, $\sum_n C A_n$ et enfin A sont des ensembles mesurables.

D'autre part, A et B étant mesurables, l'ensemble $A - B$ l'est également en vertu de l'identité $A - B = A \cdot CB$, lorsqu'on y applique le th. 5 et la première partie du th. 7, qui vient d'être établie.

§ 5. Théorème 8. *La mesure de la somme d'une suite d'ensembles mesurables disjoints est égale à la somme de leurs mesures.*

Démonstration. Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints. Il s'agit de montrer que

$$(5.1) \quad \left| \sum_n A_n \right| = \sum_n |A_n|.$$

Admettons pour l'instant que

(a) *chacun des ensembles A_n est borné.*

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe en vertu du th. 6 pour tout n naturel un ensemble fermé F_n tel que $F_n \subset A_n$ et $|A_n - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Pour tout m , on a par conséquent en vertu du lemme du § 4, p. 27,

$$\left| \sum_n A_n \right| \geq \left| \sum_{n=1}^m F_n \right| = \sum_{n=1}^m |F_n| \geq \sum_{n=1}^m |A_n| - \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ce qui donne à la limite pour $m \rightarrow \infty$ l'inégalité $\left| \sum_n A_n \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| - \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité (5.1) en vertu du th. 1, p. 25.

2° Ceci établi, nous pouvons supprimer facilement la restriction (a), en représentant chaque A_n où $n=1, 2, \dots$ comme somme d'une suite finie ou infinie d'ensembles mesurables disjoints et bornés $\{A_n^i\}$.

On obtient une telle décomposition, en posant p. ex. $A_n^i = A_n \cdot (K_i - K_{i-1})$, où K_i désigne pour tout i naturel le cercle de rayon i et de centre à l'origine des coordonnées.

On a donc $A_n = \sum_i A_n^i$ pour $n = 1, 2, \dots$, d'où $\sum_n A_n = \sum_n \sum_i A_n^i$, ce qui donne par l'application du résultat obtenu dans l'hypothèse (a) aux ensembles bornés A_n^i

$$\left| \sum_n A_n \right| = \sum_n \sum_i |A_n^i| = \sum_n \left| \sum_i A_n^i \right| = \sum_n |A_n|,$$

c. à d. l'égalité (5.1), q. f. d.

Théorème 9. *La mesure de la limite d'une suite monotone d'ensembles mesurables de mesure finie est égale à la limite de la suite de leurs mesures.*

Démonstration. Soit $\{A_n\}$ une suite monotone d'ensembles mesurables et $A = \lim_n A_n$.

Si la suite $\{A_n\}$ est ascendante, on aura $A = \sum_n A_n = A_1 + \sum_n (A_{n+1} - A_n)$, d'où, selon le th. 8, $|A| = |A_1| + \sum_n |A_{n+1} - A_n| = |A_1| + \sum_n (|A_{n+1}| - |A_n|) = \lim_n |A_n|$. Si cette suite est, par contre, descendante, on aura $A_1 = A + \sum_n (A_n - A_{n+1})$, d'où, encore selon le th. 8, $|A_1| = |A| + \sum_n |A_n - A_{n+1}| = |A| + \sum_n (|A_n| - |A_{n+1}|) = |A| + |A_1| - \lim_n |A_n|$, donc $|A| = \lim_n |A_n|$, c. q. f. d.

§ 6. Le th. 9 se laisse étendre (pour les suites ascendantes seulement) aux ensembles arbitraires, c. à d. pas nécessairement mesurables. On a notamment le

Théorème 10. *La mesure extérieure de la somme d'une suite monotone ascendante d'ensembles est égale à la limite de la suite de leurs mesures extérieures.*

Démonstration. $\{A_n\}$ étant une suite ascendante d'ensembles, soit $A = \lim_n A_n = \sum_n A_n$. Il s'agit de prouver que $|A| = \lim_n |A_n|$, mais en raison de la relation $A \supset A_n$, donc de l'inégalité $|A| \geq |A_n|$, il suffit de montrer que $|A| \leq \lim_n |A_n|$.

Soit à ce but $\{G_n\}$ une suite d'ensembles ouverts tels que

$$(6.1) \quad A_n \subset G_n \text{ et } |A_n| \geq |G_n| - \frac{1}{n} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

Posons $H_n = \prod_{m=n}^{\infty} G_m$. Les ensembles H_n forment une suite ascendante d'ensembles qui sont des G_δ , donc (voir th. 7, p. 29) mesurables. Il s'en suit en vertu du th. 9 que

$$\left| \sum_n H_n \right| = \lim_n |H_n|$$

et comme d'après (6.1) on a pour tout n naturel $A_n \subset H_n \subset G_n$, $A \subset \sum_n H_n$ et $|H_n| \geq |A_n| \geq |H_n| - \frac{1}{n}$, l'égalité qui précède implique par définition de A que $|A| \leq \left| \sum_n H_n \right| = \lim_n |H_n| = \lim_n |A_n|$, c. q. f. d.

Théorème 11. *Chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit mesurable:*

a) *il existe un ensemble G_δ contenant E et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle;*

b) *il existe un F_σ contenu dans E et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle;*

c) *condition de C. Carathéodory¹⁾: quel que soit l'ensemble A , on a $|A| = |A \cdot E| + |A - E|$.*

Démonstration. Les ensembles F_σ et G_δ étant mesurables (cf. le th. 3, p. 27), la condition a) est une conséquence directe de la définition des ensembles mesurables et la condition b) en est une des th. 7, p. 29, et 3, p. 27.

Pour établir la nécessité de la condition c), soient: E un ensemble mesurable, A un ensemble quelconque et (cf. th. 2, p. 25) H un ensemble G_δ contenant A et tel que $|H| = |A|$. En vertu du th. 8, p. 29, on a alors $|A| = |H| = |H \cdot E| + |H - E| \geq |A \cdot E| + |A - E|$ et d'autre part, en vertu du th. 1, p. 25, l'inégalité inverse $|A| \leq |A \cdot E| + |A - E|$, d'où l'égalité à démontrer.

Enfin, pour montrer que la condition c) est suffisante, admettons que l'ensemble donné E la remplisse et désignons par S_n le cercle de rayon n et de centre situé à l'origine des axes de coordonnées.

¹⁾ énoncée par C. Carathéodory en rapport avec sa théorie générale (abstraite) de la mesure, comme définition des ensembles mesurables [1], voir plus haut § 1, p. 24.

En vertu du th. 2, p. 25, il existe pour tout n naturel un ensemble H_n étant un G_δ et satisfaisant aux conditions

$$(6.2) \quad S_n \cdot E \subset H_n \text{ et } |S_n \cdot E| = |H_n|.$$

La condition c) entraîne d'autre part, en y posant $A = H_n$, que $|H_n| = |H_n \cdot E| + |H_n - E| \geq |S_n \cdot E| + |H_n - E|$. Comme $|H_n| < \infty$, on en tire d'après (6.2) l'égalité $|H_n - E| = 0$.

Posons $H = \sum_n H_n$. On a donc $|H - E| \leq \sum_n |H_n - E| = 0$, et $E \subset H$. Ainsi H est un ensemble mesurable comme somme d'une suite d'ensembles G_δ , il contient E et en diffère par un ensemble mesurable (de mesure nulle). Il en résulte en vertu du th. 7, p. 29, que l'ensemble E est mesurable, c. q. f. d.

La deuxième partie du th. 2, p. 25, peut être établie à présent dans la forme plus générale suivante (dont elle est un cas particulier pour A désignant le plan entier):

Théorème 12. *Pour tout ensemble E il existe un ensemble H étant un G_δ , contenant E et tel que l'on ait pour tout ensemble mesurable A*

$$(6.3) \quad |E \cdot A| = |H \cdot A|.$$

Démonstration. Il suffit évidemment d'établir l'existence d'un H mesurable qui remplisse l'égalité (6.3) pour tout ensemble mesurable A . En effet, en vertu du th. 11, a), un tel ensemble H pourra être à son tour remplacé par un G_δ qui le contient et n'en diffère que par un ensemble de mesure nulle.

L'ensemble E donné peut être de mesure infinie; nous allons donc le représenter d'abord comme somme d'une suite ascendante $\{E_n\}$ d'ensembles bornés. Ensuite, nous ferons correspondre à tout E_n un ensemble K_n , étant un G_δ , contenant E_n et tel que

$$(6.4) \quad |E_n| = |K_n|.$$

Posons enfin

$$(6.5) \quad H_n = \prod_{m=n}^{\infty} K_m \text{ et } H = \sum_n H_n.$$

Comme produits des suites d'ensembles mesurables, les ensembles H_n sont mesurables. Il en est donc de même de leur somme H .

Reste à montrer que H remplit la condition (6.3) pour tout A mesurable. On a, en effet, d'après (6.5) pour tout n naturel

$$(6.6) \quad E_n \subset H_n \subset K_n,$$

ce qui implique d'une part selon (6.4) que

$$(6.7) \quad |E_n| = |H_n|$$

et d'autre part que $|E_n - A| \leq |H_n - A|$. Or, les nombres $|E_n|$ et $|H_n|$ étant finis est selon (6.7) égaux, on déduit de la dernière inégalité en vertu du th. 11 c) que

$$|E_n \cdot A| = |E_n| - |E_n - A| \geq |H_n| - |H_n - A| = |H_n \cdot A|,$$

donc, par définition de E , on a conformément au th. 9

$$|E \cdot A| \geq \lim_n |E_n \cdot A| \geq \lim_n |H_n \cdot A| = |H \cdot A|,$$

ce qui entraîne l'égalité (6.3), puisque $E \subset H$.

Théorème de Vitali.

§ 7. Dans la théorie des fonctions de variable réelle les théorèmes sur l'ainsi dit *recouvrement des ensembles*¹⁾ jouent fréquemment un rôle important; tel est p. ex. le théorème de Borel-Lebesgue (voir Chap. I, § 4, p. 5). Nous allons nous occuper maintenant d'un autre théorème de ce genre, dit théorème de Vitali, et qui joue un rôle fondamental dans la théorie de Lebesgue.

Etant donné un ensemble quelconque E , nous dirons qu'une famille \mathbf{Q} de carrés *couvre* E au sens de Vitali, lorsque tout point x de E est couvert par un carré de \mathbf{Q} de diamètre aussi petit que l'on veut, c. à d. lorsque, quel que soit $\varepsilon > 0$ donné d'avance, il existe dans \mathbf{Q} pour tout point $x \in E$ un carré Q tel que $\delta(Q) < \varepsilon$ et $x \in Q$.

Il résulte immédiatement de cette définition que si E est contenu dans un ensemble ouvert G , la sous-famille de \mathbf{Q} formée de tous les carrés de \mathbf{Q} qui sont contenus dans G couvre E également dans le sens de Vitali.

¹⁾ „Überdeckungssätze“ des auteurs allemands.

Théorème 13 (de Vitali). *Si une famille de carrés \mathbf{Q} couvre au sens de Vitali un ensemble borné E^1 , il existe dans \mathbf{Q} une suite finie ou dénombrable de carrés disjoints $\{Q_n\}$ telle que*

$$(7.1) \quad |E - \sum_n Q_n| = 0.$$

Démonstration. Soit H un carré quelconque contenant E . Nous pouvons évidemment admettre que H contient aussi tous les carrés de \mathbf{Q} ; en procédant par induction, nous en allons choisir la suite $\{Q_n\}$ de carrés disjoints qui couvre E presque entièrement.

Q_1 désignant un carré arbitraire de \mathbf{Q} , et n premiers carrés disjoints Q_1, Q_2, \dots, Q_n étant supposés définis, désignons par l_n la borne supérieure des longueurs des côtés de tous les carrés de \mathbf{Q} qui n'admettent aucun point commun avec $\sum_{i=1}^n Q_i$ et par

Q_{n+1} un carré quelconque de \mathbf{Q} , disjoint de $\sum_{i=1}^n Q_i$ et dont le côté est de longueur $> \frac{l_n}{2}$. Un tel carré Q_{n+1} existe toujours, à moins

que les carrés Q_1, Q_2, \dots, Q_n ne couvrent entièrement l'ensemble E , donc ne constituent déjà la suite dont il fallait établir l'existence. Nous pouvons admettre par conséquent que cette induction se prolonge indéfiniment, c. à d. que la suite de carrés disjoints $\{Q_n\}$ obtenue de la sorte est infinie.

Pour montrer que la suite $\{Q_n\}$ couvre presque entièrement l'ensemble E , posons

$$(7.2) \quad A = E - \sum_n Q_n$$

et supposons que $|A| > 0$. Désignons pour tout n naturel par λ_n la longueur du côté de Q_n et par Q_n^* le carré de même centre, mais de côté $5\lambda_n$. Le série $\sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \ll |H|$ étant visiblement convergente,

on peut trouver un N naturel tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |Q_n^*| = 25 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |Q_n| < |A|$,

donc que $|A - \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n^*| > 0$. Il existe par conséquent des points de A qui n'appartiennent à aucun Q_n^* pour $n > N$. Soit $x \in A$

¹⁾ La restriction que E soit borné peut être d'ailleurs éliminée facilement.

un tel point. Comme d'après (7.2) x n'appartient pas à $\sum_n Q_n$, donc en particulier à aucun Q_n où $n \leq N$, on peut enfermer x par définition de \mathbf{Q} dans un carré $Q \in \mathbf{Q}$ tel que

$$(7.3) \quad Q \cdot Q_n = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \dots, N.$$

Or, le carré Q admet par contre des points communs avec un au moins des carrés Q_n où $n > N$, car, en désignant par λ la longueur du côté de Q , on aurait dans le cas contraire $\lambda \leq l_n < 2\lambda_{n+1}$ pour tout n naturel, d'où $\lambda \leq \lim_n \lambda_n = 0$, ce qui est impossible.

Soit n_0 la plus petite valeur de n , pour laquelle $Q \cdot Q_{n_0}$ n'est pas vide. Il en résulte d'une part que $Q \cdot Q_n = 0$ pour $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$, d'où

$$(7.4) \quad \lambda \leq l_{n_0-1},$$

et d'autre part, en vertu de (7.3), que $n_0 > N$, ce qui implique par définition de x que ce point n'appartient pas à $Q_{n_0}^*$. Comme contenant à la fois des points de Q_{n_0} et des points n'appartenant pas à $Q_{n_0}^*$ (p. ex. le point x) le carré Q a donc les côtés de longueur $\lambda \geq 2\lambda_{n_0} > l_{n_0-1}$, contrairement à (7.4). Ainsi l'ensemble A ne peut être supposé de mesure positive, c. q. f. d.

Ce théorème, prouvé d'abord par G. Vitali [2] en 1907 a été généralisé ensuite par M. Lebesgue [5], qui y a remplacé les carrés (cubes) par certains ensembles plus généraux, tout en conservant d'ailleurs la marche du raisonnement de Vitali. La démonstration qui précède est due à M. S. Banach [1]. Cf. aussi: T. Radó [3].

Le théorème de Vitali est employé souvent dans une forme un peu différente, que nous donnons ici comme

Théorème 14. *Si une famille de carrés \mathbf{Q} couvre au sens de Vitali un ensemble borné E , il existe dans \mathbf{Q} pour tout $\varepsilon > 0$ une famille finie de carrés disjoints Q_1, Q_2, \dots, Q_N telle que*

$$(7.5) \quad \sum_{n=1}^N |Q_n| - \varepsilon \leq |E| \leq |E \cdot \sum_{n=1}^N Q_n| + \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $E \subset G$, où G est un ensemble ouvert tel que $|G| \leq |E| + \varepsilon$. On peut admettre que G contient tous les rectangles de la famille \mathbf{Q} . En vertu du th. 13, \mathbf{Q} contient une suite $\{Q_n\}$ de carrés disjoints satisfaisant à la condition (7.1).

On en tire d'une part l'inégalité $\sum_n |Q_n| \leq |G| \leq |E| + \varepsilon < +\infty$

et d'autre part, pour un N naturel tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |Q_n| < \varepsilon$, l'inégalité

$|E| = |E \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Q_n| \leq |E \cdot \sum_{n=1}^N Q_n| + \varepsilon$. Les rectangles Q_1, Q_2, \dots, Q_N

satisfont donc à la condition (7.5), c. q. f. d.

Fonctions de point.

§ 8. Nous dirons que $f(x)$ est une *fonction de point* définie dans un espace \mathbf{R}_n ou, plus généralement, dans un ensemble E , lorsqu'à tout point x de cet espace ou de cet ensemble vient correspondre un et un seul nombre réel $f(x)$ fini, ou infini d'un signe déterminé. Deux fonctions de point qui ne diffèrent que tout au plus dans un ensemble de points de mesure nulle, s'appellent *équivalentes*.

Toute fonction de point $f(x)$ dans l'espace \mathbf{R}_n peut être considérée évidemment comme une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables réelles.

L'emploi des fonctions admettant aussi des valeurs infinies pourrait comporter des difficultés à les soumettre aux opérations élémentaires, si l'extension de ces opérations aux „nombres infinis“ ne s'imposait dans les cas concrets d'une manière tellement naturelle qu'il paraît superflu d'en donner ici des définitions spéciales.

Ainsi p. ex. il est clair ce qu'on a à entendre par la somme $a+b$, quand a ou b ou les deux sont des infinités d'un même signe, ou bien par les inégalités $a \geq b$, $a > b$, etc., quand l'un ou même les deux membres sont infinis. Enfin, dans des cas douteux, il est facile de présumer les restrictions convenables, même lorsqu'elles ne sont pas explicitement formulées. P. ex. quand il s'agit de la somme de deux fonctions $f(x) + g(x)$, il faut toujours supposer que les points où elles prennent des valeurs infinies de signes opposés sont distincts deux à deux. D'ailleurs, nous aurons le plus souvent affaire dans la suite à des fonctions qui ne prennent des valeurs infinies que dans un ensemble de mesure nulle.

Fonctions mesurables.

§ 9. Etant donnée une condition (propriété) quelconque (V) , désignons d'une façon générale par $E_x[(V)]$ l'ensemble de tous les points de l'espace considéré qui remplissent la condition (V) . Ainsi, p. ex. $f(x)$ désignant une fonction de point et a un nombre donné, le symbole

$$(9.1) \quad E_x[f(x) > a]$$

désigne l'ensemble des points x tels que $f(x) > a$.

Une fonction $f(x)$ s'appelle *mesurable*, lorsque l'ensemble (9.1) est mesurable pour tout nombre fini a .

Il est facile d'apercevoir que *pour qu'une fonction $f(x)$ soit mesurable, il suffit que l'ensemble (9.1) le soit pour les nombres a rationnels*.

En effet, pour tout a réel il existe une suite monotone décroissante de nombres rationnels $\{r_n\}$ qui converge vers a . On a donc $E_x[f(x) > a] = \sum_{n=1}^{\infty} E_x[f(x) > r_n]$ et chacun des sommandes du membre droit étant supposé mesurable, il en est de même de leur somme (voir le th. 3, p. 27).

Toute fonction équivalente à une fonction mesurable est mesurable.

En effet, si les valeurs d'une fonction ne sont modifiées que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, chacun des ensembles (9.1) ne changera également que d'un ensemble de mesure nulle.

Enfin, les égalités

$$E_x[f(x) \leq a] = C E_x[f(x) > a],$$

$$E_x[f(x) \geq a] = \prod_{n=1}^{\infty} E_x\left[f(x) > a - \frac{1}{n}\right],$$

$$E_x[f(x) < a] = C E_x[f(x) \geq a],$$

$$E_x[a < f(x) < b] = E_x[f(x) > a] \cdot E_x[f(x) < b],$$

$$E_x[f(x) > -\infty] = \sum_{n=1}^{\infty} E_x[f(x) > -n],$$

montrent que pour toute fonction mesurable $f(x)$ et pour tout nombre a (ou couple de nombres a, b) leurs membres gauches sont des ensembles mesurables.

Nous allons montrer à présent que les opérations élémentaires effectuées sur des fonctions mesurables conduisent toujours à des fonctions mesurables.

Théorème 15. *Etant données deux fonctions mesurables $f(x)$ et $g(x)$, les ensembles*

$$\mathbb{E}_x [f(x) > g(x)], \quad \mathbb{E}_x [f(x) \geq g(x)] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_x [f(x) = g(x)]$$

sont mesurables.

Le démonstration résulte immédiatement des identités

$$\mathbb{E}_x [f(x) > g(x)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x \left[f(x) > \frac{n}{m} \right] \cdot \mathbb{E}_x \left[g(x) < \frac{n}{m} \right],$$

$$\mathbb{E}_x [f \geq g] = C \mathbb{E}_x [g > f] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_x [f = g] = \mathbb{E}_x [f \geq g] \cdot \mathbb{E}_x [g \geq f].$$

Théorème 16. Si la fonction $f(x)$ est mesurable, $|f(x)|^\alpha$ est aussi une fonction mesurable.

La démonstration résulte de l'identité

$$\mathbb{E}_x [|f(x)|^\alpha > a] = \mathbb{E}_x [f(x) > a^{1/\alpha}] + \mathbb{E}_x [f(x) < -a^{1/\alpha}],$$

qui est vraie pour tout $a \geq 0$, tandis que pour $a < 0$ son membre gauche coïncide avec l'espace entier et constitue par conséquent un ensemble mesurable.

Théorème 17. Toute combinaison linéaire des fonctions mesurables à coefficients constants est une fonction mesurable.

Démonstration. Les identités

$$\mathbb{E}_x [\alpha \cdot f(x) + \beta > a] = \mathbb{E}_x \left[f(x) > \frac{a - \beta}{\alpha} \right] \quad \text{pour } \alpha > 0$$

et

$$\mathbb{E}_x [\alpha \cdot f(x) + \beta > a] = \mathbb{E}_x \left[f(x) < \frac{a - \beta}{\alpha} \right] \quad \text{pour } \alpha < 0,$$

qui se présentent pour toute fonction $f(x)$ et pour tous les nombres α , $\alpha \neq 0$ et β , montrent d'abord que $\alpha \cdot f(x) + \beta$ est une fonction mesurable, lorsque $f(x)$ en est une. Il en résulte ensuite selon le th. 15 en vertu des identités

$$\mathbb{E}_x [\alpha \cdot f + \beta \cdot g > a] = \mathbb{E}_x \left[f > -\frac{\beta}{\alpha} g + \frac{a}{\alpha} \right] \quad \text{pour } \alpha > 0$$

et

$$\mathbb{E}_x [\alpha \cdot f + \beta \cdot g > a] = \mathbb{E}_x \left[f < -\frac{\beta}{\alpha} g + \frac{a}{\alpha} \right] \quad \text{pour } \alpha < 0,$$

que $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ est une fonction mesurable, lorsque $f(x)$ et $g(x)$ le sont.

Théorème 18. Le produit de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable.

Démonstration. f et g étant mesurables, la mesurabilité de leur produit fg s'obtient par l'application des th. 16 et 17 à l'identité

$$fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

et il est facile de voir comment on doit compléter cette démonstration dans le cas où f et g admettent des valeurs infinies.

Théorème 19. Etant donnée une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$, les fonctions

borne sup $f_n(x)$, borne inf $f_n(x)$, $\limsup_n f_n(x)$ et $\liminf_n f_n(x)$ sont aussi mesurables.

Démonstration. La mesurabilité de $h(x) = \text{borne sup}_n f_n(x)$ résulte, toutes les fonctions $f_n(x)$ étant supposées mesurables, de l'identité

$$\mathbb{E}_x [h(x) > a] = \sum_n \mathbb{E}_x [f_n(x) > a].$$

La démonstration pour la borne inférieure s'en obtient par le changement du signe.

Par suite, les fonctions $h_n(x) = \text{borne sup} [f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots]$ sont mesurables, donc il en est de même des fonctions $\limsup_n f_n(x) = \lim_n h_n(x) = \text{borne inf}_n h_n(x)$. Par changement du signe de la fonction $f_n(x)$ on l'établit aussi pour \liminf .

Fort utile dans les applications est encore le

Théorème 20. Toute fonction mesurable non négative est limite d'une suite monotone non décroissante de fonctions mesurables non négatives finies et n'admettant qu'un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Etant donnée une fonction mesurable non négative $f(x)$, posons pour tout n naturel

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{lorsque } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \\ n, & \text{lorsque } f(x) \geq n. \end{cases} \quad \text{où } 1 \leq i \leq 2^n \cdot n,$$

La suite $\{f_n(x)\}$ ainsi définie est monotone et non décroissante. En outre, $\lim_n f_n(x) = f(x)$, quel que soit x , car, si $f(x) < +\infty$, on a pour tout $n > f(x)$ les inégalités $0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n}$, et si $f(x) = +\infty$, on a pour tout n naturel $f_n(x) = n$, d'où $\lim_n f_n(x) = +\infty$.

Remarque. Tous ces théorèmes subsistent, bien entendu, lorsqu'on envisage des fonctions définies seulement dans un ensemble mesurable, p. ex. dans une figure.

Fonctions continues et semicontinues.

§ 10. Soit x un point quelconque appartenant à l'espace où la fonction de point donnée $f(x)$ est définie. Désignons par $K(x, r)$ le cercle (car nous continuons de nous servir de la terminologie plane dans le sens général) de centre x et de rayon $r > 0$. Considérons les bornes des valeurs que la fonction $f(x)$ prend dans ce cercle:

$$M(f; x, r) = \text{borne sup}_{x \in K(x, r)} f(x) \quad \text{et} \quad m(f; x, r) = \text{borne inf}_{x \in K(x, r)} f(x).$$

Lorsque r tend vers 0, ces bornes convergent d'une façon monotone vers certaines limites, qui peuvent être d'ailleurs infinies. Appelons ces limites respectivement *maximum* et *minimum* de la fonction $f(x)$ au point x et désignons les respectivement par $M(f; x)$ et $m(f; x)$, en omettant pour abrégier, s'il y a lieu, la lettre f , dans tous ces symboles.

Le nombre $\omega(f; x) = M(f; x) - m(f; x)$ sera dit *oscillation* de la fonction $f(x)$ au point x .

On a évidemment pour tout point x où la fonction $f(x)$ est définie

$$(10.1) \quad m(x) \leq f(x) \leq M(x).$$

Or, si on a pour un x l'égalité $f(x) = M(x)$ ou l'égalité $f(x) = m(x)$, la fonction f s'appelle en ce point: dans le premier cas *semicontinue supérieurement*, et dans le second *semicontinue inférieurement*. Une fonction qui est dans un certain point finie et semicontinue à la fois supérieurement et inférieurement est dite *continue* en ce point.

Dans le cas de fonction finie d'une variable réelle, cette définition de la continuité coïncide évidemment avec celle donnée au Chap. I, § 14, p. 18.

Les fonctions qui présentent respectivement ces propriétés dans tous les points où elles sont définies, s'appelleront tout court *semicontinues supérieurement*, *semicontinues inférieurement* et *continues*.

On conclut immédiatement de ces définitions que, $f(x)$ étant une fonction semicontinue supérieurement, la fonction $-f(x)$ est semicontinue inférieurement et inversement; ensuite, que la somme de deux fonctions semicontinues supérieurement (inférieurement) l'est également. Bien entendu, pour rendre possible l'addition, il faut supposer que les fonctions sommandes n'atteignent en aucun point des valeurs infinies de signes opposés.

Théorème 21. *L'ensemble de points où une fonction quelconque $f(x)$ est continue, est un G_δ .*

Démonstration. Posons $A_n = E_x [f(x) = \pm \infty] + E_x \left[\omega(f; x) \geq \frac{1}{n} \right]$ et $A = \sum_n A_n$. L'ensemble A est celui de tous les points où la fonction $f(x)$ n'est pas continue. Or, on voit aisément que les ensembles A_n sont fermés, donc que A est un F_σ ; d'où CA est un G_δ , c. q. f. d.

Théorème 22. *Pour qu'une fonction de point $f(x)$ soit semicontinue supérieurement (inférieurement), il faut et il suffit que pour tout nombre a l'ensemble*

$$(10.2) \quad E_x [f(x) \geq a] \quad (E_x [f(x) \leq a])$$

soit fermé.

Démonstration. On peut se borner évidemment au cas des fonctions semicontinues supérieurement, le passage à l'autre cas s'opérant par changement de signe.

Nécessité. Soient $f(x)$ une fonction semicontinue supérieurement, a un nombre quelconque et x_0 un point d'accumulation de l'ensemble (10.2). Pour tout $r > 0$ le cercle $K(x_0, r)$ contient donc dans son intérieur des points de cet ensemble, d'où $M(x_0, r) \geq a$ et par conséquent $M(x_0) \geq a$. Comme par hypothèse $M(x_0) = f(x_0)$, il vient $f(x_0) \geq a$, de sorte que x_0 appartient à l'ensemble (10.2). Cet ensemble est donc fermé.

Suffisance. Admettons que l'ensemble (10.2) soit fermé pour chaque a . L'égalité $M(x) = f(x)$ étant évidente pour tout x où $f(x) = +\infty$, soient x_0 un point tel que $f(x_0) < +\infty$, et a un

nombre quelconque tel que $f(x_0) < a$. L'ensemble $E(a) = \underset{x}{E} [f(x) \geq a]$ étant fermé et ne contenant pas le point x_0 , le cercle $K(x_0, r)$ est, pour un $r = r_a$ suffisamment petit, disjoint de $E(a)$. Donc $a \geq M(x_0, r_a) \geq M(x_0)$ pour tout nombre $a > f(x_0)$, d'où $f(x_0) \geq M(x_0)$ et, en vertu de l'inégalité (10.1), $f(x_0) = M(x_0)$.

Théorème 23. *Toute fonction semicontinue, en particulier toute fonction continue, est mesurable.*

Démonstration. En effet, si une fonction $f(x)$ est semicontinue supérieurement, l'ensemble $\underset{x}{E} [f(x) > a] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E} \left[f(x) > a + \frac{1}{n} \right]$ est en vertu th. 22 un F_{σ} , donc mesurable.

Remarque. Il est facile d'apercevoir que tous les raisonnements de ce § subsistent sans modifications essentielles pour les fonctions définies au lieu que dans l'espace entier, dans un ensemble arbitraire fermé, p. ex. dans une figure.

La notion de semicontinuité a été introduite dans l'Analyse par R. Baire dans sa Thèse [1]; nous n'en avons mentionné ici que les propriétés destinées à intervenir dans la suite. Pour les détails sur les fonctions semicontinues et leurs généralisations, voir H. Hahn [II, Chap. IV, § 36] et F. Hausdorff [II, Chap. IX].

Théorème de Egoroff.

§ 11. Nous terminons ce chapitre par deux théorèmes, l'un dû à D. Egoroff [1] et l'autre à M. N. Lusin [1] (cf. aussi W. Sierpiński [3], F. Riesz [2; 3] et L. W. Cohen [1]). Ces théorèmes appartiennent déjà aux résultats classiques de la Théorie, après avoir donné l'origine à une série des recherches importantes sur la structure générale de la fonction mesurable (cf. p. ex. A. Khintchine [4; 5]).

Lemme. *E étant un ensemble mesurable de mesure finie et $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables et finies dans E, convergente dans cet ensemble vers une fonction mesurable finie $f(x)$, il existe pour chaque couple de nombres positifs ε, η un N naturel et un sous-ensemble H de E tels que l'on a $|H| < \eta$ et*

$$(11.1) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout $n > N$ et pour tout $x \in E - H$.

Démonstration. Désignons d'une façon générale par E_m le sous-ensemble de E formé de points x qui remplissent pour tout $n > m$ l'inégalité (11.1). Ainsi définis, les ensembles E_m sont mesurables et constituent une suite monotone non décroissante, puisqu'on a pour tout m naturel $E_m = \bigcap_{n=m+1}^{\infty} \underset{x}{E} [|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon]$. En outre, par suite de la convergence de $\{f_n(x)\}$ vers $f(x)$ dans E tout entier on a $E = \sum_m E_m$, d'où en vertu du th. 9, p. 30, $|E| = \lim_m |E_m|$, c. à d. $\lim_m |E - E_m| = 0$, donc à partir d'un m_0 suffisamment grand, $|E - E_m| < \eta$. Il ne reste donc qu'à poser $N = m_0$ et $H = E - E_{m_0}$.

Théorème 24 (de Egoroff). *E étant un ensemble mesurable de mesure finie et $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables et finies presque partout dans E, convergente presque partout dans cet ensemble vers une fonction mesurable finie $f(x)$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-ensemble fermé F de E tel que $|E - F| < \varepsilon$ et que la convergence de $\{f_n(x)\}$ vers $f(x)$ dans F est uniforme.*

Démonstration. En supprimant dans E au besoin un ensemble de mesure nulle, on peut admettre que les fonctions $f_n(x)$ soient partout finies dans E et qu'elles y convergent partout vers $f(x)$. En vertu du lemme précédent on peut donc faire correspondre à tout m naturel un ensemble $H_m \subset E$ tel que $|H_m| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ et un indice N_m tel que l'on ait

$$(11.2) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m} \text{ pour } n > N_m \text{ et pour } x \in E - H_m.$$

Posons $E^* = E - \sum_{m=1}^{\infty} H_m$. Il vient

$$(11.3) \quad |E - E^*| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |H_m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, en vertu du th. 6, p. 28, E^* contient un ensemble fermé F tel que $|E^* - F| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où selon (11.3) $|E - F| < \varepsilon$, et on conclut de (11.2) que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers $f(x)$ en tout point de E^* , donc à plus forte raison en tout point de $F \subset E^*$, c. q. f. d.

Théorème de M. Lusin sur les fonctions mesurables.

§ 12. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ définie dans un ensemble mesurable E possède dans cet ensemble la *propriété (C)*, lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé $F \subset E$ tel que la fonction $f(x)$ est continue dans F et que $|E - F| < \varepsilon$.

Lemme. *Si une fonction $f(x)$ mesurable et finie, définie dans un ensemble E mesurable et de mesure finie, n'admet qu'un nombre fini des valeurs différentes, elle possède dans E la propriété (C).*

Démonstration. Soit v_1, v_2, \dots, v_n la suite de toutes les valeurs distinctes que $f(x)$ prend dans E . Désignons pour $i = 1, 2, \dots, n$ par E_i le sous-ensemble de E formé de points x dans lesquels $f(x) = v_i$. Comme ensemble mesurable, E_i contient en vertu du th. 6, p. 28, pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-ensemble fermé F_i tel que $|E_i - F_i| < \frac{\varepsilon}{n}$.

Considérons l'ensemble fermé $F = \sum_i F_i$. On a $F \subset E$ et $|E - F| \leq \sum_i |E_i - F_i| < \varepsilon$. De plus, la fonction finie $f(x)$, comme constante dans chacun des ensembles fermés disjoints $F_i \subset E_i$, est évidemment continue dans F . Elle possède donc la propriété (C) dans E , c. q. f. d.

Théorème 25 (de Lusin). *Pour qu'une fonction $f(x)$, définie dans un ensemble mesurable borné E et partout finie dans cet ensemble, y soit mesurable, il faut et il suffit qu'elle y jouisse de la propriété (C).*

Démonstration. Nécessité. Soit $f(x)$ une fonction mesurable et finie dans un ensemble mesurable et borné E . En vertu du th. 20, p. 39, il existe alors une suite $\{f_n(x)\}$, convergente vers $f(x)$, de fonctions mesurables, finies et dont chacune n'admet qu'un nombre fini de valeurs. D'après le lemme précédent, ces fonctions jouissent de la propriété (C). Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n naturel un ensemble fermé $F_n \subset E$ tel que

$$(12.1) \quad |E - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

et que la fonction $f_n(x)$ est continue dans F_n . Enfin, d'après le th. de Egoroff, § 11, p. 43, les fonctions $f_n(x)$ convergent vers $f(x)$ uniformément dans un ensemble fermé F_0 tel que

$$(12.2) \quad |E - F_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En posant $F = \prod_{n=0}^{\infty} F_n$, la fonction $f(x)$ est dans l'ensemble fermé F la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues; elle est donc continue dans F . En même temps on a selon (12.1) et (12.2) $|E - F| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |E - F_n| < \varepsilon$, de sorte que cette fonction possède la propriété (C) dans E .

Suffisance. Admettons que la fonction $f(x)$ soit finie et possède la propriété (C) sur un ensemble mesurable et borné E . Il existe alors pour tout n un ensemble fermé $F_n \subset E$ tel que $|E - F_n| < \frac{1}{n}$ et que la fonction $f(x)$ est continue dans F_n . On a donc

$$(12.3) \quad E = \sum_n F_n + A \quad \text{où} \quad |A| = 0.$$

Etant donné un a arbitraire, désignons respectivement par $E(a)$, $F_n(a)$ et $A(a)$ les ensembles des points x de E , F_n et A qui satisfont à l'inégalité $f(x) > a$. Nous avons par conséquent selon (12.3)

$$(12.4) \quad E(a) = \sum_n F_n(a) + A(a).$$

Or, la fonction $f(x)$ étant continue, donc en vertu du th. 23, p. 42, mesurable dans tout F_n , chacun des ensembles $F_n(a)$ est mesurable. En outre, l'ensemble $A(a) \subset A$ est de mesure nulle. Il en résulte en vertu de (12.4) et du th. 3, p. 27, que l'ensemble $E(a)$ est mesurable, c. à d. que la fonction $f(x)$ est mesurable dans E .