CHAPITRE I.

Fonctions de figure élémentaire.

Fonctions d'ensemble. Remarques préliminaires.

§ 1. En dehors des fonctions ayant pour argument un nombre variable ou, plus généralement, un système variable de n nombres (point de l'espace à n dimensions), nous allons traiter dans ce livre les fonctions où le rôle de la variable indépendante jouent certains *ensembles* de points. La nature de ces ensembles sera précisée au § 6. Pour le moment, il est à noter que dans plusieurs cas particuliers importants les fonctions de ce genre ont été envisagées déjà par l'Analyse classique, bien que leur étude tout à fait générale n'ait pris naissance que lors du développement de la Théorie des ensembles et en relation étroite avec les parties de l'Analyse qui s'appuient directement sur cette théorie.

Etant donnée p. ex. une fonction $f(x)$ intégrable dans chaque intervalle, on obtient, en faisant correspondre à chaque intervalle I la valeur de l'intégrale de $f(x)$ sur I, une fonction $F(I)$ qui est une fonction d'intervalle. D'une façon analogue, la considération des intégrales multiples des fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables conduit aux fonctions d'ensembles situés dans des espaces à un nombre plus élevé des dimensions; le rôle d'argument I d'une telle fonction $F(I)$ peut jouer n'importe quel ensemble pour lequel l'intégrale de la fonction donnée $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est définie [1].

[1] Il est évident que les ensembles qui peuvent être ainsi considérés comme des valeurs de l'argument I de la fonction $F(I)$ constituent une classe plus ou moins étendue, suivant la définition de l'intégrale qu'on adopte. Or, quelle que soit la définition de l'intégrale que l'on aura choisie parmi celles connues à l'heure actuelle, toute fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, intégrable dans un domaine, l'est toujours dans chaque „cube" contenu dans ce domaine.

Nous insistons sur ces exemples pour faire ressortir la liaison naturelle qui existe entre la notion d'intégrale (dans un sens quelconque) et celle de fonction d'ensemble. On peut, bien entendu, donner beaucoup d'autres exemples des fonctions d'ensemble: la Géométrie élémentaire considère p. ex. la longueur d'un segment ou l'aire d'un polygone; la classe des valeurs de l'argument de ces deux fonctions (longueur, aire) est dans le premier cas la classe des segments et dans le second celle des polygones. Le problème de l'extension de ces classes a donné naissance aux théories générales de la mesure, où les notions de longueur, d'aire et de volume, définies par la Géométrie élémentaire pour un nombre restreint des figures, se trouvent étendues aux ensembles de points bien plus divers [1]).

Termes et notations.

§ **2.** Etant donnés deux ensembles A et B d'objets quelconques, on écrit $A \subset B$ pour exprimer que l'ensemble A est *contenu* dans l'ensemble B, c. à d. que tout élément de A est un élément de B (*appartient* à B).

$A = B$ signifie que les ensembles A et B se composent de mêmes éléments, c. à d. qu'on a simultanément $A \subset B$ et $B \subset A$.

$a \in A$ signifie que a est un élément de l'ensemble A (*appartient* à A).

Etant donnée une famille d'ensembles (c. à d. un ensemble d'ensembles) $\mathbf{A}$, on appelle *somme* des ensembles appartenant à la famille $\mathbf{A}$ l'ensemble de tous les objets dont chacun est un élément au moins d'un ensemble appartenant à la famille $\mathbf{A}$.

On appelle *produit* (ou *partie commune*) des ensembles appartenant à la famille $\mathbf{A}$ l'ensemble de tous les objets qui appartiennent à la fois à tous les ensembles de cette famille.

Il peut arriver qu'il n'y ait pas d'objet appartenant à la fois à tous les ensembles d'une famille considérée. Dans ce cas le produit des ensembles de cette famille est *vide*. Par *l'ensemble vide* on entend l'ensemble n'admettant aucun élément; nous le désignerons par 0.

Si les ensembles de la famille $\mathbf{A}$ forment une suite finie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ou infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, on en désigne la somme

---

[1]) cf. plus loin Chap. II, § 1.

respectivement: par $\sum\limits_i A_i$, par $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ et par $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ dans le cas fini, et par $\sum\limits_i A_i$, par $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ et par $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ dans le cas infini. D'une façon analogue, on désigne alors le produit par $\prod\limits_i A_i$, par $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ ou $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, et par $\prod\limits_n A_n$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ou $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots$ Les ensembles dont le produit deux à deux est vide, c. à d. qui n'ont deux à deux aucun élément commun, s'appellent *disjoints*.

Si, quel que soit n, on a $A_n \subset A_{n+1}$, resp. $A_{n+1} \subset A_n$, la suite $\{A_n\}$ de ces ensembles est dite *monotone*: *ascendante* ou *non décroissante*, resp. *descendante* ou *non croissante*. La somme, d'une suite ascendante, de même que le produit d'une suite descendante, portent aussi le nom de la *limite* de cette suite; elle sera désignée par $\lim\limits_n A_n$.

On appelle *différence* de deux ensembles A et B, et on désigne par $A - B$, l'ensemble de tous les objets qui appartiennent à A, sans appartenir à B.

Un ensemble A est dit *dénombrable*, lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de A et les nombres naturels $1, 2, \ldots, n, \ldots$ ou, ce qui revient au même, lorsqu'il existe une suite infinie $\{a_n\}$ d'éléments distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formée de tous les éléments de l'ensemble A.

§ **3.** Les définitions précédentes appartiennent à l'ainsi dite Théorie des ensembles abstraits, à savoir, qui s'occupe des propriétés des ensembles les plus généraux. Or, les ensembles dont nous allons nous occuper dans la suite seront surtout ceux de points situés dans un espace euclidien. Par l'espace euclidien à n dimensions $\mathbf{R}_n$ nous entendrons ici l'ensemble de tous les systèmes de n nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Chacun de tels systèmes sera regardé comme un *point* de l'espace en question et les nombres x_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$, seront dits les coordonnées du point considéré.

On appelle *distance de deux points* $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $b = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ situés dans $\mathbf{R}_n$ le nombre non négatif $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$; on le désigne par $\rho\,(a, b)$.

Etant donné un ensemble quelconque de points M, la borne supérieure des nombres $\rho(a, b)$ où $a \in M$ et $b \in M$ est dite son *diamètre* et désignée par $\delta(M)$. Si $\delta(M)$ est un nombre fini, l'ensemble M s'appelle *borné*.

Par la *distance des ensembles A et B* on entend la borne inférieure des nombres $\rho(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.

Nous appellerons *entourage* d'un point a de rayon $r > 0$ l'ensemble de tous les points p tels que $\rho(a, p) < r$; on l'appelle aussi *sphère ouverte* de centre a et de rayon r.

Un point p est dit *point d'accumulation* d'un ensemble A, lorsque tout entourage de p contient une infinité de points de A. L'ensemble de tous les points d'accumulation de A s'appelle *ensemble dérivé* de A; on le désigne par A'. L'ensemble $\bar{A} = A + A'$ porte le nom de *fermeture* de l'ensemble A. Lorsque $\bar{A} = A$, l'ensemble A est dit *fermé* ou un F.

Un sous-ensemble A d'un ensemble B s'appelle *fermé relativement à B* ou, tout court, *fermé dans B*, lorsque tout point d'accumulation de A situé dans B appartient à A, c. à d. lorsqu'on a $A = \bar{A} \cdot B$ ou, ce qui revient au même, lorsque l'ensemble A est le produit de l'ensemble B par un ensemble fermé. Quel que soit $A \subset B$, l'ensemble $\bar{A} \cdot B$ s'appelle *fermeture relative de A dans B*.

Un point a d'un ensemble A est nommé son *point intérieur*, lorsqu'il existe un entourage de a contenu dans A. L'ensemble de tous les points intérieurs d'un ensemble A s'appelle son *intérieur*; on le désigne par A°. Lorsque $A = A^{\circ}$, l'ensemble A est dit *ouvert* ou un G.

Si $A \subset \mathbf{R}_n$, on appelle l'ensemble $\mathbf{R}_n - A$ *complémentaire* de A par rapport à l'espace $\mathbf{R}_n$; on le désigne par CA.

Par définition des ensembles F (fermés) et G (ouverts), tout ensemble CF est un G et, réciproquement, tout CG est un F.

La somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'ensembles ouverts, de même que le produit d'un nombre fini de tels ensembles, est toujours un ensemble ouvert. Tout produit d'un nombre fini ou d'une infinité d'ensembles fermés, de même que toute somme d'un nombre fini de tels ensembles, est encore un ensemble fermé.

Cependant le produit, resp. la somme, d'une suite infinie d'ensembles ouverts, resp. fermés, peut ne pas être un ensemble ouvert, resp. fermé. Les produits des suites d'ensembles G seront désignés, selon M. F. Hausdorff [I, p. 23], par G_δ et les sommes des suites d'ensembles F par F_σ.

Les ensembles G_δ et F_σ sont liés par les mêmes relations que les ensembles G et F: le complémentaire d'un F_σ est un G_δ, et réciproquement.

§ 4. Nous allons nous appuyer dans la suite sur les théorèmes suivants de la Théorie des ensembles de points:

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *Tout ensemble infini borné admet au moins un point d'accumulation.*

Théorème de Cantor (dit „*Durchschnittssatz*"). *Etant donnée une suite descendante d'ensembles fermés et bornés, il existe au moins un point appartenant à tout ensemble de cette suite.*

Théorème de Borel-Lebesgue. *Si une famille* $\mathfrak{G}$ *d'ensembles ouverts couvre un ensemble fermé et borné A, il existe un système fini $G_1, G_2, \ldots, G_n$ d'ensembles de cette famille qui couvre A, c. à d. tel que* $A \subset \sum_{i=1}^{n} G_i$.

On trouve les démonstrations de ces trois théorèmes dans n'importe quel cours de la Théorie des ensembles de points et dans presque tous les traités d'Analyse.

Intervalle. Figure élémentaire.

§ 5. Nous allons définir à présent certaines familles d'ensembles élémentaires de points.

Etant donné un système $a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots;\ a_n, b_n$ de $2n$ nombres réels tels que $a_i < b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, nous appellerons *intervalle* $I = [a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots;\ a_n, b_n]$ de l'espace $\mathbf{R}_n$ l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. En particulier, pour $n = 1$ (cas de la droite) l'intervalle est un segment rectiligne; pour $n = 2$ (le plan) il est un rectangle à côtés parallèles aux axes des coordonnées. Dans le cas où $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$ l'intervalle porte le nom de *cube n-dimensionnel*, en particulier, pour $n = 2$ celui de *carré* et pour $n = 1$ de *segment*, le terme „intervalle" coïncidant dans ce dernier cas avec le terme „cube".

Nous appellerons le produit $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$ *l'aire* de l'intervalle I; nous la désignerons par $|I|$.

Nous entenderons par *figure élémentaire* ou, tout court, par *figure* un ensemble qui est soit vide, soit somme d'un nombre fini d'intervalles. On voit immédiatement que toute figure R se laisse décomposer en nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. La somme des aires de ces intervalles sera dite *aire* de la figure R et désignée par $|R|$; il est évident qu'elle ne dépend pas de la manière dont la décomposition de R a été effectuée. Toute somme d'un nombre fini des figures est encore une figure, mais il n'en est pas généralement ainsi d'un produit ou d'une différence de deux figures.

Nous allons introduire ici deux opérations analogues à celles de la multiplication et de la soustraction des ensembles (cf. § 2), mais qui soient telles qu'en les effectuant sur des figures, on obtienne toujours des figures. Ces opérations seront désignées par $\odot$ et $\ominus$ et définies par les relations

$$A \odot B = \overline{(A \cdot B)^{\circ}} \quad \text{et} \quad A \ominus B = \overline{(A - B)^{\circ}}.$$

La relation $A \odot B = 0$ exprime donc que les figures A et B n'ont pas de points intérieurs communs; nous dirons dans ce cas qu'elles *n'empiètent pas* l'une sur l'autre.

Dans la suite nous allons nous servir de certains systèmes de cubes (cubes, carrés, segments) dans l'espace. Nous appellerons notamment *réseau à arête* (coté) ε dans $\mathbf{R}_n$ toute famille de cubes n-dimensionnels à arête de longueur ε, n'empiétant pas les uns sur les autres et dont la somme couvre l'espace $\mathbf{R}_n$ tout entier.

Une suite $\{\mathbf{P}_n\}$ de réseaux sera dite *régulière*, lorsque

1° tout cube du réseau $\mathbf{P}_{n+1}$ est contenu dans un cube du réseau $\mathbf{P}_n$,

2° la longueur ε_n de l'arète de $\mathbf{P}_n$ tend vers 0 avec $n \to \infty$.

Les définitions du *réseau à arête* ε *dans un cube* Q quelconque, et de *la suite régulière de réseaux* dans Q, sont tout à fait analogues.

On remarquera enfin que tout réseau qui couvre l'espace se compose d'une infinité dénombrable de cubes et tout réseau couvrant un cube n'en compte qu'un nombre fini.

Fonctions de figure élémentaire.

§ 6. Si l'on fait correspondre d'une manière univoque à toute figure élémentaire R un nombre fini[1]) $F(R)$, ou à tout intervalle

[1]) Nous n'admettrons comme valeurs des fonctions d'intervalle et de figure que des nombres finis; par contre, les *fonctions de point* (cf. Chap. II, §§ 9—11) pourront prendre aussi des valeurs infinies.

I d'un espace $\mathbf{R}_n$ un nombre fini $F(I)$, nous appellerons respectivement $F(R)$ et $F(I)$ *fonction de figure élémentaire* et *fonction d'intervalle*, définies dans cet espace. On n'envisage parfois que les figures ou les intervalles, situés dans une figure R_0 ou dans un intervalle I_0 ou bien dans un ensemble ouvert G; nous dirons alors que les fonctions $F(R)$ et $F(I)$ sont définies respectivement dans R_0, dans I_0 ou dans G.

Fonctions continues. Oscillation.

§ 7. Une fonction F de figure ou d'intervalle sera dite *continue* dans un intervalle I_0 où elle est définie, lorsque pour tout intervalle $I \subset I_0$ la valeur $F(I)$ tend vers 0 avec l'aire de I (c. à d. lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que $|I| < \eta$ entraîne $|F(I)| < \varepsilon$, quel que soit $I \subset I_0$). Si la fonction $F(R)$ est définie dans l'espace tout entier, sa continuité dans l'espace est à entendre comme la continuité dans tous les intervalles de cet espace.

Nous appellerons *oscillation* de la fonction F dans l'intervalle I_0 le nombre $\omega(F; I_0) = \text{borne sup } |F(I)|$ pour les intervalles $I \subset I_0$; nous l'écrirons tout court $\omega(I_0)$ pour une fonction F fixe. L'oscillation $\omega(I)$ d'une fonction F dans I est donc elle-même une fonction d'intervalle I. Sa continuité équivaut évidemment à celle de la fonction F.

Fonctions additives. Variations.

§ 8. Une fonction de figure $F(R)$ s'appellera *additive*, lorsqu'on a

$$(8.1) \qquad F(R_1 + R_2) = F(R_1) + F(R_2)$$

pour des figures quelconques R_1 et R_2 qui n'empiètent pas l'une sur l'autre. Il en résulte en particulier que pour l'ensemble vide la valeur de toute fonction additive est égale à 0.

On prend quelquefois comme point de départ de l'exposé de la Théorie des fonctions les fonctions additives d'intervalle, c. à d. les fonctions d'intervalle $F(I)$ qui satisfont à la relation (8.1), lorsque R_1, R_2 et $R_1 + R_2$ sont des intervalles. Cependant, il est évident que toute fonction additive d'intervalle se laisse aussitôt étendre de façon à en obtenir une fonction additive de figure, cette extension étant en outre univoque. Comme l'exemple peut servir l'extension de la notion d'*aire*, qui, conformément à sa définition (cf. § 5, p. 6), est une fonction additive de figure.

§ **9.** Nous appellerons respectivement *variation (relative) supérieure* et *inférieure* d'une fonction additive $F(R)$ *sur* une figure R_0 (dans laquelle cette fonction est définie) les bornes

$$\overline{W}(F; R_0) = \operatorname*{borne\ sup}_{R \subset R_0} F(R), \quad \underline{W}(F; R_0) = \operatorname*{borne\ inf}_{R \subset R_0} F(R),$$

où R est une figure quelconque. La fonction F s'annulant sur l'ensemble vide, on a toujours $\overline{W}(F; R_0) \geqslant 0 \geqslant \underline{W}(F; R_0)$.

Par *variation absolue* de la fonction F *sur* R_0 nous entenderons le nombre, visiblement non négatif,

$$W(F; R_0) = \overline{W}(F; R_0) + |\underline{W}(F; R_0)| = \overline{W}(F; R_0) - \underline{W}(F; R_0).$$

Nous écrirons tout court $\overline{W}(R_0)$, $\underline{W}(R_0)$ et $W(R_0)$, lorsque la fonction F est fixée.

Toute fonction $F(R)$ pour laquelle $W(F; R_0)$ est un nombre fini portera le nom de *fonction à variation bornée* dans R_0. Il est évident qu'une fonction à variation bornée dans R_0 l'est également dans toute figure $R_1 \subset R_0$, puisqu'on a alors

$$\overline{W}(F; R_1) \leqslant \overline{W}(F; R_0), \ \underline{W}(F; R_0) \leqslant \underline{W}(F; R_1) \ \text{ et } \ W(F; R_1) \leqslant W(F; R_0).$$

On voit aussi que *la somme, la différence et,* plus généralement, *toute combinaison linéaire* $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ *de deux fonctions additives* F_1 *et* F_2 *à variation bornée est aussi une fonction à variation bornée.*

Nous insistons enfin sur la distinction terminologique qu'il y a lieu à faire entre la variation de la fonction F *sur* R_0 et *dans* R_0. La première de ces expressions désigne, conformément à la définition, simplement le nombre $W(F; R_0)$, tandis que la seconde désignera la fonction additive $W(F; R)$ définie *dans* R_0, c. à d. pour les figures $R \subset R_0$. Une distinction analogue sera appliquée aux deux variations relatives et aux écarts d'une fonction additive (cf. plus loin, § 12).

Décomposition canonique de Jordan.

§ **10.** Toute fonction additive à variation bornée admet par définition les deux variations relatives (supérieure et inférieure) finies. Réciproquement, on aperçoit aussitôt que si l'une quelconque de ces deux variations est finie, il en est de même de l'autre et, par conséquent, de la variation absolue. En effet, si nous avons p. ex. $\overline{W}(F; R_0) < +\infty$, la borne inférieure des nombres

$F(R) = F(R_0) - F(R_0 \ominus R) \geqslant F(R_0) - \overline{W}(F; R_0)$ pour $R \subset R_0$ est également finie et $\underline{W}(F; R_0) \geqslant F(R_0) - \overline{W}(F; R_0) > -\infty$, c. q. f. d. Or, la dernière inégalité peut être écrite aussi dans la forme $F(R_0) \leqslant \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0)$. En y remplaçant la fonction F par $-F$, on obtient l'inégalité inverse $F(R_0) \geqslant \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0)$, donc finalement l'égalité

$$F(R_0) = \overline{W}(F; R_0) + \underline{W}(F; R_0). \tag{10.1}$$

Ainsi, *toute fonction additive est, sur toute figure où elle est définie, égale à la somme de ses deux variations relatives.*

La décomposition de la fonction, donnée par l'égalité (10.1), sera dite *I-e décomposition canonique* de la fonction additive à variation bornée ou la *décomposition* de Jordan.

Fonctions monotones.

§ **11.** Une fonction additive qui ne prend que des valeurs de signe constant, c. à d. soit non négatives, soit non positives, s'appelle *monotone*.

Une fonction $F(R)$ monotone non négative s'appellera aussi *non décroissante*, car pour tout couple de figures R_1, R_2

$$R_1 \supset R_2 \tag{11.1}$$

entraîne alors $F(R_1) = F(R_1 \ominus R_2) + F(R_2) \geqslant F(R_2)$. D'une façon analogue, une fonction $F(R)$ monotone non positive s'appellera également *non croissante*, car la relation (11.1) entraîne dans ce cas l'inégalité $F(R_1) \leqslant F(R_2)$.

Toute fonction monotone est à variation bornée, puisqu'on a pour $F(R)$ non négative les égalités $\overline{W}(F; R) = W(F; R) = F(R)$ et $\underline{W}(F; R) = 0$; le cas de $F(R)$ non positive est symétrique.

Il en résulte (cf. § 9, p. 8) que la différence de deux fonctions monotones est aussi une fonction à variation bornée. Or, la réciproque est également vraie: si une fonction additive $F(R)$ est à variation bornée dans une figure R_0, ses deux variations relatives $\underline{W}(R)$ et $\overline{W}(R)$ sont des fonctions additives monotones dans R_0. La décomposition (10.1) de Jordan $F(R) = \overline{W}(R) - [-\underline{W}(R)]$ permet en conséquence de représenter la fonction F comme différence de deux fonctions monotones non décroissantes. On obtient donc le théorème suivant, dû à Jordan:

Théorème 1. *Pour qu'une fonction additive de figure soit à variation bornée, il faut et il suffit qu'elle soit une différence de deux fonctions monotones non décroissantes.*

Ecarts des fonctions. Fonctions absolument continues.

§ **12.** Soient $F(R)$ une fonction additive quelconque de figure et R_0 une des figures dans lesquelles elle est définie. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ nous allons désigner par $\overline{E}_\varepsilon(F; R_0)$ et $\underline{E}_\varepsilon(F; R_0)$ respectivement la borne supérieure et inférieure des valeurs de $F(R)$ sur les figures $R \subset R_0$ d'aire $< \varepsilon$; en formules:

$$\overline{E}_\varepsilon(F; R) = \underset{R \subset R_0, |R| < \varepsilon}{\text{borne sup}}\, F(R) \quad et \quad \underline{E}_\varepsilon(F; R) = \underset{R \subset R_0, |R| < \varepsilon}{\text{borne inf}}\, F(R).$$

Les modules des deux nombres ainsi définis, décroissent avec ε. Appelons respectivement *écart relatif supérieur* et *inférieur* les limites

$$\overline{E}(F; R_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{E}_\varepsilon(F; R) \quad et \quad \underline{E}(F; R_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{E}_\varepsilon(F; R),$$

et enfin *écart absolu* le nombre

$$E(F; R_0) = \overline{E}(F; R_0) + |\underline{E}(F; R_0)|,$$

c. à d. (en symboles abrégés, pour F et R_0 fixes) $E = \overline{E} - \underline{E}$.

Les écarts supérieur et inférieur de F sur R_0 sont donc, en d'autres termes, la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $F(R)$, lorsque l'aire de la figure $R \subset R_0$ tend vers 0.

Entre les écarts et les variations d'une fonction on a les relations évidentes

$$0 \leqslant \overline{E} \leqslant \overline{W}, \quad 0 \geqslant \underline{E} \geqslant \underline{W} \quad et \quad 0 \leqslant E \leqslant W.$$

Il en résulte, en particulier, que pour toute fonction à variation bornée les trois écarts sont finis et, comme on l'aperçoit aussitôt, qu'ils sont eux-mêmes des fonctions additives.

Réciproquement, si un quelconque des trois écarts d'une fonction additive F est fini sur une figure R_0, cette fonction est dans R_0 à variation bornée.

En effet, si p. ex. $\overline{E}(R_0) < +\infty$, il en est de même de $\overline{E}_\varepsilon(R_0)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Divisons R_0 en nombre fini d'intervalles $I_1, I_2, \dots, I_n$ d'aire inférieure à ε. Pour tout $k = 1, 2, \dots, n$ on a donc $\overline{W}(I_k) \leqslant \overline{E}_\varepsilon(R_0) < +\infty$, de sorte que le nombre $\overline{W}(R_0) = \sum_{k=1}^{n} \overline{W}(I_k)$ est fini; or, il s'en suit aussitôt (cf. § 10, p. 9) que la fonction F est à variation bornée.

Une fonction F s'appelle *absolument continue* sur R_0, lorsque son écart absolu sur R_0 est nul; évidemment, elle est alors absolument continue aussi sur toute figure $R \subset R_0$. Lorsqu'une fonction est absolument continue sur toute figure de l'espace, on dit qu'elle est absolument continue dans l'espace entier.

Toute fonction absolument continue, comme ayant les écarts nuls, donc finis, est une fonction à variation bornée.

On peut donner facilement des exemples des fonctions de figure dans le *plan* qui sont additives, continues et à variation bornée, sans être absolument continues. Considérons à ce but le carré Q_0 à sommets opposés $(0, 0)$ et $(1, 1)$ et désignons par D la diagonale de Q_0 unissant ces sommets. Pour tout rectangle $I \subset Q_0$ soit $F(I)$ la longueur du segment de D contenu dans I. Etendons la fonction d'intervalle ainsi définie aux figures élémentaires arbitraires $R \subset Q_0$. Nous obtenons une fonction additive, continue et non négative (donc à variation bornée), mais pas absolument continue, car $E(F; Q) = \sqrt{2}$.

La relation

$$E(a \cdot F_1 + b \cdot F_2; R) \leqslant |a| \cdot E(F_1; R) + |b| \cdot E(F_2; R),$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions additives et a, b des coefficients numériques constants, montre que toute combinaison linéaire, donc en particulier que la somme et la différence de deux fonctions absolument continues sont des fonctions absolument continues.

Fonctions singulières. Décomposition de Lebesgue.

§ **13.** La somme des écarts relatifs d'une fonction additive $F(R)$ à variation bornée sera dite *fonction des singularités* de la fonction donnée. Elle sera désignée par $S(F; R)$ ou, pour abréger, par $S(R)$. La fonction $S(R)$ est évidemment additive et à variation bornée.

Une fonction additive F qui coïncide pour toute figure R avec sa fonction des singularités, c. à d. qui satisfait à la condition

$$F(R) = S(F; R),$$

s'appellera *fonction singulière* (au sens de M. Lebesgue). Il en résulte par définition que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction absolument continue soit singulière, est qu'elle soit identiquement nulle.

Nous allons montrer que toute fonction à variation bornée est somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière. A ce but, il nous faut établir préalablement quelques théorèmes auxiliaires.

Théorème 2. *L'écart supérieur de la variation supérieure, de même que l'écart inférieur de la variation inférieure d'une fonction additive à variation bornée $F(R)$ sont identiques respectivement à l'écart inférieur et supérieur de $F(R)$,* c. à d. que l'on a pour toute figure R

$$\overline{E}(\overline{W};R)=\overline{E}(F;R) \quad et \quad \underline{E}(\underline{W};R)=\underline{E}(F;R).$$

Démonstration. R_0 étant une figure quelconque, il existe pour tout nombre $\varepsilon>0$ une figure R' telle que

$$(13.1) \quad R'\subset R_0,\ |R'|<\varepsilon \quad et \quad \overline{W}(F;R')>\overline{E}(\overline{W};R_0)-\varepsilon$$

et une figure R'' telle que

$$R''\subset R' \quad et \quad F(R'')>\overline{W}(F;R')-\varepsilon,$$

d'où, selon (13.1), $\overline{E}_\varepsilon(F;R_0)\geqslant F(R'')>\overline{E}(\overline{W};R_0)-2\varepsilon$ et par conséquent

$$(13.2) \qquad \overline{E}(F;R_0)\geqslant\overline{E}(\overline{W};R_0).$$

D'autre part, on a toujours $F(R)\leqslant\overline{W}(R)$, donc $\overline{E}(F;R)\leqslant\overline{E}(\overline{W};R)$, ce qui donne en vertu de (13.2) l'égalité q. f. d.

Théorème 3. *Pour qu'une fonction additive à variation bornée soit absolument continue, il faut et il suffit que ses deux variations relatives le soient.*

Démonstration. Si la fonction en question est absolument continue, ses deux écarts relatifs s'annulent. En vertu du th. 2, il en est donc de même des écarts de ses variations relatives, qui sont par conséquent absolument continues.

Réciproquement, si les variations relatives de la fonction considérée sont absolument continues, il en est de même de la fonction, puisqu'elle est égale (cf. § 10, p. 9) à la somme de ses variations.

Théorème 4. *Pour qu'une fonction additive à variation bornée soit singulière, il faut et il suffit que ses deux variations relatives le soient.*

Démonstration. F étant une fonction singulière et R_0 une figure donnée arbitrairement, on a pour toute figure $R\subset R_0$ l'inégalité $\overline{E}(\overline{W};R_0)=\overline{E}(F;R_0)\geqslant\overline{E}(F;R)\geqslant S(F;R)=F(R)$. Il en résulte, $\overline{W}(R_0)$ étant la borne supérieure des valeurs $F(R)$ pour $R\subset R_0$, que $\overline{E}(\overline{W};R_0)\geqslant\overline{W}(R_0)$, donc que $\overline{E}(\overline{W};R_0)=\overline{W}(R_0)$, et par conséquent $S(\overline{W};R_0)=\overline{E}(\overline{W};R_0)=\overline{W}(R_0)$. La figure R_0 étant supposée arbitraire, cette égalité exprime que $\overline{W}(R)$ est une fonction singulière.

Réciproquement, si les deux variations relatives de la fonction $F(R)$ sont des fonctions singulières, on a pour toute figure R, en tenant compte du th. 2, p. 12, l'égalité $F(R)=\overline{W}(R)+\underline{W}(R)=\overline{E}(\overline{W};R)+\underline{E}(\underline{W};R)=\overline{E}(F;R)+\underline{E}(F;R)=S(F;R)$, de sorte que la fonction $F(R)$ est singulière.

Théorème 5. *Chacune des deux conditions suivantes est à la fois nécessaire et sufissante pour qu'une fonction $F(R)$ additive et à variation bornée soit singulière:*

1^0 *Quelle que soit la figure R, il existe pour tout $\varepsilon>0$ une figure R' telle que*

$$(13.3) \qquad R'\subset R,\quad |R'|<\varepsilon,\quad |F(R\ominus R')|<\varepsilon.$$

2^0 *Quelle que soit R, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un R' tel que*

$$(13.4) \qquad R'\subset R,\quad |R'|<\varepsilon,\quad W(R\ominus R')<\varepsilon.$$

Démonstration. Il suffit évidemment d'établir la suffisance de la condition 1^0 et la nécessité de la condition 2^0.

Admettons que la condition 1^0 soit remplie. Pour tout couple de figures R et R_0 où $R\subset R_0$, et pour tout $\varepsilon>0$, il existe donc une figure R' assujettie à (13.3), d'où $F(R)<F(R')+\varepsilon<\overline{E}_\varepsilon(F;R_0)+\varepsilon$. Il en résulte, $\overline{W}(R_0)$ étant la borne supérieure de $F(R)$ pour $R\subset R_0$, que $\overline{W}(R_0)<\overline{E}_\varepsilon(F;R_0)+\varepsilon$. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire et $\overline{W}(R_0)\geqslant\overline{E}(F;R_0)$ (cf. § 12, p. 10), on en conclut que $\overline{W}(R_0)=\overline{E}(F;R_0)$. D'une façon tout à fait analogue, on déduit l'égalité $\underline{W}(R_0)=\underline{E}(F;R_0)$, de sorte que pour toute figure R_0 on a $F(R_0)=\overline{W}(R_0)+\underline{W}(R_0)=\overline{E}(R_0)+\underline{E}(R_0)=S(R_0)$, ce qui signifie que la fonction F est singulière.

Admettons à présent que la fonction F soit singulière. En vertu du th. 4, il en est donc de même de ses deux variations. Quelle que soit la figure R_0, on a donc

$$\overline{W}(R_0) = \overline{E}(\overline{W}; R_0) \quad et \quad \underline{W}(R_0) = \underline{E}(\underline{W}; R_0).$$

Il existe par conséquent pour tout $\varepsilon > 0$ deux figures R_1 et R_2 telles que $R_i \subset R_0$ et $|R_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $i = 1, 2$ et que

$$\overline{W}(R_0) < \overline{W}(R_1) + \frac{\varepsilon}{2} \quad et \quad \underline{W}(R_0) > \underline{W}(R_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $R' = R_1 + R_2$, on a $W(R_0) = \overline{W}(R_0) - \underline{W}(R_0) < < \overline{W}(R_1) - \underline{W}(R_2) + \varepsilon \leqslant \overline{W}(R') - \underline{W}(R') + \varepsilon \leqslant W(R') + \varepsilon$ et par suite $W(R_0 \ominus R') < \varepsilon$, où $R' = R_1 + R_2 \subset R_0$ et $|R'| \leqslant |R_1| + |R_2| < \varepsilon$, c. à d. les formules (13. 4).

Théorème 6. *Toute combinaison linéaire (à coefficients constants) de deux fonctions singulières est une fonction singulière.*

Démonstration. Il suffit évidemment de le prouver pour la somme de deux fonctions singulières F_1 et F_2.

Soit $F = F_1 + F_2$. En désignant respectivement par W, W_1 et W_2 les variations absolues des fonctions F, F_1 et F_2, il existe en vertu du th. 5 pour tout R_0 et pour tout $\varepsilon > 0$ deux figures R_1 et R_2 telles que

$$R_i \subset R_0, \quad |R_i| < \frac{\varepsilon}{2} \quad et \quad W_i(R_0 \ominus R_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad où\ i = 1, 2.$$

En posant $R' = R_1 + R_2$, nous obtenons donc $R' \subset R_0$, $|R'| < \varepsilon$ et $W(R_0 \ominus R') \leqslant W_1(R_0 \ominus R_1) + W_2(R_0 \ominus R_2) < \varepsilon$, de sorte que la fonction F satisfait à la condition 2° du th. 5. Il en résulte en vertu du th. 5 que cette fonction est singulière, c. q. f. d.

Théorème 7. *Les écarts et la fonction des singularités d'une fonction $F(R)$ additive à variation bornée sont des fonctions singulières.*

Démonstration. Pour toute figure R (où la fonction F est définie) et pour tout $\varepsilon > 0$ les formules $R' \subset R$ et $|R'| < \varepsilon$ entraînent

$$\overline{E}_\varepsilon(R) \geqslant F(R') + \overline{E}(R \ominus R'). \tag{13.5}$$

On peut trouver R' de façon à avoir en outre $F(R') > \overline{E}_\varepsilon(R) - \varepsilon$, d'où selon (13. 5) $\overline{E}(R \ominus R') < \varepsilon$, de sorte que la fonction $\overline{E}(R)$ satisfait à la condition 1° du th. 5. Elle est donc singulière.

Par raison de symétrie il en est de même de l'écart inférieur $\underline{E}(R)$ de la fonction F. On en conclut en vertu du th. 6 que son écart absolu $E(R) = \overline{E}(R) - \underline{E}(R)$ et sa fonction des singularités $S(R) = \overline{E}(R) + \underline{E}(R)$ sont également des fonctions singulières.

Théorème 8. *F_1 et F_2 étant des fonctions monotones non négatives, on a pour toute figure R*

$$E(F_1 + F_2; R) = E(F_1; R) + E(F_2; R). \tag{13.6}$$

Démonstration. Soit $F = F_1 + F_2$. Les fonctions F_1 et F_2 étant par hypothèse non négatives, on a pour tout couple de figures R' et R'' l'inégalité $F(R' + R'') \geqslant F_1(R') + F_2(R'')$, donc, pour toute figure R et pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{E}_{2\varepsilon}(F; R) \geqslant \overline{E}_\varepsilon(F_1; R) + \overline{E}_\varepsilon(F; R)$, d'où, en faisant ε tendre vers 0:

$$\overline{E}(F; R) \geqslant \overline{E}(F_1; R) + \overline{E}(F_2; R). \tag{13.7}$$

D'autre part, on a pour tout couple de fonctions additives F_1 et F_2 la relation $\overline{E}(F_1 + F_2; R) \leqslant \overline{E}(F_1; R) + \overline{E}(F_2; R)$, ce qui entraîne en vertu de (13. 7) la relation (13. 6), q. f. d.

Théorème 9. *Une fonction additive à variation bornée se laisse représenter toujours et d'une seule manière comme somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière, à savoir de sa fonction des singularités.*

Démonstration. Posons pour la fonction additive à variation bornée $F(R)$

$$\overline{\Phi}(R) = \overline{W}(R) - \overline{E}(R), \tag{13.8}$$

où

$$\overline{W}(R) = \overline{W}(F; R), \quad \overline{E}(R) = \overline{E}(F; R).$$

Comme on a toujours $\overline{W}(R) \geqslant \overline{E}(R)$, la fonction $\overline{\Phi}(R)$ est monotone non négative, d'où en vertu du th. 8

$$E(\overline{W}; R) = E(\overline{\Phi}; R) + E(\overline{E}; R). \tag{13.9}$$

D'autre part, on a en vertu des th. 2, p. 12, et 7, p. 14, $E(\overline{W}; R) = \overline{E}(F; R) = \overline{E}(\overline{E}; R) = E(\overline{E}; R)$, ce qui entraîne d'après (13. 9) que $E(\overline{\Phi}; R) = 0$, c. à d. que la fonction $\overline{\Phi}(R)$ est absolument continue. Par raison de symétrie il en est de même de la fonction

$$\Phi(R) = \underline{W}(R) - \underline{E}(R), \tag{13.10}$$

où $\underline{W}(R) = \underline{W}(F; R)$, et $\underline{E}(R) = \underline{E}(F; R)$.

La fonction $\Phi(R) = \bar{\Phi}(R) + \underline{\Phi}(R)$ est donc absolument continue et les égalités (13.8) et (13.10) donnent

$$F(R) = \overline{W}(R) + \underline{W}(R) = \Phi(R) + \overline{E}(R) + \underline{E}(R) = \Phi(R) + S(R), \tag{13.11}$$

c. à d. la décomposition cherchée de la fonction $F(R)$.

Pour voir que c'est la seule manière de représenter $F(R)$ comme somme d'une fonction singulière et d'une fonction absolument continue, on remarquera qu'une décomposition quelconque de ce genre $F(R) = \Phi_1(R) + S_1(R)$ coïncide nécessairement avec (13.11), car elle donne par soustraction de (13.11) l'égalité $\Phi(R) - \Phi_1(R) = S_1(R) - S(R)$, qui n'est possible que si ses deux membres s'annulent identiquement, puisque la fonction $\Phi - \Phi_1$ est absolument continue et $S_1 - S$ est en vertu des th. 7 et 6, p. 14, une fonction singulière.

La décomposition (13.11) portera le nom de *II-e décomposition canonique* de la fonction additive à variation bornée ou de *décomposition de* Lebesgue.

La définition de la fonction des singularités d'une fonction additive à variation bornée est due à M. H. Lebesgue [5, p. 413]; le terme „fonction singulière" a été introduit par M. Ch. J. de la Vallée-Poussin [I, p. 94], qui a expliqué et approfondi le sens réel de la décomposition de Lebesgue dans la Théorie de l'intégrale [*ibidem*], en considérant les fonctions additives d'ensemble. Pour déduire la décomposition canonique, les deux auteurs se servent d'ailleurs de la Théorie de l'intégrale, développée au préalable.

Comme simple exemple d'une fonction continue monotone et singulière, peut nous servir, dans le domaine des fonctions de figure élémentaire sur le plan, l'exemple du § 12. Un exemple analogue pour la droite, ou — ce qui revient au même — pour les fonctions continues d'une variable réelle, sera donné au § 15.

Le théorème suivant nous sera utile dans les constructions des exemples des fonctions singulières.

Théorème 10. *$\{F_n(R)\}$ étant une suite monotone de fonctions singulières, convergente vers une fonction $F(R)$, la fonction $F(R)$ est aussi singulière.*

Démonstration. On peut évidemment admettre que la suite monotone $\{F_n\}$ est non décroissante, c. à d. qu'on a $F_n(R) \leqslant F_{n+1}(R)$, quelle que soit la figure R. En posant donc $\Phi_n = F - F_n$, on aura pour tout R

$$\Phi_n(R) \geqslant 0 \quad où \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13.12}$$

Considérons une figure quelconque R_0, un $\varepsilon > 0$ arbitraire et un N naturel tel que

$$\Phi_N(R_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.13}$$

Or, F_N étant par hypothèse une fonction singulière, il existe en vertu du th. 5, p. 13, une figure R' telle que

$$R' \subset R_0, \quad |R'| < \varepsilon \tag{13.14}$$

et

$$|F_N(R_0 \ominus R')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.15}$$

$\Phi_N(R)$ étant selon (13.12) une fonction monotone non décroissante, les inégalités (13.13) et (13.15) ont pour conséquence $|F(R_0 \ominus R')| \leqslant |F_N(R_0 \ominus R')| + \Phi_N(R_0 \ominus R') < \frac{\varepsilon}{2} + \Phi_N(R_0) \leqslant \varepsilon$, ce qui, rapproché de (13.14), prouve en vertu du th. 5 que $F(R)$ est une fonction singulière.

Fonctions d'une variable réelle.

§ 14. Les notions et les théorèmes les plus importants de ce chapitre avaient à leur origine une forme un peu différente: ils se rapportaient non pas aux fonctions additives d'intervalle (ou — ce qui est équivalent — de figure), mais à celles d'une variable réelle. Il est facile cependant d'établir entre les fonctions d'une variable réelle et les fonctions additives d'intervalle linéaire une correspondance ayant pour l'effet que la considération de ces deux espèces de fonctions devient pratiquement la même chose.

Soit notamment $f(x)$ une fonction arbitraire de variable réelle, définie dans l'intervalle I_0 et n'admettant que des valeurs réelles finies. Appelons *accroissement* de $f(x)$ sur un intervalle quelconque $I = [a, b]$ contenu dans I_0 la différence $f(b) - f(a)$. Ainsi défini, l'accroissement est une fonction additive d'intervalle linéaire $I \subset I_0$, correspondant à la fonction $f(x)$ d'une façon univoque. Réciproquement, étant donnée une fonction d'intervalle additive quelconque $F(I)$, par cela même une fonction $f(x)$ de variable réelle se trouve définie à la constante additive près, dont les accroissements sur les intervalles I coïncident avec les valeurs correspondantes de la fonction $F(I)$. C'est pourquoi nous désignerons souvent par une même lettre la fonction donnée de variable réelle et la fonction additive d'intervalle qui lui vient correspondre.

On aperçoit facilement qu'une fonction $f(x)$ est dans un intervalle I_0 continue au sens de la définition ordinaire (de Cauchy), lorsque son accroissement est une fonction continue d'intervalle au sens de la définition du § 7, p. 7, et réciproquement.

On constate pareillement que *l'oscillation de l'accroissement de* $f(x)$ dans un intervalle I coïncide avec la différence des bornes— supérieure et inférieure — de $f(x)$ dans I. Ce nombre sera dit aussi *oscillation* de la fonction $f(x)$ dans I et désigné, tout comme l'oscillation de la fonction d'intervalle, par $\omega(f; I)$.

D'une façon analogue, convenons d'entendre respectivement par *variation supérieure, inférieure, absolue, écart supérieur,* etc. d'une fonction $f(x)$ de variable réelle sur un intervalle I la variation supérieure, inférieure, absolue, écart supérieur, etc. de l'accroissement de $f(x)$ sur I. Pour désigner ces nombres, nous emploierons des symboles analogues à ceux qui ont été adoptés pour les fonctions additives d'intervalle, à savoir: $\overline{W}(f; I)$, $\underline{W}(f; I)$, $W(f; I)$, $\overline{E}(f; I)$, etc.

Enfin, nous ferons de même pour les autres notions: nous appellerons $f(x)$ *fonction à variation bornée*, lorsque ses variations sont finies, et nous dirons qu'elle est *absolument continue* dans un intervalle I_0, lorsque ses écarts dans cet intervalle s'annulent. Conformément aux définitions qui précèdent, ces expressions signifient donc respectivement que *l'accroissement* de $f(x)$ est une fonction d'intervalle à variation bornée ou une fonction absolument continue dans I_0.

La notion de fonction à variation bornée a été introduite dans l'Analyse par C. Jordan [1; I, p. 54]. Les fonctions absolument continues ont été en fait distinguées pour la première fois par M. H. Lebesgue en 1904 [I, p. 129, renvoi], qui a remarqué que la propriété employée aujourd'hui pour définir la continuité absolue est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit une intégrale indéfinie au sens de la définition donnée par lui. Le terme „fonction absolument continue" a été introduit un peu plus tard (en 1905) par G. Vitali [1].

La propriété de toute combinaison linéaire des fonctions additives à variation bornée, de même que des fonctions absolument

continues, d'être respectivement une fonction à variation bornée et une fonction absolument continue (cf. § 9, p. 8 et § 12, p. 11) subsiste évidemment pour les fonctions de variable réelle; en outre, elle se laisse étendre au produit de telles fonctions.

En effet, toute fonction à variation bornée dans un intervalle I étant, comme on aperçoit sans peine, bornée dans cet intervalle, il existe pour tout couple de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ un nombre fini M dépassant toutes les valeurs absolues de $f(x)$ et $g(x)$ à la fois.

En posant $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, on a pour tout système d'intervalles $[a_i, b_i] \subset I$ n'empiétant pas l'un sur l'autre $\sum\limits_i [h(b_i) - g(a_i)] =$ $= \sum\limits_i [f(b_i) \cdot f(a_i) - g(b_i) \cdot g(a_i)] \leqslant M \cdot [\sum\limits_i |f(b_i) - f(a_i)| + \sum\limits_i |g(b_i) - g(a_i)|]$, d'où

$$W(h; I) \leqslant M \cdot [W(f; I) + W(g; I)] \quad et \quad E(h; I) \leqslant M \cdot [E(f; I) + E(g; I)].$$

Il en résulte immédiatement que, $f(x)$ *et* $g(x)$ *étant respectivement des fonctions à variation bornée ou absolument continues, il en est de même de leur produit.*

Le théorème suivant nous sera très utile dans la suite: *toute fonction de variable réelle à variation bornée n'admet que tout au plus une infinité dénombrable des points de discontinuité.* Ce simple théorème peut être d'ailleurs étendu facilement aux fonctions additives d'intervalle définies dans un espace quelconque (voir p. ex. H. Hahn [I, p. 414]). Dans notre cas sa démonstration se réduit, en raison du th. de Jordan sur la I-e décomposition canonique (cf. § 11, p. 9), à des fonctions monotones non décroissantes.

H désignant l'ensemble des points de discontinuité d'une telle fonction $f(x)$, soient respectivement $f(a-0)$ et $f(a+0)$ les limites gauche et droite de $f(x)$ au point a. A tout point $a \in H$ on peut donc faire correspondre un nombre rationnel $r(a)$ tel qu'on ait $f(a-0) < r(a) < f(a+0)$ et on aperçoit aisément que, la fonction $f(x)$ étant monotone, à des points distincts a et b de H viennent alors correspondre des nombres rationnels distincts $r(a)$ et $r(b)$. Or, l'ensemble des nombres rationnels étant dénombrable, il en est de même de H, c. q. f. d.

§ 15. Nous allons terminer ce chapitre par une courte description d'une méthode élémentaire de construction des fonctions singulières continues de variable réelle.

Soit $\{r_n\}$ la suite de tous les nombres rationnels compris dans l'intérieur de l'intervalle $I=[0,1]$. Posons pour tout $x \in I$

$$f(x)=\sum_n^{(x)}\frac{1}{2^n},$$

où le symbole $\sum_n^{(x)}$ désigne que la sommation s'étend à toutes les valeurs naturelles de l'indice n pour lesquelles on a $r_n<x$.

Ainsi définie, la fonction $f(x)$ est évidemment monotone croissante et continue en tout point irrationnel de l'intervalle I, de même qu'aux extrémités de cet intervalle, où on a $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Dans les points rationnels elle admet des *sauts*:

$$f(r_n+0)-f(r_n-0)=\frac{1}{2^n} \quad \textit{pour } n=1,2,\ldots$$

Désignons d'une façon générale par I_n l'intervalle $[f(r_n-0), f(r_n+0)]$. Ces intervalles sont deux à deux disjoints, contenus dans I et la longueur de I_n est 2^{-n}, de sorte que la somme de leurs longueurs est égale à celle de I. Ils constituent donc un système *dense* dans I, c. à d. que tout point x de I soit appartient à un des intervalles I_n, soit est leur point d'accumulation.

Toute valeur $y \in I-\sum_n I_n$ est prise par la fonction $f(x)$ exactement une fois. Nous pouvons donc définir dans I une fonction $\varphi(y)$ comme il suit:

$$\varphi(y)=\begin{cases} x\,, & \textit{lorsque } y=f(x) \\ r_n\,, & \textit{lorsque } y\in I_n. \end{cases}$$

Ainsi définie, la fonction $\varphi(y)$ est continue et non décroissante dans l'intervalle $I=[f(0)=0, f(1)=1]$. Dans chacun des intervalles I_n elle est constante, et dans tout intervalle $[a,b]$ qui contient I_n à l'intérieur, on a

$$\varphi(a)<r_n<\varphi(b).$$

Il en résulte en particulier, les intervalles I_n formant un système dense dans I et leurs longueurs ne dépassant pas 2^{-1}, que pour tout couple de nombres a

(15.1) *les inégalités* $0<a<b<1$ *et* $b-a>\frac{1}{2}$ *entraînent* $\varphi(a)<\varphi(b)$.

Ceci dit, posons pour tout n naturel

$$R_n=I\ominus\sum_{m=1}^{n}I_m.$$

Il vient $|R_n|=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n}$ et d'autre part, la fonction $\varphi(y)$ étant constante dans tout I_m, on a l'égalité $\varphi(I\ominus R_n)=\varphi\left(\sum_{m=1}^{n}I_m\right)=\sum_{m=1}^{n}\varphi(I_m)=0$, qui prouve d'après le th. 5, p. 13, que la fonction φ est singulière.

La fonction singulière obtenue par la construction précédente est continue et monotone non décroissante; elle n'est pas constante dans l'intervalle I, mais l'est dans certains intervalles partiels. Or, on parvient facilement par la *méthode de condensation des singularités* à en obtenir une fonction singulière continue et partout croissante.

Soit en effet

(15.2) $$\Phi(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(ny)}{2^n}.$$

Cette série est une série uniformément convergente de fonctions singulières, car $\varphi(y)$ étant une fonction singulière, il en est évidemment toujours de même de $\varphi(ny)$. Désignons par $\Phi_n(y)$ les sommes partielles de la série (15.2) et par $\Phi_n(R)$ les fonctions correspondantes de figure élémentaire. Les fonctions $\varphi(ny)$ étant monotones non décroissantes, les fonctions additives correspondantes sont non négatives. Par conséquent $\{\Phi_n(R)\}$ est une suite monotone non décroissante de fonctions additives singulières. En vertu du th. 10, p. 16, la fonction $\Phi(R)$ et par conséquent la fonction $\Phi(y)$ est donc singulière. Elle est en même temps continue comme limite d'une série uniformément convergente. Reste à montrer qu'elle est croissante.

Or, soit a, b où $a<b$ un couple arbitraire de points de l'intervalle I. Pour $n<\frac{1}{2(b-a)}$ on a donc en vertu de (15.1) l'inégalité $\varphi(na)<\varphi(nb)$ et d'autre part pour tout n naturel $\varphi(na)\leqslant\varphi(nb)$, d'où en vertu de (15.2) $\Phi(a)<\Phi(b)$, c. q. f. d.

Des exemples de ce genre ont été construits à plusieurs reprises, d'habitude à l'aide des propriétés différentielles des fonctions singulières (cf. plus loin Chap. III, § 7). Voir à ce sujet: A. Denjoy [1], W. Sierpiński [1], H. Hahn [I, p. 538], A. Rajchman [1] et G. Vitali [3].