ANNEXE.

Convergence faible dans les espaces du type *(B)*.

Nous distinguons dans les espaces du type (B) deux notions de convergence faible, à savoir: la convergence faible des fonctionnelles linéaires et celle des éléments[1]. Les deux notions sont évidemment différentes. Nous allons ajouter ici quelques théorèmes relatifs à l'étude de ces notions.

§ 1. *Les dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires.*

Etant donné un espace du type (B) *séparable*, soit Γ un ensemble quelconque de fonctionnelles linéaires définies dans E.

Appelons une fonctionnelle linéaire X *point d'accumulation faible* de l'ensemble Γ, lorsqu'il existe une suite de fonctionnelles $\{X_k\}$, où $X_k \neq X$ et $X_k \subset \Gamma$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, qui converge faiblement vers la fonctionnelle X.

L'ensemble de tous les points d'accumulation faible de l'ensemble Γ sera dit le *dérivé faible d'ordre* 1 *de* Γ, et le dérivé faible du dérivé faible d'ordre $n-1$ de Γ s'appellera *dérivé faible* d'ordre n de Γ. Les dérivés faibles successifs de Γ seront désignés par $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \ldots, \Gamma_{(n)}, \ldots$

Si Γ est un ensemble linéaire, on a évidemment

$$\Gamma \subset \Gamma_{(1)} \subset \Gamma_{(2)} \subset \ldots \subset \Gamma_{(n)} \subset \Gamma_{(n+1)} \subset \ldots$$

---

[1]) cf. Chap. VIII, § 4, et Chap. IX, § 1.

Il est facile de donner un exemple d'ensemble linéaire Γ qui soit fermé, sans être faiblement fermé.

Considérons, en effet, comme Γ l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c_0) [1]) de la forme

$$X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \text{ [2])}, \tag{1}$$

où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ *et* $C_1 = \sum_{i=2}^{\infty} C_i$.

On constate aisément que l'ensemble Γ ainsi défini est linéaire, fermé et qu'il ne contient pas la fonctionnelle de la forme (1) où $C_1 = 1$ et $C_i = 0$ pour $i = 2, 3, \ldots$. Or, cette dernière fonctionnelle étant (voir Remarques au Chap. VIII, § 6, p. 239) la limite faible de la suite $\{X_k\}$ des fonctionnelles de la forme (1) où

$$C_i = \begin{cases} 1 & \textit{pour } \; i=1 \; \textit{ou} \; i=k \\ 0 & \textit{pour } \; i \neq 1 \; \textit{et} \; i \neq k, \end{cases}$$

l'ensemble Γ n'est pas faiblement fermé.

Théorème 1. *Il existe pour tout n naturel un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c_0) et dont le dérivé faible d'ordre n n'est pas faiblement fermé* [3]).

Démonstration. Toute fonctionnelle linéaire X définie dans (c_0) étant de la forme (1) où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| = |X|$, soient Δ_1 l'ensemble de celles où l'on a $C_{2i} = 0$ et Δ_2 l'ensemble de celles où $C_{2i-1} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Faisons correspondre d'une façon biunivoque à tout couple r, s de nombres naturels un nombre pair $N(r, s)$ et désignons par $Z_{r,s}$ la fonctionnelle linéaire définie dans (c_0) de la forme $Z_{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ et telle que

---

[1]) c. à d. dans l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0 (cf. Chap. XI, § 6, p. 180).

[2]) cf. Chap. IV, § 4, p. 66.

[3]) Le premier exemple d'un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires dont le dérivé faible n'est pas faiblement fermé a été donné par M. S. Mazurkiewicz *(Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires,* Studia Mathematica II (1930), p. 68—71).

$$(2) \qquad C_i = \begin{cases} 1 & pour \quad i = N(r, s) \\ 0 & pour \quad i \neq N(r, s). \end{cases}$$

Considérons un ensemble linéaire quelconque G de fonctionnelles linéaires définies dans (c_0). Soit H l'ensemble de toutes les fonctionnelles de la forme (1) où $C_{2i} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et telles que la fonctionnelle $\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i-1}\, \xi_i$ appartienne à G. L'ensemble H ainsi défini est évidemment linéaire et on a $H \subset \Delta_1$. Comme sous-espace de (l), l'ensemble Δ_1 est séparable. H contient donc une suite de fonctionnelles $\{Y_r\}$ dense dans l'ensemble des fonctionnelles à normes $\leqslant 1$, appartenant à H, et telle que

$$(3) \qquad |Y_r| \leqslant 1 \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots$$

Posons pour r et s naturels:

$$(4) \qquad X_{r,s} = Y_r + r\, Z_{r,s}$$

et désignons par Γ l'ensemble linéaire des fonctionnelles X de la forme

$$(5) \qquad X = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}\, X_{r,s} = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} + \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} r a_{r,s}\, Z_{r,s},$$

où il n'y ait tout au plus qu'un nombre fini de $a_{r,s}$ non nuls.

En raison de (4) et (5) on a donc par définition des ensembles Δ_1 et Δ_2

$$(6) \qquad \left\| \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}\, X_{r,s} \right\| \geqslant \left\| \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} r a_{r,s}\, Z_{r,s} \right\| = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} | r a_{r,s} |.$$

Soit à présent $\{X_k\}$ où $X_k \subset \Gamma$ pour $k = 1, 2, \ldots$ une suite faiblement convergente vers X. En vertu de (5) on peut poser

$$(7) \qquad X_k = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}\, X_{r,s} = X_k' + X_k'',$$

où

$$(8) \qquad X_k' = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} \quad et \quad X_k'' = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}\, Z_{r,s}.$$

On a évidemment $X_k' \subset \Delta_1$ et $X_k'' \subset \Delta_2$, quel que soit k, de sorte que les suites $\{X_k'\}$ et $\{X_k''\}$ convergent faiblement vers certaines fonctionnelles $X' \subset \Delta_1$ et $X'' \subset \Delta_2$; par conséquent $X = X' + X''$.

H' désignant, comme d'habitude, l'ensemble dérivé de H au sens ordinaire, nous allons montrer d'abord que

$$X' \subset H'. \tag{9}$$

En effet, il existe par suite de la convergence faible de la suite $\{X_k\}$ vers X, un nombre $M > 0$ tel qu'on a pour $k = 1, 2, \ldots$ $|X_k| \leqslant M$, d'où selon (6)—(8) $\sum\limits_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} |ra_{r,s}^{(k)}| \leqslant M$; en posant donc $b_r^{(k)} = \sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}$, on peut écrire

$$\sum_{r=1}^{\infty} |rb_r^{(k)}| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Il existe par conséquent une suite partielle $\{k_j\}$ telle que la limite $b_r = \lim\limits_{j\to\infty} b_r^{(k_j)}$ existe pour tout $r = 1, 2, \ldots$

On a donc en vertu de (10)

$$\sum_{r=1}^{\infty} r|b_r| \leqslant M. \tag{11}$$

Pour tout m naturel on a en conséquence $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{r=1}^{m-1} |b_r^{(k_j)} - b_r| + \sum\limits_{r=m}^{\infty} |b_r^{(k_j)}| + \sum\limits_{r=m}^{\infty} |b_r|$, ce qui donne selon (11) et par définition de b_r l'inégalité $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sum\limits_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant 2\,\dfrac{M}{m}$, d'où, m étant arbitraire, $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| = 0$.

Remarquons que la série $\sum\limits_{r=1}^{\infty} b_r Y_r$ est d'après (3) et (11) convergente et l'égalité qui précède implique d'après (8) que X' en est la somme. Comme $Y_r \subset H$ pour tout r naturel et H est un ensemble linéaire, on a donc $X' \subset H'$.

Il est ainsi démontré que pour $X = X' + X'' \subset \Gamma_{(1)}$, où $X' \subset \Delta_1$ et $X'' \subset \Delta_2$, on a $X' \subset H'$. La formule (9) se trouve donc établie.

D'autre part, on constate facilement que la suite $\{Z_{r,s}\}$ tend faiblement vers Θ avec $s \to \infty$; par conséquent en vertu de (4), la suite $\{X_{r,s}\}$ tend faiblement vers Y_r, lorsque $s \to \infty$. On a donc

$$Y_r \subset \Gamma_{(1)} \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Soit maintenant $\{X_k\}$ où $X_k \subset \Gamma_{(1)}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ une suite faiblement convergente vers $X \subset \Delta_1 \, \Gamma_{(2)}$ [1]. On a évidemment $X_k = X_k' + X_k''$, où $X_k' \subset H'$ et $X_k'' \subset \Delta_2$. On aperçoit aisément que la suite $\{X_k'\}$ converge faiblement vers X, d'où $X \subset H_{(1)}$. Réciproquement, il existe pour tout $X \subset H_{(1)}$ une suite $\{X_k\}$ de fonctionnelles appartenant à H et faiblement convergente vers X. Nous pouvons admettre sans restreindre la généralité que $|X_k| \leqslant 1$ quel que soit $k = 1, 2, \ldots$ Par définition de la suite $\{Y_r\}$ il existe pour tout k un indice r_k tel que $|X_k - Y_{r_k}| \leqslant \frac{1}{k}$, de sorte que la suite $\{Y_{r_k}\}$ est aussi faiblement convergente vers X. Il en résulte selon (12) que $X \subset \Gamma_{(2)}$, d'où $X \subset \Delta_1 \, \Gamma_{(2)}$ (puisque $H_{(1)} \subset \Delta_1$ par définition de Δ_1). Donc

$$\Delta_1 \, \Gamma_{(2)} = H_{(1)}. \tag{13}$$

En procédant ainsi de suite, on montrera par induction que l'on a d'une façon générale

$$\Delta_1 \, \Gamma_{(n+1)} = H_{(n)} \quad pour\ tout \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Ceci établi, revenons à l'ensemble donné G. Si l'on admet que le dérivé G' de G n'est pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé H' de H, et, en vertu de (9) et (13), il en sera encore de même du dérivé faible $\Gamma_{(1)}$ de Γ. D'une

[1]) Le symbole AB désigne d'une façon générale la partie commune des ensembles A et B.

façon analogue, en admettant que le dérivé faible $G_{(n-1)}$ d'ordre $n-1$ de G ne soit pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé faible $H_{(n)}$ d'ordre n de H, donc, en vertu de (14), aussi du dérivé faible $\Gamma_{(n+1)}$ d'ordre $n+1$ de Γ, c. q. f. d.

Remarque. On peut définir les *dérivés faibles* $\Gamma_{(\xi)}$ *d'ordre transfini* ξ *de* Γ pour les nombres transfinis ξ de deuxième classe, en posant $\Gamma_{(\xi)} = \sum\limits_{\eta<\xi} \Gamma_{(\eta)}$ ou $\Gamma_{(\xi)} = (\Gamma_{(\xi-1)})_{(1)}$, suivant que ξ est un nombre-limite ou non.

On peut établir alors par induction le théorème suivant, analogue au th. 1:

Il existe pour tout nombre transfini ξ *de deuxième classe un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace* (c_0) *et dont le dérivé faible d'ordre* ξ *n'est pas faiblement fermé* [1].

On peut cependant montrer que, E étant un espace du type (B) séparable et Γ un ensemble arbitraire de fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe toujours un tel nombre ξ fini ou transfini de deuxième classe que l'ensemble $\Gamma_{(\xi)}$ est faiblement fermé. C'est une conséquence facile du th. 4 (Chap. VIII, § 5), p. 124.

Théorème 2. *Soient* E *un espace du type* (B) *séparable et* $\Gamma \subset \overline{E}$ [2] *un ensemble linéaire. Pour que* $\Gamma_{(1)} = \overline{E}$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$ *tel que* Γ *contienne pour tout* $x \subset E$ *une fonctionnelle* X *satisfaisant aux conditions*

$$(15) \qquad \|X\| \leqslant M \quad \textit{et} \quad |X(x)| = \|x\|.$$

Démonstration. Nécessité. Soit pour tout n natutel Δ_n l'ensemble des fonctionnelles linéaires X définies dans E qui sont des limites faibles des suites $\{X_k\}$ de fonctionnelles appartenant

---

[1]) Voir S. Banach, *Sur le dérivé faible des ensembles de fonctionnelles linéaires*, Studia Mathematica IV (à paraître).

[2]) $\overline{E}$ désigne, comme auparavant, l'espace conjugué avec E, c. à d. l'espace des fonctionnelles linéaires définies dans E.

à Γ et vérifiant l'inégalité $|X_k| \leqslant n$ pour $k = 1, 2, \ldots$ On a donc en vertu du th. 2 (Chap. VIII, § 5), p 123, $\Gamma_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, d'où par l'hypothèse

$$(16) \qquad \overline{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n .$$

Remarquons que tout Δ_n est un ensemble fermé. Soit, en effet, $\{X_j\}$ une suite de fonctionnelles appartenant à Δ_n où $\lim_{j \to \infty} |X_j - X| = 0$. Par définition de Δ_n il existe donc pour tout j une suite $\{X_k^j\}$ faiblement convergente vers X_j, où $X_k^j \subset \Gamma$ et $|X_k^j| \leqslant n$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Etant donnée une suite $\{x_r\}$, dense dans E, les égalités $\lim_{k \to \infty} X_k^j(x_r) = X_j(x_r)$ et $\lim_{j \to \infty} X_j(x_r) = X(x_r)$, qui se présentent quels que soient j et r, entraînent l'existence d'une suite $\{X_{k_j}^j\}$ telle que $\lim_{j \to \infty} X_{k_j}^j(x_r) = X(x_r)$ pour tout $r = 1, 2, \ldots$ Comme $|X_{k_j}^j| \leqslant n$, il en résulte en vertu du th. 2 (Chap. VIII, § 4), p. 123, que la suite $\{X_{k_j}^j\}$ converge faiblement vers X, d'où $X \subset \Delta_n$.

Ainsi, tout Δ_n étant fermé et l'espace $\overline{E}$ étant également du type (B), l'égalité (16) entraîne l'existence d'un indice n_0 tel que Δ_{n_0} contient une sphère $K \subset \overline{E}$. Désignons par X' le centre et par ρ le rayon de K.

Etant donné un élément $x \subset E$, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle $X_0 \subset \overline{E}$ telle que

$$(17) \qquad X_0(x) = |x| \quad et \quad |X_0| = 1 .$$

Posons

$$(18) \qquad \lambda = \frac{\rho}{1 + |X'|} \quad et \quad X'' = \lambda X_0 + (1 - \lambda) X' .$$

On en tire facilement $|X'' - X'| \leqslant \rho$, d'où $X'' \subset K \subset \Delta_{n_0}$. Il existe par conséquent deux suites $\{X_k'\}$ et $\{X_k''\}$ de fonctionnelles appartenant à Γ et faiblement convergentes vers X' et X'' respectivement; on a donc en même temps

$$(19) \qquad |X_k'| \leqslant n_0 \quad et \quad |X_k''| \leqslant n_0 \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots$$

La suite $\left\{\frac{1}{\lambda} X_k'' - \frac{1 - \lambda}{\lambda} X_k'\right\}$ appartient à Γ et d'après (18) tend faiblement vers X_0. D'après (17) il existe par conséquent un indice k_0 tel que

$$(20) \quad \frac{1}{\lambda} X''_{k_0}(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda} X'_{k_0}(x) = \alpha \cdot |x| \quad \textit{où} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 2.$$

En posant donc $X = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} X''_{k_0} - \frac{1-\lambda}{\lambda} X'_{k_0}\right)$, on obtient $X \subset \Gamma$, $X(x) = |x|$, et, en vertu de (18) — (20), $|X| \leqslant M = \frac{2n_0}{\rho}(2 + 2|X'| + \rho)$, de sorte que M est indépendant de x. Ainsi la condition (15) se trouve en effet réalisée.

S u f f i s a n c e. Δ désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires X appartenant à Γ et telles que $|X| \leqslant 1$, il existe dans Δ suivant le th. 4 (Chap. VIII, § 5), p. 124 [1]), une suite de fonctionnelles linéaires $\{X_r\}$ faiblement dense dans Δ.

Posons pour tout $x \subset E$

$$(21) \qquad y = \{\eta_r\} \quad \textit{où} \quad \eta_r = X_r(x) \quad \textit{pour} \quad r = 1, 2, \ldots$$

On a donc

$$(22) \qquad |\eta_r| \leqslant |X_r| \cdot |x| \leqslant |x|,$$

d'où $y \subset (m)$. En admettant pour y la norme adoptée dans (m), on obtient de (21) et (22)

$$(23) \qquad |y| \leqslant |x|.$$

D'autre part, $X \subset \Gamma$ désignant une fonctionnelle qui remplit par l'hypothèse la condition (15), posons $X' = \frac{1}{M} X$. Par conséquent $|X'| \leqslant 1$, d'où $X' \subset \Delta$. Il existe donc une suite partielle $\{X_{r_j}\}$ faiblement convergente vers X', d'où $\lim\limits_{j\to\infty} |X_{r_j}(x)| = |X'(x)|$, ce qui donne en vertu de (15) et (21), $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} |\eta\,| \geqslant |X'(x)| \geqslant \frac{1}{M}|x|$ et par conséquent

$$(24) \qquad |y| \geqslant \frac{1}{M}|x|.$$

---

1) en y remplaçant Γ par Δ et Δ par $\{X_r\}$.

En posant donc $y = U(x)$, on voit facilement de (21) et (22) que l'opération $U(x)$ est linéaire; en vertu de (24) il en est de même de l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$. L'espace E étant par hypothèse séparable, le contredomaine E_1 de $U(x)$ l'est également par suite de la continuité de cette opération.

Ceci dit, soient X une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E et

$$(25) \qquad Y(y) = X[U^{-1}(y)],$$

de sorte que (l'opération $U^{-1}(y)$ étant linéaire) Y est une fonctionnelle linéaire définie dans E_1. En vertu du théorème de M. S. Mazur (Chap. IV, § 4), p. 72 [1]), il existe donc une suite double de nombres $\{\alpha_{nr}\}$ telle que

$$(26) \qquad Y(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{nr}\,\eta_r \quad \textit{pour} \quad y \subset E_1$$

et $\alpha_{nr} = 0$ pour $r > k_n$ où $\{k_n\}$ est une suite de nombres naturels. On en déduit suivant (21):

$$(27) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{nr}\,\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr}\,\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr}\,X_r(x) = \overline{X}_n(x),$$

de sorte que $\overline{X}_n \subset \Gamma$ pour $n = 1, 2, \ldots$, puisque Γ est un ensemble linéaire et $X_r \subset \Delta \subset \Gamma$.

Or, on a selon (26) et (27) $Y[U(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n(x)$, d'où selon (25) $X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n(x)$ pour tout $x \subset E$; la suite $\{\overline{X}_n\}$ converge donc faiblement vers X. Par conséquent $X \subset \Gamma_{(1)}$, ce qui prouve que la condition est en effet suffisante, c. q. f. d.

Il est facile de voir que *l'ensemble E de toutes les fonctions réelles bornées et continues $x(q)$, définies dans n'importe quel ensemble métrique Q, constitue un espace du type (B),* lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres de la façon habituelle et prend comme norme

---

[1]) en y remplaçant ξ_j par η_r.

(28) $$\|x\| = \text{borne}\sup_{q \subset Q} |x(q)|.$$

Si, en outre, l'ensemble Q est *compact*, l'espace E en question est *séparable*.

On a dans ces hypothèses le

Théorème 3. *$\{q_r\}$ désignant une suite de points dense dans Q, il existe pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E un tableau de nombres réels $\{\alpha_{ir}\}$ et une suite de nombres naturels $\{k_n\}$ telles que*

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{ir}\, x(q_r) = X(x) \quad \textit{pour} \quad x \subset E.$$

La démonstration résulte du th. 2 qui précède, étant donné que dans ces conditions l'ensemble Γ des fonctionnelles linéaires de la forme $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\, x(q_i)$, où a_i sont des nombres réels et m est un nombre naturel quelconques, satisfait à l'hypothèse du th. 2.

En effet, il existe pour tout $x \subset E$ un $q_0 \subset Q$ tel que $|x(q_i)| \geqslant \frac{1}{2} \max\limits_{q \subset Q} |x(q)| = \frac{1}{2}\|x\|$ et comme $X_0(x) = x(q_0)$ est une fonctionnelle linéaire à la norme 1 on n'a qu'à mettre $M = 2$.

Le th. 3 peut être aussi déduit facilement par l'application directe du th. de M. S. Mazur, p. 72.

§ 2. *Convergence faible des éléments.*

Soit à présent Q un ensemble abstrait quelconque, pas nécessairement métrique, et E l'espace du type (B) de toutes les fonctions réelles *bornées* $x(q)$ définies dans Q, avec la norme (28).

Une fonctionnelle X définie dans E s'appellera *non négative*, lorsque, quelle que soit la fonction $x \subset E$, la condition $x(q) \geqslant 0$ pour tout $q \subset Q$ entraîne $X(x) \geqslant 0$.

Théorème 4. *Toute fonctionnelle linéaire X définie dans E est une différence de deux fonctionnelles linéaires non négatives définies dans E.*

Démonstration. Posons pour tout sous-ensemble S de Q

$$\mu(S) = \underset{T \subset S}{\text{borne sup}}\, X(\varphi_T) \tag{29}$$

où φ_T désigne d'une façon générale la fonction caractéristique de l'ensemble T. On a donc

$$0 \leqslant \mu(S) \leqslant \|X\| \tag{30}$$

et $\mu(S_1 + S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$ pour S_1 et S_2 disjoints. En raison de (29) on a de plus

$$X(\varphi_S) \leqslant \mu(S). \tag{31}$$

Pour toute fonction $x \subset E$ telle que $\|x\| = 1$ soit

$$x_n(q) = \frac{i}{n} \quad \textit{pour} \quad \frac{i}{n} \leqslant x(q) < \frac{i+1}{n} \quad \textit{où} \quad -n \leqslant i \leqslant n. \tag{32}$$

On a évidemment $|x_n(q) - x(q)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $q \subset Q$, d'où $\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{n}$ et par conséquent

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{33}$$

$S_{i,n}$ désignant l'ensemble de tous les éléments de Q qui satisfont à l'équation $x_n(q) = \frac{i}{n}$ où $-n \leqslant i \leqslant n$, posons

$$X'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n}). \tag{34}$$

On montre facilement que, en vertu de (33), la limite (34) existe et qu'on a selon (30) $|X'(x)| \leqslant \|X\|$.

Or, la fonctionnelle $X'(x)$ est non négative, car, en admettant que

$$x(q) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad q \subset Q, \tag{35}$$

on obtient de (30) et (34) l'inégalité

$$X'(x) \geqslant 0. \tag{36}$$

Remarquons d'autre part que (32) donne $x_n(q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \varphi_{S_{i,n}}(q)$, d'où selon (31) $X(x_n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n})$ et par conséquent d'après (33) et (34)

$$X(x) \leqslant X'(x), \tag{37}$$

de sorte que la fonctionnelle

$$X''(x) = X'(x) - X(x) \tag{38}$$

est également non négative, car on a en vertu de (37) l'inégalité $X''(x) \geqslant 0$ toutes les fois que la condition (35) se présente. Enfin, $X(x) = X'(x) - X''(x)$ par suite de (38).

Théorème 5. *Pour qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ à normes bornées dans leur ensemble et appartenant à E converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \varlimsup_{i\to\infty} |x_n(q_i)| = 0 \tag{39}$$

pour toute suite de points $\{q_i\}$ appartenant à Q.

Démonstration. Nécessité. Supposons, par contre, que pour une suite $\{q_i\}$ de points de Q on ait $\varlimsup_{n\to\infty} \varlimsup_{i\to\infty} |x_n(q_i)| > \alpha > 0$. Il existe donc une suite croissante $\{n_k\}$ de nombres naturels telle que $\varlimsup_{i\to\infty} |x_{n_k}(q_i)| > \alpha > 0$ pour tout k et on peut en conséquence extraire de $\{q_i\}$ par la méthode de la diagonale une suite partielle $\{q_{i_j}\}$ telle que

$$|\lim_{j\to\infty} x_{n_k}(q_{i_j})| > \alpha > 0 \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Considérons la fonctionnelle linéaire X définie par la formule

$$X(x) = \operatorname*{Lim}_{j\to\infty} x(q_{i_j}) \quad pour\ tout \quad x \subset E,$$

le signe Lim ayant ici le sens défini au Chap. II, § 3, 4, p. 34. On a alors selon (40) $|X(x_{n_k})| > \alpha$ pour $k = 1, 2, \ldots$, d'où

$$\varlimsup_{n\to\infty} |X(x_n)| > \alpha > 0, \tag{41}$$

de sorte que la suite $\{x_n\}$ ne tendrait pas faiblement vers Θ.

Suffisance. Afin de prouver qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ où $|x_n| < M$ pour $n = 1, 2, \ldots$ converge faiblement vers Θ, il suffit donc, inversement, de montrer qu'il n'existe aucune fonctionnelle linéaire et non négative X qui remplisse l'inégalité (41).

Or, supposons par contre, qu'une telle fonctionnelle X existe; nous pouvons évidemment admettre que

$$(42) \qquad |X| = 1 \quad et \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \; X(x_n) > \alpha > 0\,.$$

Posons pour tout $q \subset Q$

$$s_n(q) = \begin{cases} x_n(q) & pour \quad x_n(q) \geqslant 0 \\ 0 & pour \quad x_n(q) < 0 \end{cases}$$

et

$$t_n(q) = x_n(q) - s_n(q)\,.$$

Une des limites $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X(s_n)$ et $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, X(t_n)$ dépasse évidemment $\frac{\alpha}{2}$. Soit donc

$$(43) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(s_n) > \frac{\alpha}{2} > 0\,.$$

Posons ensuite pour tout $q \subset Q$

$$y_n(q) = \begin{cases} s_n(q) & pour \quad s_n(q) \geqslant \dfrac{\alpha}{6} \\ 0 & pour \quad s_n(q) < \dfrac{\alpha}{6}. \end{cases}$$

Alors $\|s_n - y_n\| \leqslant \frac{\alpha}{6}$, d'où selon (42) et (43)

$$(44) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(y_n) > \frac{\alpha}{3} > 0\,.$$

Désignons par S_n le sous-ensemble de Q formé de tous les $q \subset Q$ tels que $|x_n(q)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ et soit $\varphi_n(q)$ la fonction caractéristique de l'ensemble S_n. Comme $\|y_n\| \leqslant \|s_n\| \leqslant \|x_n\| < M$, on a $\varphi_n(q) \geqslant \frac{1}{M} y_n(q)$ pour tout $q \subset Q$ et $n = 1, 2, \ldots$, donc, la fonctionnelle X étant non négative, $X(M\cdot\varphi_n) \geqslant X(y_n)$, d'où selon (44), en posant $\beta = \frac{\alpha}{3M}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(\varphi_n) > \beta > 0\,. \tag{45}$$

Considérons la fonction d'ensemble F définie pour les sous-ensembles S de Q par l'égalité

$$F(S) = X(\varphi_S) \tag{46}$$

où φ_S est la fonction caractéristique de S. L'inégalité (45) peut donc être écrite dans la forme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F(S_n) > \beta > 0$. Soit n_1 le plus petit nombre naturel tel que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F(S_{n_1} S_n) > 0\ ^{1)}. \tag{47}$$

Un tel n_1 existe.

En effet, supposons par contre que $\lim\limits_{n\to\infty} F(S_k S_n) = 0$ et par conséquent que $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(\sum\limits_{i=1}^{k} S_i S_n\right) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Il existerait donc deux suites croissantes $\{k_j\}$ et $\{n_j\}$ telles que pour $j = 1, 2, \ldots$

$$k_j < n_j < k_{j+1},\quad F(S_{n_j}) > \beta \quad et \quad F\left(\sum_{i=1}^{k_j} S_i S_{n_j}\right) < \frac{\beta}{2}.$$

En posant $T_j = S_{n_j} - \sum\limits_{i=1}^{k_j} S_i S_{n_j}$, on aurait en conséquence

$$T_{j_1} \quad et \quad T_{j_2} \quad disjoints\ pour\ tout\quad j_1 \neq j_2 \tag{48}$$

et

$$F(T_j) > \frac{\beta}{2} \quad pour \quad j = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Par suite, γ_j désignant la fonction caractéristique de l'ensemble T_j, les formules (46) et (49) donneraient

$$X\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right) > n\frac{\beta}{2} \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{50}$$

On a cependant d'après (48) $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right| \leqslant 1$, d'où $X\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right) \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ contrairement à (50).

---

[1]) cf. la note [1]), p. 212.

En procédant comme pour (47), on aboutit par induction à l'existence d'une suite croissante $\{n_j\}$ satisfaisant aux inégalités $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} F(S_{n_1} S_{n_2} \dots S_{n_j} S_n) > 0$, de sorte qu'aucun des ensembles $\{S_{n_j}\}$ n'est vide.

Soit à présent q_i pour $i = 1, 2, \dots$ un point arbitraire de l'ensemble $S_{n_1} S_{n_2} \dots S_{n_i}$. Evidemment, pour tout $i \geqslant j$ on a donc $q_i \subset S_{n_j}$, d'où, par définition de S_n, l'inégalité $|x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ pour tout $j = 1, 2, \dots$ Il en résulte que $\lim\limits_{i\to\infty} |x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ et par conséquent que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \underline{\lim\limits_{i\to\infty}} |x_n(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$, contrairement à l'hypothèse (39).

Théorème 6. *Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n \subset E$ pour $n = 1, 2, \dots$ à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\lim_{i\to\infty}} |X_i(x_n)| = 0 \tag{51}$$

pour chaque suite de fonctionnelles $\{X_i\}$ appartenant à un ensemble Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E qui jouisse des propriétés suivantes:

1⁰ *l'ensemble des normes des fonctionnelles $X \subset \Gamma$ est borné,*

2⁰ *il existe un nombre $N > 0$ tel que pour tout élément $x \subset E$ l'ensemble Γ contient une fonctionnelle X remplissant l'inégalité*

$$X(x) \geqslant N \cdot |x|. \tag{52}$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, considérons l'espace E_1 de toutes les fonctions réelles bornées, définies dans Γ. Faisons correspondre à tout élément $x \subset E$ la fonction $f \subset E_1$ donnée par la relation

$$f(X) = X(x) \quad pour \quad X \subset \Gamma. \tag{53}$$

M désignant la borne supérieure des normes des fonctionnelles $X \subset \Gamma$, posons $f = U(x)$. On a d'après (53) et (52) $N \cdot |x| \leqslant \|f\| \leqslant M \cdot |x|$; par conséquent, l'opération U étant additive, elle est linéaire, de même que son opération inverse.

Ceci établi, si la suite $\{x_n\}$ satisfait à la condition (51), on en conclut d'après (53), en posant $f_n(X) = X(x_n)$, que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} |f_n(X_i)| = 0$. Il en résulte en vertu du th. 5, p. 219, que la suite $\{f_n\}$ tend faiblement vers Θ. Comme l'opération $x = U^{-1}(f)$ est linéaire et $x_n = U^{-1}(f_n)$, il s'en suit en vertu du th. 3, (Chap. IX, § 5), p. 143, que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers Θ.

On montre par un raisonnement semblable que la condition est nécessaire.

Théorème 7. *Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite $\{x_n\}$ de ses éléments à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(54) \qquad \lim_{n\to\infty} X(x_n) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad X \subset \Gamma,$$

où Γ est un ensemble de fonctionnelles jouissant des propriétés 1° *et* 2° *et en outre faiblement compact.*

Démonstration. La condition est nécessaire par définition de la convergence faible des éléments. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit (en raison du th. 6) de montrer que (54) entraîne (51).

Supposons par contre qu'il existe une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ et une suite $\{X_i\}$ de fonctionnelles de Γ telles que

$$(55) \qquad \overline{\lim_{i\to\infty}} |X_i(x_{n_k})| > \alpha > 0 \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Or, l'ensemble Γ étant par hypothèse faiblement compact, il existerait une suite partielle $\{X_{i_j}\}$ faiblement convergente vers une fonctionnelle $X_0 \subset \Gamma$, d'où selon (55) $|X_0(x_{n_k})| \geqslant \alpha > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, contrairement à (54).

On déduit facilement des théorèmes qui viennent d'être établis les théorèmes suivants.

Théorème 8. *Etant donnée une suite $\{x_n\}$ de fonctions réelles continues, définies dans un ensemble Q métrique compact et bornées dans leur ensemble, la condition nécessaire et suffisante pour la faible convergence de $\{x_n\}$ vers Θ est qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(q) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad q \subset Q.$$

La démonstration s'obtient du th. 7, en désignant par E l'espace des fonctions réelles continues définies dans Q et par Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans E de la forme $X(x) = x(q)$ où $x \subset E$ et $q \subset Q$. On a alors évidemment $|X| = 1$ pour tout $X \subset \Gamma$ et il est aisé de voir que Γ remplit aussi les autres hypothèses du th. 7.

Remarque. En particulier, on obtient aussitôt du th. 8 les conditions pour la convergence faible des suites de fonctions continues définies dans l'intervalle rectiligne, resp. dans le carré.

Théorème 9. *Pour qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ appartenant à l'espace (M) converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit que pour toute suite de fonctions $\{\alpha_i(t)\}$ telles que*

$$\int_0^1 |\alpha_i(t)|\, dt = 1 \quad \textit{où} \quad i = 1, 2, \ldots$$

on ait

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} \left| \int_0^1 \alpha_i(t)\, x_n(t)\, dt \right| = 0\,.$$

La démonstration résulte du th. 6, p. 222, en désignant par Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans (M) de la forme

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt \quad \textit{où} \quad \int_0^1 |\alpha(t)|\, dt = 1\,.$$

On a alors $|X| = 1$ pour tout $X \subset \Gamma$ et, pour tout $x \subset (M)$, il existe une fonction $\alpha(t)$ vérifiant les conditions

$$\int_0^1 |\alpha(t)|\, dt = 1 \quad et \quad \int_0^1 \alpha(t)\, x(t)\, dt \geqslant \frac{1}{2} \| x \|.$$

Il suffit donc de poser dans le th. précité $N = \frac{1}{2}$.

Théorème 10. *Pour qu'une suite* $\{x_n\}$, *où* $x_n = \{\xi_k^n\}$, *d'éléments de l'espace* (m) *converge faiblement vers* 0, *il faut et il suffit d'avoir pour toute suite d'indices* $\{k_i\}$

$$\lim_{n \to \infty} \varliminf_{i \to \infty} |\xi_{k_i}^n| = 0.$$

La démonstration résulte du th. 6, p. 222, en désignant par Γ la suite $\{X_j\}$ des fonctionnelles de la forme

$$X_j(x) = \xi_j \quad où \quad x = \{\xi_j\} \subset (m) \quad et \quad j = 1, 2, \ldots$$

On a alors $|X_j| = 1$ pour $j = 1, 2, \ldots$ et il existe en outre pour tout $x \subset (m)$ un j tel que $|X_j(x)| \geqslant \frac{1}{2} \| x \|$. On posera donc $N = \frac{1}{2}$.