CHAPITRE XII.

Dimension linéaire.

§ 1. *Définitions.*

Etant donnés deux espaces E et E_1 du type (F), nous dirons que la *dimension linéaire* de l'espace E *ne dépasse pas* celle de l'espace E_1, en formule:

$$\dim_l E \leqslant \dim_l E_1, \tag{1}$$

si E est isomorphe avec un sous-espace vectoriel fermé de E_1.

Les espaces E et E_1 s'appelleront *de dimension linéaire égale,* en formule:

$$\dim_l E = \dim_l E_1,$$

lorsqu'on a les relations (1) et

$$\dim_l E_1 \leqslant \dim_l E \tag{2}$$

à la fois.

L'espace E sera dit *de dimension linéaire inférieure* que E_1, lorsqu'on a la relation (1) sans avoir (2). En formule:

$$\dim_l E < \dim_l E_1.$$

Enfin, les dimensions linéaires de ces espaces s'appelleront *incomparables,* lorsque les deux relations (1) et (2) sont en défaut.

Les espaces isomorphes sont donc toujours de dimension linéaire égale. On ne sait pas si la réciproque est aussi vraie, mais je considère comme très probable qu'il existe des espaces du type (B), même séparables, qui soient des dimensions linéaires égales sans être isomorphes.

Tout espace qui est isomorphe avec l'espace euclidien n-dimensionnel sera dit simplement *à n dimensions.* Un espace du type (B) pour lequel un tel n n'existe pas sera dit *à une infinité de dimensions.*

§ 2. *Dimension linéaire des espaces (c) et $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$.*

Théorème 1. *Si on a pour un espace E du type (B)*

$$(3) \qquad \dim_l E < \dim_l (c)$$

ou bien

$$(4) \qquad \dim_l E < \dim_l (l^{(p)}) \quad \textit{pour un} \quad p \geqslant 1,$$

E est un espace à un nombre fini de dimensions.

Démonstration. L'espace (c) étant isomorphe avec l'espace (c_0) des suites de nombres convergentes vers 0 (v. Chap. XI, § 6, p. 180, 1°), il existe en vertu de (3) un ensemble linéaire et fermé $G \subset (c_0)$, isomorphe avec E. En supposant que E, donc aussi G, est à une infinité de dimensions, il existerait pour tout N naturel une suite de $N+1$ éléments $z_i \subset G$ où $i = 1, 2, \ldots, N+1$ telle que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i = 0 \quad \textit{entraîne} \ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{N+1} = 0\,.$$

Par conséquent, si on pose $z_i = \{\beta_n^i\}$, on trouvera des nombres α_i où $i = 1, 2, \ldots, N+1$ qui (sans être tous égaux à 0) vérifient les équations $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \beta_n^i = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots, N$. En désignant par $\{\beta_n\}$ la suite $z = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i$, on obtient donc

$$(5) \qquad |z| > 0 \quad \textit{et} \quad \beta_n = 0 \quad \textit{pour} \ n = 1, 2, \ldots N.$$

Il est ainsi établi qu'il existe pour tout N naturel en élément $z = \{\beta_n\}$ de G ayant les propriétés (5).

Définissons à présent par induction une suite $\{y_i\}$, d'éléments de G où $y_i = \{\eta_n^i\}$, en choisissant arbitrairement comme y_1

un élément de G tel que $|y_1| = 1$ et comme y_i où $i = 2, 3, \ldots$ un élément de G tel que l'on ait

$$(6) \qquad |y_i| = 1 \quad et \quad \eta_n^i = 0 \quad pour\ n = 1, 2, \ldots, N_{i-1},$$

le nombre N_{i-1} étant le plus petit de ceux qui satisfont à l'inégalité

$$(7) \qquad |\eta_n^{i-1}| < \frac{1}{3^{i-1}} \quad pour\ tout\ n \geqslant N_{i-1}.$$

L'existence d'une telle suite $\{y_i\}$ résulte aussitôt de la prémisse qui vient d'être établie.

Soit G_0 l'ensemble composé de tous les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$ où $r = 1, 2, \ldots$ et de leurs limites. G_0 est évidemment un ensemble linéaire et fermé.

Ceci dit, considérons une suite bornée quelconque $x = \{\xi_i\}$ et posons

$$(8) \qquad \eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^i \quad pour\ n = 1, 2 \ldots$$

Nous allons montrer que

$$(9) \qquad \frac{1}{6} \|x\| \leqslant \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2} \|x\|.$$

En effet, étant donné un indice n, il existe en vertu de (6) un m_i naturel tel que

$$(10) \qquad |\eta_{m_i}^i| = 1 \quad pour\ i = 1, 2, \ldots,$$

d'où par définition de N_i

$$(11) \qquad N_{i-1} \leqslant m_i < N_i$$

et par conséquent $\lim_{i \to \infty} N_i = \infty$; il existe donc un k naturel tel que l'on a pour l'indice n en question

$$(12) \qquad N_{k-1} \leqslant n < N_k,$$

où $N_0 = 1$.

Pour tout $i > k$ on a par conséquent selon (11) $N_k \leqslant N_{i-1}$, d'où, selon (12), $n < N_{i-1}$. On en conclut en vertu de (6) que $\eta_n^i = 0$ pour tout $i > k$, donc d'après (8) que

$$(13) \qquad \eta_n = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \, \eta_n^i.$$

Pour tout $i < k$ on a en même temps selon (11) $N_i \leqslant N_{k-1}$, d'où selon (12) $N_i \leqslant n$, donc d'après (7) $|\eta_n^i| < \frac{1}{3^i}$. Comme $|\eta_n^k| \leqslant 1$ et $|\xi_i| \leqslant \|x\|$ pour tout i, il en résulte en vertu de (13) que l'on a d'une part la relation $|\eta_n| \leqslant \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} + \|x\| \leqslant \frac{3}{2} \|x\|$, d'où

$$(14) \qquad \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \, |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2} \|x\|,$$

et d'autre part, pour tout k satisfaisant à (12), la relation

$$(15) \qquad |\eta_n| \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - \frac{1}{2} \|x\|.$$

Or, il existe un k tel que $|\xi_k| \geqslant \frac{2}{3} \|x\|$, donc conformément à (10), que $|\eta_{m_k}^k| = 1$. Par conséquent, la relation (15) étant déduite pour l'indice n donné arbitrairement, on en tire pour $n = m_k$: $|\eta_n| \geqslant \frac{2}{3} \|x\| - \frac{1}{2} \|x\| = \frac{1}{6} \|x\|$, d'où $\underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \, |\eta_n| \geqslant \frac{1}{6} \|x\|$. En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (14), nous voyons que la formule (9) se trouve ainsi établie.

Faisons à présent correspondre à tout $x = \{\xi_i\}$ la suite $y = \{\eta_n\}$, définie par l'égalité (8). En vertu de (9) la suite y est bornée et on a, en posant $y = U(x)$,

$$(16) \qquad \frac{1}{6} |x| \leqslant |U(x)| \leqslant \frac{3}{2} |x|,$$

de sorte que l'opération $U(x)$ est *linéaire*.

D'autre part, pour $x_i = \{\xi_n^i\}$, où

$$\xi_n^i = \begin{cases} 1 & pour\ i = n \\ 0 & pour\ i \neq n, \end{cases}$$

on a par définition $y_i = U(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Par conséquent pour $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ on a $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$ d'où, par suite de la continuité de l'opération $U(x)$, il vient $y = U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$, donc, cette dernière série étant convergente, on obtient $y \subset G_0$.

Réciproquement, soit $y \subset G_0$. Par définition de G_0 on a donc $y = \lim_{n\to\infty} s_n$ où $s_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n y_i$; pour $t_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n x_i$ on a par conséquent $t_n \subset (c_0)$ et $U(t_n) = s_n$. Or, la relation (16) donne $\frac{1}{6} |t_p - t_q| \leqslant$ $\leqslant |U(t_p - t_q)| = |s_p - s_q|$; l'égalité $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} |s_p - s_q| = 0$ entraîne donc $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} |t_p - t_q| = 0$. Ainsi la suite $\{t_n\}$ est convergente. En posant $x = \lim_{n\to\infty} t_n$, on a donc $x \subset (c_0)$ et $U(x) = y$, de sorte que l'opération $U(x)$ est *biunivoque* et transforme (c_0) en G_0 *tout entier.*

Les espaces (c_0) et G_0 sont donc isomorphes et comme $G_0 \subset G$, on en conclut que $\dim_l (c_0) \leqslant \dim_l G$, ce qui entraîne par suite des isomorphies entre G et E et entre (c_0) et (c) que $\dim_l (c) \leqslant \dim_l E$, contrairement à l'hypothèse (3). Le nombre de dimensions de E est par conséquent fini, c. q. f. d.

Pour $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la démonstration est analogue.

§ 3. *Dimension linéaire des espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$* [1].

Théorème 2. *Toute suite de fonctions $\{x_i(t)\}$ appartenant à $(L^{(p)})$, faiblement convergente vers 0, contient une suite partielle $\{x_{i_k}(t)\}$ telle que l'on a*

$$(17) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = \begin{cases} O(n^{\frac{1}{p}}) & pour\ 1 < p \leqslant 2 \\ O(n^{\frac{1}{2}}) & pour\ \quad p \geqslant 2. \end{cases}$$

---

[1]) Les théorèmes de ce § ont été trouvés en collaboration avec M. S. Mazur.

Démonstration. Nous allons nous appuyer sur l'inégalité suivante pour $p > 1$:

$$(18)\quad |a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1} b \cdot \operatorname{sign} a + A|b|^p + B\sum_{j=2}^{E(p)} |a|^{p-j}|b|^j \text{ [1])}$$

où a et b sont des nombres réels quelconques, A et B des constantes qui ne dépendent que de p et $E(p)$ désigne l'entier de p. Par conséquent le dernier sommande disparait, lorsque $p \leqslant 2$.

Définissons la suite $\{x_{i_k}\}$ par induction, en posant $i_1 = 1$ et en désignant par i_n où $n > 1$ un nombre naturel arbitraire satisfaisant à l'inégalité

$$(19)\qquad p\left|\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1}(t) \cdot x_{i_n}(t)\, dt\right| \leqslant 1$$

où $s_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}(t)$. Un tel i_n existe, puisque par l'hypothèse la suite $\{x_i(t)\}$ converge faiblement vers 0 et $|s_{n-1}(t)|^{p-1} \subset (L^{(q)})$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

L'inégalité (18) donne pour $a = s_{n-1}(t)$ et $b = x_{i_n}(t)$ par intégration:

$$(20)\quad \int_0^1 |s_n|^p\, dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p\, dt + p\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1} \cdot x_{i_n}\, dt +$$
$$+ A\int_0^1 |x_{i_n}|^p\, dt + B\sum_{j=2}^{E(p)} \int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_n}|^j\, dt.$$

La convergence faible de la suite $\{x_n(t)\}$ implique en vertu du th. 1 (Chap. IX, § 1), p. 133, que la suite des nombres $\{\|x_n\|\}$ est bornée et on peut admettre sans restreindre la généralité du raisonnement que

$$(21)\qquad \|x_n\| \leqslant 1 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots$$

---

[1]) Pour la démonstration de cette inégalité voir S. Banach et S. Saks, *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Mathematica II (1930), p. 52.

Or, dans le cas où $p>2$ on a selon (21) en vertu de l'inégalité de **Riesz** (cf. Introduction, § 2, p. 2) pour $2 \leqslant j \leqslant p$:

$$\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_n}|^j dt \leqslant \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p dt\right]^{\frac{p-j}{p}} \leqslant 1 + \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p dt\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

d'où, selon (19) et (20), $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + A + Bp(1 + \|s_{n-1}\|^{p-2})$, ce qui conduit par itération à la forme

$$(22) \qquad \|s_n\|^p \leqslant C \cdot n + D \sum_{k=1}^{n-1} \|s_k\|^{p-2}$$

où $C = 1 + A + Bp$ et $D = Bp$.

Soit $M = C + D + 2$. Nous allons montrer par induction que

$$(23) \qquad \|s_n\| \leqslant M \cdot n^{\frac{1}{2}} \quad pour\ n = 1, 2, \ldots$$

En effet, par définition de s_n et d'après (21) on a $\|s_1\| \leqslant 1$ et, en admettant que l'inégalité (23) est vraie pour les indices inférieurs à un n donné, on a selon (22) $\|s_n\|^p \leqslant D \cdot M^{p-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\frac{p-2}{2}} + C \cdot n \leqslant$ $\leqslant D \cdot M^{p-2} \cdot n^{\frac{p}{2}} + C \cdot n \leqslant M^p n^{\frac{p}{2}} (D \cdot M^{-2} + n^{1-\frac{p}{2}} C \cdot M^{-p})$, ce qui entraîne l'inégalité (23), puisque, comme on vérifie facilement, la somme en parenthèses est <1 pour $p>2$.

En vertu de (23), l'égalité $\|s_n\| = O(n^{\frac{1}{2}})$ pour $p>2$ est ainsi établie.

Passons au cas où $1 < p \leqslant 2$. Par définition de s_n on tire de (20) et (21) $\int_0^1 |s_n|^p dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p dt + 1 + A + B$, d'où $\|s_n\|^p \leqslant$ $\leqslant \|s_{n-1}\|^p + C$ où $C = 1 + A + B$ et par conséquent $\|s_n\|^p \leqslant \|s_1\|^p +$ $+ C(n-1) \leqslant C \cdot n$ donc, en posant $M^p = C$ nous obtenons $\|s_n\| \leqslant M \cdot n^{\frac{1}{p}}$, de sorte que dans le cas en question l'égalité $\|s_n\| = O(n^{\frac{1}{p}})$ se trouve aussi établie, c. q. f. d.

Remarque. Le théorème précédent cesse d'être vrai, quel que soit $p > 1$, si on remplace dans les relations (17) le signe O par o.

En effet, pour $p \geqslant 2$ soit $x_i(t) = \sin 2\pi i\, t$. Comme on a $\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha(t) \sin 2\pi i\, t\, dt = 0$ pour toute fonction intégrable $\alpha(t)$, la suite $\{x_i(t)\}$ est dans $(L^{(p)})$ faiblement convergente dans l'intervalle $[0,1]$. En posant $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}(t)$ où $\{x_{i_k}(t)\}$ désigne une suite partielle arbitraire, on a donc $\|s_n(t)\| = \sqrt[p]{\int_0^1 |s_n(t)|^p\, dt} \geqslant \sqrt{\int_0^1 s_n^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$, ce qui prouve que O ne peut pas être remplacé par o.

Pour $1 < p \leqslant 2$, en posant

$$x_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \textit{pour} \quad \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} \\ 0 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2^i} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2^{i-1}} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

on a pour toute suite partielle $\{x_{i_k}(t)\}$ l'égalité $\|s_n\| = \sqrt[p]{\int_0^1 |s_n(t)|^p\, dt} = \sqrt[p]{n}$, qui montre l'impossibilité de rempacer O par o aussi dans ce dernier cas.

Théorème 3. *Toute suite $\{x_i\}$ d'éléments de $(l^{(p)})$ où $p > 1$, faiblement convergente vers* 0, *renferme une suite partielle $\{x_{i_k}\}$ telle que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O\left(n^{\frac{1}{p}}\right). \tag{24}$$

Démonstration. Soit $x_i = \{\xi_r^i\}$. La convergence faible de $\{x_i\}$ vers 0 entraîne (cf. p. 137), que

(25) $$\lim_{i\to\infty} \xi_r^i = 0 \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots$$

et que

(26) $$\| x_i \| \leqslant M \quad pour \quad i = 1, 2, \ldots$$

La définition recurrentielle de la suite $\{x_{i_k}\}$ est la suivante: $x_{i_1} = x_1$ et x_{i_n} où $n > 1$ est un terme arbitraire de la suite $\{x_i\}$ satisfaisant à l'inégalité

(27) $$\sum_{j=1}^{N} | \xi_j + \xi_j^{i_n} |^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} | \xi_j |^p + 1,$$

où $\{\xi_j\} = s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}$ et N désigne un nombre naturel tel que

(28) $$\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j |^p \leqslant 1.$$

Un x_{i_n} ainsi défini existe en vertu de (25). On a par définition: $\| s_n \|^p = \| s_{n-1} + x_{i_n} \|^p = \sum_{j=1}^{N} | \xi_j - \xi_j^{i_n} |^p + \sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j + \xi_j^{i_n} |^p$, d'où en vertu de (27) et de l'inégalité de Hölder $\| s_n \|^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} | \xi_j |^p + 1 + \left[\left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j |^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j^{i_n} |^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p$ et par conséquent selon (26) et (28) $\| s_n \|^p \leqslant \| s_{n-1} \|^p + 1 + (1 + M)^p = \| s_{n-1} \|^p + C$ où $C = 1 + (1 + M)^p$. Il en résulte que $\| s_n \|^p \leqslant C \cdot n$, d'où par définition de s_n l'égalité (24), q. f. d.

Remarque. Le th. 3 qui précède cesse d'être vrai pour tout $p > 1$, si on remplace O par o dans la formule (24).

En effet, il suffit de poser

$$\xi_r^i = \begin{cases} 1 & pour \ i = r \\ 0 & pour \ i \neq r, \end{cases}$$

pour avoir $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = n^{\frac{1}{p}}$, quelle que soit la suite partielle $\{x_{i_k}\}$.

Nous allons déduire des th. 2 et 3, qui viennent d'être établis, plusieurs relations d'une part entre les dimensions linéaires des espaces $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$, d'autre part entre celles des espaces $(l^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ et enfin entre les dimensions linéaires des espaces $(L^{(p)})$ et celles des espaces $(l^{(q)})$, en posant partout $p > 1 < q$.

Lemme. *Si* $\dim_l (L^{(p)}) \leqslant \dim_l (L^{(q)})$ *où* $p > 1 < q$, *alors on a soit* $q \leqslant p \leqslant 2$, *soit* $2 \leqslant p \leqslant q$.

Démonstration. Il existe par hypothèse une opération linéaire $y = U(x)$, où $x \subset (L^{(p)})$, qui transforme $(L^{(p)})$ en sous-espace fermé G de $(L^{(q)})$ d'une façon biunivoque et continue. Etant donnée une suite $\{x_n\}$ où $x_n \subset (L^{(p)})$, faiblement convergente vers Θ, il en est donc de même de la suite $\{y_n\}$ où $y_n = U(x_n)$. En vertu du th. 2, p. 197, il existe par conséquent une suite partielle $\{y_{i_n}\}$ telle que

$$(29) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)}) \quad \text{où} \quad \varphi(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{pour } 1 < q \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{pour } q \geqslant 2. \end{cases}$$

L'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ étant continue, il existe un $M > 0$ tel que $\|x\| \leqslant M\|y\|$ pour tout $y \subset G$, d'où $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| \leqslant$ $\leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\|$ et par conséquent, selon (29), $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)})$, donc, $\{x_i\}$ étant une suite arbitraire faiblement convergente vers Θ, on conclut de (29) que

$$(30) \qquad \varphi(p) \leqslant \varphi(q).$$

Or, comme les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$ sont (cf. Chap. XI, § 6, p. 181, 2°) isométriques respectivement avec $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $(L^{(\frac{q}{q-1})})$, nous pouvons admettre que l'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ transforme $(L^{(\frac{q}{q-1})})$ en $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et il résulte du th. 3 (Chap. X, § 1), p. 148, qu'elle a pour contredomaine l'espace $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ tout entier. En vertu du th. 10 (Chap. X, § 1), p. 150, il existe donc un $m > 0$ tel qu'à chaque $X \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ vienne correspondre un $Y \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ de façon qu'on ait $X = \overline{U}(Y)$ et $|Y| \leqslant m|X|$.

Ceci dit, soient $\{X_n\}$ une suite quelconque d'éléments de $(L^{(\frac{p}{p-1})})$, faiblement convergente vers 0 et $\{Y_n\}$ la suite assujettie aux conditions $X_n = \overline{U}(Y_n)$ et $|Y_n| \leqslant m|X_n|$ pour tout n naturel. La suite des normes $\{|Y_n|\}$ étant donc bornée, il existe (voir Chap. VIII, § 7, p. 130), une suite partielle $\{Y_{n_i}\}$ faiblement convergente. Si on en désigne la limite par Y_0, il vient $\overline{U}(Y_0)=0$, puisque la suite $\{X_{n_i}\}$ converge faiblement vers 0. On a en conséquence $X_n = \overline{U}(Y_{n_i} - Y_0)$ et, en outre, la suite $\{Y_{n_i} - Y_0\}$ converge faiblement vers 0. En posant $Y_i = Y_{n_i} - Y_0$ pour $i = 1, 2, \ldots,$ on peut donc en extraire en vertu du th. 2, p. 197, une suite partielle $\{Y_{i_k}\}$ telle que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} Y_{i_k}\right| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right) \tag{32}$$

d'où, en posant $X_{i_k} = \overline{U}(Y_{i_k})$, on obtient $|X_{i_k}| \leqslant |\overline{U}| \cdot |Y_{i_k}|$ et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} X_{i_k}\right| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right). \tag{33}$$

La suite $\{X_{i_k}\}$ étant par définition extraite de $\{X_n\}$, on conclut de (32) et (33) en vertu de la remarque p. 200, que

$$\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{q}{q-1}\right), \tag{34}$$

d'où selon (30) et par définition de la fonction φ on tire sans peine les inégalités qu'il fallait démontrer.

On déduit facilement de ce lemme les théorèmes suivants.

Théorème 4. *Si* $\dim_l(L^{(p)}) = \dim_l(L^{(q)})$ *où* $p > 1 < q$, *on a* $p = q$.

Théorème 5. *Si* $1 < p < 2 < q$, *les espaces* $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Théorème 6. *Si* $1 < p \neq 2$, *on a* $\dim_l(L^2) < \dim_l(L^{(p)})$.

Démonstration. Soit pour $x(t) \subset (L^2)$:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos 2^i t + b_i \sin 2^i t)$$

où $a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos it\, dt$ et $b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin it\, dt$, quel que soit $i = 0, 1, 2, \ldots$

Comme $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = \int_0^{2\pi} x^2(t)\, dt$, il existe [1]) une constante $M > 0$ (ne dépendant que de p) telle que

$$\left[\int_0^{2\pi} |y(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant M \left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En posant $y = U(x)$, on a donc $y \subset (L^{(p)})$ et l'inégalité précédente peut être écrite dans la forme

$$\|y\| \leqslant M \|x\|,$$

de sorte que l'opération $U(x)$ est linéaire.

Il existe [2]) d'autre part une constante K telle que $\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \int_0^{2\pi} |y(t)|\, dt$, d'où en vertu de l'inégalité de Riesz (v. Introduction, § 2, p. 2):

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \sqrt[p]{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |y(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

donc $\|x\| \leqslant C \|y\|$ où $C = K \sqrt[p]{2\pi}$, de sorte que $U(x)$ admet l'opération inverse continue.

On a par conséquent la relation

$$\dim_l (L^2) \leqslant \dim_l (L^{(p)})$$

---

[1]) en vertu d'un théorème de M. A. Zygmund (v. *Sur les séries trigonométriques lacunaires*, Proceed. London. Math. Soc. 5 (1930), p. 138—145).

[2]) voir S. Banach, *Lakunäre trigonometrische Reihen*, Studia Mathematica II (1930), p. 212.

où le signe d'égalité est exclu (puisqu'on aurait alors en vertu du th. 4, p. 203, l'égalité $p=2$, contrairement à l'hypothèse), c. q. f. d.

Il est à noter que le problème suivant reste ouvert: *est-il vrai que pour* $q<p<2$, *ainsi que pour* $2<p<q$ *on a toujours* $\dim_l(L^{(p)})<\dim_l(L^{(q)})$?

Pour les espaces $(l^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ on a le

Théorème 7. *Les espaces* $(l^{(p)})$ *et* $(l^{(q)})$ *où* $1<p\neq q>1$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Démonstration. En posant $\dim_l(l^{(p)})\leqslant\dim_l(l^{(q)})$ et en procédant comme dans la démonstration du lemme, p. 202, on obtient en effet les inégalités (qui correspondent aux formules (30) et (34)):

$$\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{q}\quad et\quad \frac{p-1}{p}\leqslant\frac{q-1}{q},$$

d'où $p=q$, contrairement à l'hypothèse.

Passons aux relations de dimensions linéaires entre $(L^{(p)})$ et $(l^{(q)})$.

Théorème 8. *Si* $\dim_l(L^{(p)})\leqslant\dim_l(l^{(q)})$ *où* $p>1<q$, *on a* $p=q=2$.

Démonstration. Par le même procédé on obtient (au lieu de (30) et (34)):

$$\varphi(p)\leqslant\frac{1}{q}\quad et\quad \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right)\leqslant\frac{q-1}{q},$$

où

$$\varphi(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & pour\ n\leqslant 2\\[2mm] \dfrac{1}{2} & pour\ n\geqslant 2,\end{cases}\tag{35}$$

Il en résulte aussitôt que $p=q=2$, c. q. f. d.

Le th. 8 qui précède entraîne en vertu du th. 1 (Chap. XI, § 2), p. 165, le

Corollaire. *Pour que* $\dim_l(L^{(p)}) = \dim_l(l^{(q)})$, *il faut et il suffit que* $p = q = 2$.

Théorème 9. *Si* $1 < p \neq 2$, *on a* $\dim_l(L^{(p)}) > \dim_l(l^{(p)})$.

Démonstration. En effet, si on avait par contre $\dim_l(L^{(p)}) \leqslant \dim_l(l^{(p)})$, on aurait en vertu du th. 8, p. 205, en y posant $p = q$, l'égalité $p = 2$, contrairement à l'hypothèse.

Il reste donc à montrer que les espaces en question sont de dimensions linéaires comparables. Posons à ce but

$$y_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \textit{pour} \quad \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} \\ 0 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2^i} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2^{i-1}} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

d'où $\int\limits_0^1 |y_i(t)|^p\, dt = 1$, donc $y_i(t) \subset (L^{(p)})$ pour $i = 1, 2, \ldots$; soit pour tout $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i(t),$$

d'où $\int\limits_0^1 |y(t)|^p\, dt = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$. En posant par conséquent $y = U(x)$, on obtient $\|y\| = \|x\|$, ce qui prouve que l'opération $U(x)$ est linéaire et admet l'opération inverse continue. Or, elle transforme par isomorphie $(l^{(p)})$ en sous-espace de $(L^{(p)})$.

Théorème 10. *Pour* $1 < q < p < 2$, *de même que pour* $2 < p < q$, *les espaces* $(L^{(p)})$ *et* $(l^{(q)})$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Démonstration. En supposant que $\dim_l(L^{(p)}) \geqslant \dim_l(l^{(q)})$, on aboutit par le raisonnement employé dans la démonstration du lemme, p. 202, aux inégalités (analogues à (30) et (34)):

$$\frac{1}{q} \leqslant \varphi(p) \quad \textit{et} \quad \frac{q-1}{q} \leqslant \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right),$$

où la fonction φ est définie par la formule (35), p. 205. On en déduit aussitôt qu'on a soit $p \leqslant q \leqslant 2$, soit $2 \leqslant q \leqslant p$, contrairement à l'hypothèse.

La question suivante reste cependant non résolue: *est-il vrai que* $p < q < 2$, *de même que* $2 < q < p$, *entraîne l'inégalité* $\dim_l (L^{(p)}) > \dim_l (l^{(q)})$?