MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

TOM I

THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES

PAR

STEFAN BANACH

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

WARSZAWA 1932

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE VII. **Suites biorthogonales.**

CHAPITRE VIII. **Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type** (B).

CHAPITRE IX. **Suites faiblement convergentes d'éléments.**

CHAPITRE X. **Equations fonctionnelles linéaires.**

INDEX TERMINOLOGIQUE.

[1]) Terme coïncidant avec le terme classique „prolongement" pour les fonctions.

[1]) Terme coïncidant pour les suites orthogonales de fonctions avec le terme „normale".

PRÉFACE.

La théorie des opérations, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle: il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations. On voit dans cette théorie les méthodes de mathématique classique s'unir aux méthodes modernes d'une manière parfaitement harmonieuse et remarquablement efficace. Elle permet souvent d'interpréter les théorèmes de la théorie des ensembles ou de la topologie d'une façon tout à fait imprévue. Ainsi p. ex. le théorème topologique sur le point invariant se laisse traduire moyennant la théorie des opérations (comme l'ont montré M. M. Birkhoff et Kellogg) dans le théorème classique sur l'existence des solutions des équations différentielles. Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiement approfondie n'est possible qu' à l'aide de la théorie des opérations. Telles sont aujourd'hui: la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations, etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien par sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prètent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires,* qui correspond à celle des formes linéaires $a_1 x_1 + a_2 x_2 + + \dots + a_n x_n$ de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme suit. Soient E et E_1 deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit $y = U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de E_1 (dans le cas où E_1 est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de *fonctionnelle*). Si, quels que soient x_1 et x_2 de E, on a $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, l'opération $U(x)$ s'appelle *additive.* Si, en outre, E et E_1 sont des espaces *métriques,* c. à d. que dans chacun d'eux la *distance* des éléments est définie, on peut considérer des opérations $U(x)$ *continues.* Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent *linéaires.*

Dans ce livre, je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits *espaces du type* (B), dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à p-ième puissance sommable, l'espace de Hilbert, etc.

Je donne aussi l'interprétation des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques, à savoir dans la théorie des groupes, des équations différentielles, des équations intégrales, des équations à une infinité d'inconnues, des fonctions de variable réelle, des méthodes de sommations, des séries orthogonales, etc. Il est intéressant de voir certains théorèmes donner des résultats même dans des disciplines assez éloignées les unes des autres. Ainsi p. ex. le théorème sur l'extension (prolongement) d'une fonctionnelle additive résout simultanément le problème général de la mesure, le problème des moments et celui de l'existence des solutions d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

A coté des méthodes algébriques, ce sont surtout celles de la théorie générale des ensembles qui passent dans ce livre au premier plan, en gagnant à cette théorie plusieurs applications nouvelles. On trouvera aussi dans divers chapitres de ce livre de nouveaux théorèmes généraux. Tels sont, en particulier, les deux derniers chapitres et l'annexe: les résultats qu'ils renferment n'ont été nulle part publiés. Ils constituent une ébauche de l'étude des invariants relatifs aux transformations linéaires (des espaces du type (B)). En particulier, le Chapitre XII contient la définition et l'analyse des propriétés de la *dimension linéaire,* qui joue dans ces espaces un rôle analogue à celui de la dimension au sens ordinaire dans les espaces euclidiens.

Les résultats et les problèmes qui, faute de place, n'ont pas été envisagés, sont discutés brièvement dans les Remarques à la fin du livre. On y trouvera aussi quelques indications bibliographiques supplémentaires. D'une façon générale (excepté l'Introduction) je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples ou bien démontrés ici pour la première fois.

Un certain nombre d'ouvrages plus récents a paru et continue à paraître dans le périodique *Studia Mathematica,* qui poursuit le but de grouper avant tout les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et ses applications.

Je me propose de consacrer un second livre (qui constituera la suite de l'ouvrage présent) à la théorie des autres opérations fonctionnelles avec un large emploi des méthodes topologiques.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail, en se chargeant de la traduction de mon manuscrit polonais, ou concourir à ma tâche par leurs précieux conseils. Je remercie tout particulièrement M. H. Auerbach pour sa collaboration à la rédaction de l'Introduction et M. S. Mazur pour le concours général qu'il m'a prêté et pour sa part à la rédaction des Remarques finales.

Stefan Banach.

Lwów, Juillet 1932.

ERRATA.

Page 130 en haut lire:

(45) *la suite* $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| + |A_n| \right\}$ *bornée*,

(46) $\lim_{n\to\infty} \left(A_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \right) = A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *et* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ *pour* $i = 1, 2 \ldots$