

MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS

TOM I

THÉORIE

DES

OPÉRATIONS LINÉAIRES

PAR

STEFAN BANACH

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

WARSZAWA 1932

TABLE DES MATIÈRES.

	Page
PRÉFACE.	III
ERRATA	VIII
 INTRODUCTION. A. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.	
§ 1. Quelques théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue	1
§ 2. Quelques inégalités pour les fonctions à p -ième puissance sommable	2
§ 3. La convergence asymptotique.	3
§ 4. La convergence en moyenne	4
§ 5. L'intégrale de Stieltjes	4
§ 6. Le théorème de Lebesgue	7
 B. Ensembles et opération mesurables (B) dans les espaces métriques.	
§ 7. Espaces métriques	8
§ 8. Ensembles dans les espaces métriques	12
§ 9. Opérations dans les espaces métriques	15
 CHAPITRE I. Groupes.	
§ 1. Définition des espaces du type (G)	20
§ 2. Propriétés des sous-groupes	21
§ 3. Opérations additives et linéaires	23
§ 4. Un théorème sur la condensation des singularités	24
 CHAPITRE II. Espaces vectoriels généraux.	
§ 1. Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels	26
§ 2. Extension des fonctionnelles additives et homogènes	27
§ 3. Applications: généralisation des notions d'intégrale, de mesure et de limite	29
 CHAPITRE III. Espaces du type (F).	
§ 1. Définition et préliminaires	35
§ 2. Opérations homogènes	36

§ 3. Séries d'éléments. Inversion des opérations linéaires	37
§ 4. Fonctions continues sans dérivée	43
§ 5. La continuité des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles	44
§ 6. Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues	47
§ 7. Applications de l'espace (s)	50

CHAPITRE IV. **Espaces normés.**

§ 1. Définitions des espaces vectoriels normés et des espaces du type (B)	53
§ 2. Propriétés des opérations linéaires. Extension des fonctionnelles linéaires	54
§ 3. Ensembles fondamentaux et ensembles totaux d'éléments	57
§ 4. Forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces (C), ($L(r)$), (c), ($l(r)$), (m) et dans les sous-espaces de (m)	59
§ 5. Suites fermées et complètes dans les espaces (C), ($L(r)$), (c) et ($l(r)$).	72
§ 6. Approximation des fonctions appartenant à (C) et ($L(r)$) par des combinaisons linéaires de fonctions	73
§ 7. Le problème des moments	74
§ 8. Conditions pour l'existence des solutions de certains systèmes d'équations à une infinité d'inconnues	76

CHAPITRE V. **Espaces du type (B).**

§ 1. Opérations linéaires dans les espaces du type (B)	78
§ 2. Principe de condensation des singularités	81
§ 3. Espaces du type (B) compacts	83
§ 4. Une propriété des espaces ($L(r)$), (c) et ($l(r)$)	84
§ 5. Espaces du type (B) formés de fonctions mesurables	86
§ 6. Exemples des opérations linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B)	88
§ 7. Quelques théorèmes sur les méthodes de sommation	90

CHAPITRE VI. **Opérations totalement continues et associées.**

§ 1. Opérations totalement continues	96
§ 2. Exemples des opérations totalement continues dans quelques espaces particuliers	97
§ 3. Opérations conjuguées (associées)	99
§ 4. Applications. Exemples des opérations conjuguées dans quelques espaces particuliers	101

CHAPITRE VII. Suites biorthogonales.

§ 1. Définition et propriétés générales	106
§ 2. Suites biorthogonales dans quelques espaces particuliers	108
§ 3. Bases dans les espaces du type (B)	110
§ 4. Quelques applications à la théorie des développements orthogonaux	112

CHAPITRE VIII. Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) .

§ 1. Préliminaires	115
§ 2. Ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires	116
§ 3. Ensembles transfinement fermés de fonctionnelles linéaires	118
§ 4. Convergence faible des fonctionnelles linéaires	122
§ 5. Ensembles faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) séparables	123
§ 6. Conditions pour la convergence faible des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces (C) , $(L(p))$, (c) et $(l(p))$	126
§ 7. Compacité faible d'ensembles bornés dans certains espaces	130
§ 8. Fonctionnelles linéaires faiblement continues définies dans les espaces des fonctionnelles linéaires	131

CHAPITRE IX. Suites faiblement convergentes d'éléments.

§ 1. Définition. Conditions pour la convergence faible des suites d'éléments	133
§ 2. Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces (C) , $(L(p))$, (c) et $(l(p))$	134
§ 3. Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces $(L(p))$ et $(l(p))$ pour $p > 1$	139
§ 4. Espaces faiblement complets	140
§ 5. Un théorème sur la convergence faible d'éléments	143

CHAPITRE X. Equations fonctionnelles linéaires.

§ 1. Relations entre les opérations linéaires et les opérations conjuguées avec elles	145
§ 2. La théorie de Riesz des équations linéaires totalement continues	151
§ 3. Valeurs régulières et valeurs propres dans les équations linéaires	157
§ 4. Théorèmes de Fredholm dans la théorie des équations linéaires totalement continues	159
§ 5. Equations intégrales de Fredholm	161
§ 6. Equations intégrales de Volterra	162
§ 7. Equations intégrales symétriques	163

CHAPITRE XI. Isométrie, équivalence, isomorphie.

§ 1. Isométrie	165
§ 2. Les espaces (L^2) et (l^2)	165
§ 3. Transformations isométriques des espaces vectoriels normés	166
§ 4. Espace des fonctions réelles continues	168
§ 5. Rotations	173
§ 6. Isomorphie et équivalence	180
§ 7. Produits des espaces du type (B)	181
§ 8. Espace (C) comme l'espace universel	185
§ 9. Espaces conjugués	188

CHAPITRE XII. Dimension linéaire.

§ 1. Définitions	193
§ 2. Dimension linéaire des espaces (c) et $(l(p))$ où $p \geq 1$	194
§ 3. Dimension linéaire des espaces $(L(p))$ et $(l(p))$ où $p > 1$	197

ANNEXE. Convergence faible dans les espaces du type (B) .

§ 1. Les dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires	208
§ 2. Convergence faible des éléments	217

REMARQUES	226
---------------------	-----

INDEX TERMINOLOGIQUE.

- Abélien* (espace) 229,
Accumulation (point d') 12, 208,
Addition 26, 229,
Additive fonctionnelle, opération 23,
Analytique ensemble 17,
Appui (plan d') 246,
Associée équation 157, opération 100,
Asymptotique convergence 3, limite 226.
- Base* 110, de Hamel 231,
Biorthogonale suite 106.
- Carré* des espaces 182,
Catégorie I-e, II-e, de Baire 13,
Centre d'une sphère 13, d'un couple de points 167,
Classe totale (d'opérations linéaires) 42,
Combinaison linéaire 27,
Commutative convergence 240,
Compact espace 9,
Compacité faible 130, 239,
Complet espace, ensemble 9, faiblement 240, système biorthogonal 237,
Complète suite d'éléments de (C) 72, de $(L(r))$ 73,
Condensation des singularités (théorème sur) 24, (principe de) 81,
Condition de Baire pour ensembles 15, pour opérations 17, de Cauchy 9,
Conjugué exposant 2,
Conjuguée opération 100,
- Connexe* (ensemble, espace) 21,
Continue (opération) 16, faiblement (fonctionnelle) 131, totalement (opération) 96,
Contredomaine 16,
Convergence asymptotique 3; commutative 240, en mesure 3, en moyenne 4, faible (des éléments) 133, (des fonctionnelles) 122,
Convergente série 37, suite 9, (d'opérations) 16,
Convexe corps 246, ensemble, espace, 27, fonction 227,
Corps convexe 246.
- Dense* ensemble 13,
Dérivé (ensemble) 13, faible 208, transfini 213,
Développement d'un élément 106, d'une fonction 82,
Diamètre d'un ensemble 166,
Dimension linéaire 193,
Dimensionnelle (propriété) 243,
Distance 9,
Domaine 16.
- Élément-zéro* d'un espace 20,
Élément propre (d'une équation) 157,
Ensemble analytique ou (A) 17, 235, connexe 21, convexe 27, compact 9, (faible-

Index terminologique.

ment 130, 239), de I-e, de II-e catégorie
 13, dense 13 (faiblement) 123, dérivé
 13, (faible 208, transfini 213), faible-
 ment complet 240, fermé 13 (fai-
 blement 124, régulièrement 116),
 fondamental (d'éléments) 58, liné-
 aire 26, mesurable (B) 15, (J), (L)
 32, non-dense 13, ouvert 13, parfait
 13, total (d'éléments) 58, (de fon-
 ctionnelles) 42, vectoriel 26,
Ensembles homéomorphes 170,
Entourage 13,
Equations associées 157, symétriques
 164,
Equivalence (des espaces) 180, 242,
Espace abélien 229, (C) 11, ($C(p)$) 11,
 (c) 11, (c_0) 181, compact 9 (faiblement
 239), complet 9, conjugué 188, con-
 nexité 21, (D) 8, du type (B) 53, (F)
 35, (G) 21, ($H(p)$) 227, linéaire 26,
 ($L(p)$) 12, ($K(p)$) 12, (M) 10, (m) 11,
 métrique 8, normé 53, (O) 227, (o)
 228, (Q) 227, (R) 227, (S) 9, (s) 10,
 séparable 13, universel 187,
Espaces équivalents 180, 242, isométri-
 ques 165 (presque) 242, isomorphes
 180,
Exposants conjugués 2,
Extension ¹⁾ d'une fonctionnelle 27.
Faible convergence (des éléments) 133,
 (des fonctionnelles) 122, dérivé 208,
 limite 122, méthode de sommation 90,
Faiblement compact (espace) 239, com-
 plet (espace) 240, continue (fon-
 ctionnelle) 131, convergente (suite
 de fonctionnelles) 122, dense (en-
 semble de fonctionnelles linéaires)

¹⁾ Terme coïncidant avec le terme
 classique „prolongement“ pour les fon-
 ctions.

123, fermé (ensemble de fonction-
 nnelles linéaires) 124,
Fermé (ensemble) 13,
Fermée (suite d'éléments de (C), ($L(r)$))
 72,
Fermeture d'un ensemble 13,
Fonctionnelle 16, additive 23, 27, con-
 tinue 16 (faiblement) 131, linéaire 23,
 non-négative 217, orthogonale (à un
 élément ou un ensemble d'éléments)
 59, propre (d'une équation) 157,
Fondamental (ensemble d'éléments) 58.
Glissante métrique 230,
Groupe 20.
Homéomorphie 170,
Homogène (opération) 27,
Hyperplan 246.
Incomparables (dimensions) 193,
Inversion (d'une opération linéaire) 37,
Isométrie, isométrique espace, transfor-
 mation 165, presque isométrique
 (espace) 242, propriété 243,
Isomorphie 180, *isomorphes* espaces 180,
 propriétés 243.
Lim, limite généralisée 33, 34, 236,
Limite 9, asymptotique 226, des opéra-
 tions 16, faible 122, 133, (point-) 9,
 transfinie 118, 119,
Linéaire combinaison 27, dimension 193
 ensemble, espace 26, opération 23,
 transformation 165, variété 246.
Mesurable (B) ensemble 15, opéra-
 tion 16,
Mesure (convergence en) 3,
Méthode de sommation normale 95, 236,
 parfaite 90, permanente 90, plus faible
 que 90, réversible 90,

Index terminologique.

- Métrique* (espace) 8,
Métrique „glissante“ 230,
Moments (problème des) 74.
Non-dense (ensemble) 13,
Non-négative (fonctionnelle) 217,
Normale (méthode de sommation) 236, suite voir *normée*,
Norme d'un élément 53, d'une opération 54,
Normé (espace) 53
*Normée*¹⁾ suite 112, système 238.
Opération 16, additive 23, associée ou conjuguée 100, continue 16, homogène 27, linéaire 23, mesurable (*B*) 16, symétrique 163, totalement continue 96.
Parfait (ensemble) 13,
Parfaite (méthode de sommation) 90,
Permanente (méthode de sommation) 90,
Plan d'appui 246,
Point d'accumulation des éléments 12, des fonctionnelles 208,
Point-limite 9,
Presque isométriques espaces 242,
Principe de condensation des singularités 81,
Problème des moments 74,
Produit des espaces 182,
Prolongement (d'une fonctionnelle) voir *extension*,
Propre élément, fonctionnelle, valeur (d'une équation) 157,
Propriété isométrique 243, isomorphe 243, dimensionnelle 243.
Régulière (valeur d'une équation) 157,
Régulièrement fermé (ensemble de fonctionnelles) 116,
Reversible (méthode de sommation) 90,
Rotation 173.
Segment 27,
Séparable (espace) 13,
Série convergente 37, commutativement convergente 240,
Singularité (condensation des) 24, 81,
Sommation (méthodes de) 90,
Sous-groupe 21,
Spectre (d'une équation) 157,
Sphère 13, ouverte 13,
Suite biorthogonale 112, complète 72, convergente (d'éléments) 9, (d'opérations) 16, asymptotiquement 3, en moyenne 4, faiblement (d'éléments) 133, (de fonctionnelles) 122, fermée 72, biorthogonale complète 240, normée voir *normée*,
Symétriques (équations) 164,
Système biorthogonal voir *suite*.
Total, ensemble d'éléments 58, de fonctionnelles 42,
Totalement continue (opération) 96,
Transfini (dérivé) 213,
Transfinie (limite) 118,
Transfiniment fermé (ensemble de fonctionnelles) 119,
Transformation isométrique 165, linéaire 165,
Translation 246.
Universel (espace) 187, 243.
Valeur d'une opération 16, propre d'une équation 157, régulière d'une équation 157,
Variété linéaire 246,
Vectoriel (ensemble, espace) 26,
Voisinage (d'un point) 13.

¹⁾ Terme coïncidant pour les suites orthogonales de fonctions avec le terme „normale“.

PRÉFACE.

La théorie des opérations, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle: il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations. On voit dans cette théorie les méthodes de mathématique classique s'unir aux méthodes modernes d'une manière parfaitement harmonieuse et remarquablement efficace. Elle permet souvent d'interpréter les théorèmes de la théorie des ensembles ou de la topologie d'une façon tout à fait imprévue. Ainsi p. ex. le théorème topologique sur le point invariant se laisse traduire moyennant la théorie des opérations (comme l'ont montré M. M. Birkhoff et Kellogg) dans le théorème classique sur l'existence des solutions des équations différentielles. Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiment approfondie n'est possible qu'à l'aide de la théorie des opérations. Telles sont aujourd'hui: la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations, etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien par sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prêtent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires*, qui correspond à celle des formes linéaires $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme suit. Soient E et E_1 deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit $y = U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de E_1 (dans le cas où E_1 est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de *fonctionnelle*). Si, quels que soient x_1 et x_2 de E , on a $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, l'opération $U(x)$ s'appelle *additive*. Si, en outre, E et E_1 sont des espaces *métriques*, c. à d. que dans chacun d'eux la *distance* des éléments est définie, on peut considérer des opérations $U(x)$ *continues*. Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent *linéaires*.

Dans ce livre, je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits *espaces du type (B)*, dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à p -ième puissance sommable, l'espace de Hilbert, etc.

Je donne aussi l'interprétation des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques, à savoir dans la théorie des groupes, des équations différentielles, des équations intégrales, des équations à une infinité d'inconnues, des fonctions de variable réelle, des méthodes de sommations, des séries orthogonales, etc. Il est intéressant de voir certains théorèmes donner des résultats même dans des disciplines assez éloignées les unes des autres. Ainsi p. ex. le théorème sur l'extension (prolongement) d'une fonctionnelle additive résout simultanément le problème général de la mesure, le problème des moments et celui de l'existence des solutions d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

A coté des méthodes algébriques, ce sont surtout celles de la théorie générale des ensembles qui passent dans ce livre au premier plan, en gagnant à cette théorie plusieurs applications nouvelles. On trouvera aussi dans divers chapitres de ce livre de nouveaux théorèmes généraux. Tels sont, en particulier, les deux derniers chapitres et l'annexe: les résultats qu'ils renferment n'ont été nulle part publiés. Ils constituent une ébauche de l'étude des invariants relatifs aux transformations linéaires (des espaces du type (B)). En particulier, le Chapitre XII contient la définition et l'analyse des propriétés de la *dimension linéaire*, qui joue dans ces espaces un rôle analogue à celui de la dimension au sens ordinaire dans les espaces euclidiens.

Les résultats et les problèmes qui, faute de place, n'ont pas été envisagés, sont discutés brièvement dans les Remarques à la fin du livre. On y trouvera aussi quelques indications bibliographiques supplémentaires. D'une façon générale (excepté l'Introduction) je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples ou bien démontrés ici pour la première fois.

Un certain nombre d'ouvrages plus récents a paru et continue à paraître dans le périodique *Studia Mathematica*, qui poursuit le but de grouper avant tout les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et ses applications.

Je me propose de consacrer un second livre (qui constituera la suite de l'ouvrage présent) à la théorie des autres opérations fonctionnelles avec un large emploi des méthodes topologiques.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail, en se chargeant de la traduction de mon manuscrit polonais, ou concourir à ma tâche par leurs précieux conseils. Je remercie tout particulièrement M. H. A u e r b a c h pour sa collaboration à la rédaction de l'Introduction et M. S. M a z u r pour le concours général qu'il m'a prêté et pour sa part à la rédaction des Remarques finales.

Stefan Banach.

Lwów, Juillet 1932.

ERREURS.

Page 130 en haut lire:

(45) la suite $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| + |A_n| \right\}$ bornée,

(46) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \right) = A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ pour $i = 1, 2 \dots$