CHAPITRE XI.

Isométrie, équivalence, isomorphie.

§ 1. *Isométrie.*

Soient E et E_1 des espaces métriques (v. Introduction, § 7, p. 8) et $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, une opération biunivoque transformant E en E_1 tout entier. On dit que cette transformation est *isométrique*, lorsqu'elle n'altère pas la distance, c. à d. lorsqu'on a

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ où } y_1 = U(x_1) \text{ et } y_2 = U(x_2)$$

pour tout couple x_1, x_2 d'éléments de E.

Si E et E_1 sont des espaces vectoriels et normés, nous disons que la transformation de E en E_1 donnée par l'opération $y = U(x)$ est *linéaire*, lorsque l'opération $U(x)$ est linéaire.

Les espaces vectoriels normés étant des espaces métriques (cf. Chap. IV, § 1, p. 53), on peut considérer aussi les transformations isométriques de ces espaces l'un en l'autre.

§ 2. *Les espaces* (L^2) *et* (l^2).

Théorème 1. *Les espaces* (L^2) *et* (l^2) *sont isométriques.*

Démonstration. Soit, en effet, $\{x_i(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ une suite quelconque orthogonale, normée et complète. Si $x \subset (L^2)$, on a, comme on sait,

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt \right]^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt\,.$$

En désignant donc par $U(x)$ la suite $y = \{\eta_i\}$ où $\eta_i = \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt$, on a en vertu de (1) $y \subset (l^2)$ et $|U(x)| = |x|$. Comme additive et n'altérant pas la norme, l'opération $y = U(x)$ est linéaire. Or, on sait de la théorie des séries orthogonales qu'il existe pour tout $y \subset (l^2)$ une et une seule fonction $x(t) \subset (L^2)$ telle que $y = U(x)$.

Ainsi l'opération linéaire $y = U(x)$ transforme (L^2) en (l^2) d'une façon biunivoque et sans altérer la norme, donc la distance. Les espaces (L^2) et (l^2) sont par conséquent isométriques.

Remarque. Nous verrons dans la suite que les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ ne sont isométriques que dans le cas où $p = q = 2$. C'est une conséquence du corollaire (Chap. XII, § 3), p. 206.

§ 3. *Transformations isométriques des espaces vectoriels normés.*

Théorème 2. *Toute transformation isométrique $U(x)$ d'un espace vectoriel normé en un autre, telle que $U(\Theta) = \Theta$, est linéaire*[1]).

Démonstration. Soit d'abord E un espace (D) arbitraire et x_1, x_2 un couple quelconque de points de E.

Désignons par H_1 l'ensemble des points $x \subset E$ tels que

$$(2) \qquad (x, x_1) = (x, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2)$$

et, pour $n = 2, 3, \ldots$, par H_n l'ensemble des points $x \subset H_{n-1}$ assujettis pour tout $z \subset H_{n-1}$ à l'inégalité

$$(3) \qquad (x, z) \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(H_{n-1}),$$

où $\delta(H_{n-1})$ désigne le *diamètre* de l'ensemble H_{n-1}, c. à d. la borne supérieure des distances de ses points.

La suite $\{H_n\}$ étant ainsi définie, on a

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \delta(H_n) = 0\,.$$

---

[1]) Ce théorème a été établi par MM. S. Mazur et S. Ulam (v. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. 194, Paris 1932, p. 946—948).

En effet, si les ensembles H_n ne sont pas vides, on a pour tout couple x', x'' de points de H_n: $x'' \subset H_{n-1}$ (puisque par définition $H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_n \supset ...$), donc, en vertu de (3), $(x', x'') \leqslant \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$, par conséquent $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$, d'où $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \delta(H_1)$, et d'autre part, on a en vertu de (2), pour tout couple x', x'' de points de H_1 l'inégalité $(x', x'') \leqslant (x', x_1) + (x'', x_1) = (x_1, x_2)$, donc $\delta(H_1) \leqslant (x_1, x_2)$ et par conséquent $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (x_1, x_2)$, d'où l'égalité (4).

Il en résulte que la partie commune des ensembles H_n (lorsqu'elle n'est pas vide) se réduit à un point. Nous appellerons ce point le *centre* du couple x_1, x_2.

Ceci dit, soit E un espace vectoriel normé. Pour tous deux points x' et x'' de E on a donc

$$(x', x'') = |x' - x''|.$$

Posons $\overline{x} = x_1 + x_2 - x$ pour $x \subset E$. On voit aisément par induction que

(5) $x \subset H_n$ *entraîne* $\overline{x} \subset H_n$ *pour tout* $n = 1, 2, ...$

En effet, si $x \subset H_1$, on a $|\overline{x} - x_1| = |x - x_2|$ et $|\overline{x} - x_2| = |x - x_1|$, donc $|\overline{x} - x_1| = |\overline{x} - x_2| = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$, d'où selon (2) $\overline{x} \subset H_1$ et, en admettant que la relation (5) est vraie pour $n-1$, on a en conséquence pour $x' \subset H_{n-1}$ $x_1 + x_2 - x' \subset H_{n-1}$. Si $x \subset H_n$, on a donc selon (3) $|\overline{x} - x'| = |(x_1 + x_2 - x') - x| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$, d'où $\overline{x} \subset H_n$.

Nous allons montrer que le point $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ est le centre du couple x_1, x_2. On a, en effet, $\xi \subset H_1$, car $|x_1 - \xi| = |x_2 - \xi| = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$. Admettons donc que $\xi \subset H_{n-1}$. Pour tout $x \subset H_{n-1}$ on a en vertu de (5) $x_1 + x_2 - x = \overline{x} \subset H_{n-1}$ et comme $2|\xi - x| = |x_1 + x_2 - 2x| = |x - \overline{x}| \leqslant \delta(H_{n-1})$, on conclut que $|\xi - x| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$, d'où $\xi \subset H_n$. Comme appartenant à H_n pour tout n naturel, le point ξ est donc le centre de x_1, x_2.

Ceci établi, soit E_1 également un espace vectoriel normé et $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, une opération isométrique transformant E en E_1 tout entier de façon que $U(\Theta) = \Theta$. La notion de centre étant définie d'une façon métrique, on aperçoit facilement que le centre du couple quelconque x_1, x_2 de points de E se trouvera transformé en centre du couple $U(x_1), U(x_2)$ de E_1. On a donc

$$U\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right] = \frac{1}{2}[U(x_1) + U(x_2)] \quad \textit{pour } x_1 \subset E \quad \textit{et} \quad x_2 \subset E,$$

d'où, en posant $x_1 = x$ et $x_2 = \Theta$, on obtient par suite de l'hypothèse que $U(\Theta) = \Theta$:

$$U\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}U(x) \quad \textit{pour tout } x \subset E.$$

Il en résulte pour des points arbitraires x_1 et x_2 de E que:

$$U(x_1 + x_2) = U\left[\frac{1}{2}(2x_1 + 2x_2)\right] = \frac{1}{2}U(2x_1) + \frac{1}{2}U(2x_2) =$$
$$= U(x_1) + U(x_2).$$

Ainsi l'opération $U(x)$ est additive et, par suite de sa continuité, linéaire. Il en est donc de même de la transformation $y = U(x)$, c. q. f. d.

§ 4. *Espace des fonctions réelles continues.*

Etant donné un ensemble quelconque Q métrique, complet et compact (cf. Introduction, § 7, p. 9), on peut considérer l'ensemble E des fonctions réelles continues $x(q)$ définies pour $q \subset Q$ comme un espace du type (B), si l'on définit dans E de la façon usuelle l'addition et la multiplication par nombres et choisit comme norme le maximum du module de la fonction.

Lemme. *Soit $x(q) \subset E$ où $q \subset Q$. Pour qu'on ait pour un élément donné $q_0 \subset Q$ l'inégalité*

$$(6) \qquad |x(q_0)| > |x(q)| \quad \textit{pour tout} \quad q \neq q_0,$$

il faut et il suffit que

$$\text{(7)} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\|x+hz\| - \|x\|}{h}$$

existe pour tout $z(q) \subset E$.

En outre, si la fonction $x(q)$ *satisfait à l'inégalité* (6), *on a:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x+hz\| - \|x\|}{h} = z(q_0)\cdot \operatorname{sign} x(q_0) \quad \textit{pour tout} \quad z(q) \subset E.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, on a $\|x\| = |x(q_0)|$ et comme la fonction continue $|x+hz|$ atteint son maximum, on obtient

$$\text{(8)} \qquad |x(q_0)+hz(q_0)| - |x(q_0)| \leqslant \|x+hz\| - \|x\| = \\ = |x(q_h)+hz(q_h)| - |x(q_0)|,$$

où q_h est un point dépendant de h et appartenant à Q. Or, on tire de (8) $|x(q_0)+hz(q_0)| \leqslant |x(q_h)+hz(q_h)|$ et par conséquent $0 \leqslant |x(q_0)| - |x(q_h)| \leqslant |h|\cdot|z(q_0)| + |h|\cdot|z(q_h)| \leqslant 2|h|\cdot\|z\|$, d'où $\lim_{h\to 0} |x(q_h)| = |x(q_0)|$. Il en résulte par suite de la compacticité de Q que

$$\text{(9)} \qquad \lim_{h\to 0} q_h = q_0.$$

Ceci établi, examinons d'abord le cas où $x(q_0) > 0$. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait pour $|h| < \varepsilon$ l'égalité

$$|x(q_0)+hz(q_0)| - |x(q_0)| = x(q_0)+hz(q_0) - x(q_0) = hz(q_0)$$

et, en vertu de (9),

$$|x(q_h)+hz(q_h)| - |x(q_0)| = x(q_h)+hz(q_h) - x(q_0) \leqslant hz(q_h),$$

d'où, selon (8), $hz(q_0) \leqslant \|x+hz\| - \|x\| \leqslant hz(q_h)$ et par conséquent, encore en raison de (9) et par suite de la continuité de $z(q)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x+hz\| - \|x\|}{h} = z(q_0).$$

Dans le cas où $x(q_0) < 0$ on obtiendrait, en procédant d'une façon analogue,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x + hz\| - \|x\|}{h} = -z(q_0).$$

Nous avons ainsi démontré la nécessité de la condition (l'existence de la limite (7)) et, en même temps, la deuxième partie du lemme.

Pour montrer que la condition est suffisante, supposons que le module de la fonction $x(q)$ atteigne son maximum dans deux points distincts q_0 et q_1 de Q, c. à d. que

$$|x(q_0)| = |x(q_1)| \geqslant |x(q)| \quad \textit{pour tout } q \subset Q.$$

Dans le cas où $x(q_0) > 0$ posons $z(q) = (q, q_1)$. Il vient: $\|x + hz\| - \|x\| \geqslant x(q_0) + h(q_0, q_1) - x(q_0)$, d'où

$$\text{(10)} \qquad \liminf_{h \to +0} \frac{\|x + hz\| - \|x\|}{h} \geqslant (q_0, q_1) > 0.$$

On a en même temps $\|x + hz\| - \|x\| \geqslant |x(q_1) + h(q_1, q_1)| - -|x(q_1)| = 0$, d'où

$$\text{(11)} \qquad \limsup_{h \to -0} \frac{\|x + hz\| - \|x\|}{h} \leqslant 0,$$

et les inégalités (10) et (11) montrent l'impossibilité de l'existence de la limite (7).

Dans le cas où $x(q_0) < 0$ on parviendrait, en posant $z = -(q, q_1)$, à la même conclusion, c. q. f. d.

On appelle deux ensembles *homéomorphes*, lorsqu'il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'un en l'autre.

Théorème 3. *Pour que deux ensembles métriques, complets et compacts Q et Q_1 soient homéomorphes, il faut et il suffit que les espaces E et E_1 des fonctions réelles continues définies dans ces ensembles soient isométriques.*

Démonstration. Necessité. On vérifie facilement que, $q' = f(q)$, où $q \subset Q$ et $q' \subset Q_1$, désignant une transformation biunivoque et bicontinue de Q en Q_1 tout entier, la transformation de E_1 en E qui fait correspondre à toute fonction $y(q') \subset E_1$ la fonction $x(q) = y[f(q)] \subset E$ est isométrique.

S u f f i s a n c e. Les espaces E et E_1 étant supposés isométriques, soit $y = V(x)$ l'opération biunivoque qui transforme E en E_1 tout entier, en faisant correspondre à toute fonction $x(q) \subset E$ la fonction $y(q') \subset E_1$ de façon que $\| V(x_1) - V(x_2) \| = \| x_1 - x_2 \|$ pour tous x_1 et x_2 de E.

En posant $U(x) = V(x) - V(\Theta)$, on aperçoit aisément que l'opération $U(x)$ jouit exactement des mêmes propriétés et qu'on a en outre $U(\Theta) = \Theta$. En vertu du th. 2, p. 166, l'opération $y = U(x)$ est donc linéaire.

Soit q_0 un point donné de Q et $x(q) \subset E$ où $q \subset Q$ une fonction satisfaisant à l'inégalité (6) du lemme, p. 168. Comme l'opération $y = U(x)$ n'altère pas la norme, on a pour tout nombre h, en posant $U(z) = t$ où $z \subset E$:

$$\frac{\| x + hz \| - \| x \|}{h} = \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h},$$

d'où, en vertu du lemme précédent,

$$(12) \qquad z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h}.$$

Or, comme l'opération $U(z)$ transforme E en E_1 tout entier, la limite (12) existe pour tout $t \subset E_1$. Il existe par conséquent, en vertu du lemme, un $q'_0 \subset Q_1$ tel que $|y(q'_0)| > |y(q')|$ pour tout point $q' \neq q'_0$ de Q_1 et que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h} = t(q'_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0) \quad \textit{pour tout } t \subset E_1.$$

On en conclut en vertu de (12) que $z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = t(q'_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0)$, d'où, en posant $\varepsilon(q'_0) = \operatorname{sign} x(q_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0)$, on obtient la relation suivante entre $q_0 \subset Q$ et $q'_0 \subset Q_1$:

$$(13) \qquad t(q'_0) = z(q_0) \cdot \varepsilon(q'_0) \quad \textit{où} \quad |\varepsilon(q'_0)| = 1$$

et qui subsiste pour tout $z \subset E$ et $t = U(z)$.

Envisageons donc la fonction

$$q'_0 = f(q_0),$$

qui transforme Q en Q_1.

Cette transformation est *biunivoque*. En effet, l'égalité $q'_1 = q'_2$ où $q'_1 = f(q_1)$ et $q'_2 = f(q_2)$ donne en vertu de (13) $|z(q_1)| = |z(q_2)|$ pour toute fonction $z \subset E$, ce qui entraîne l'égalité $q_1 = q_2$, puisqu'elle se présente en particulier pour la fonction $z(q) = (q, q_1)$.

La fonction f transforme en outre Q en Q_1 *tout entier*. En effet, quel que soit $\overline{q}' \subset Q_1$, on a d'après (13), en posant $t(q') = \frac{1}{1+(q', \overline{q}')}$,

$$|z(q_0)| = \frac{1}{1+(q'_0, \overline{q}')} \quad \textit{pour tout } q_0 \subset Q. \tag{14}$$

Or, comme $\|z\| = \|t\| = 1$, il existe un $q_0 \subset Q$ tel que $|z(q_0)| = 1$. Pour le point $q'_0 = f(q_0)$ on a donc, selon (14), $\frac{1}{1+(q'_0, \overline{q}')} = 1$, d'où $(q'_0, \overline{q}') = 0$ et par conséquent $\overline{q}' = q'_0$.

Enfin, la transformation f est *continue*. En effet, soit $q_0 = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$ et $q'_n = f(q_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il vient, selon (13), $\lim\limits_{n\to\infty} |t(q'_n)| = |t(q'_0)|$ pour tout $t \subset E_1$, d'où en particulier pour $t(q') = (q', q'_0)$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} (q'_n, q'_0) = (q'_0, q'_0) = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n = q'_0$.

Il en résulte par suite de la compacticité de Q et Q_1 que ces ensembles sont homéomorphes, c. q. f. d.

Remarque. On voit de cette démonstration que si l'opération $y = U(x)$ transforme l'espace E en espace E_1 d'une façon isométrique et si $U(\Theta) = \Theta$, il existe une fonction $q' = f(q)$ transformant l'ensemble Q en Q_1 par homéomorphie et une fonction continue $\varepsilon(q')$ telle que

$$y(q') = x[f^{-1}(q')] \cdot \varepsilon(q') \quad \textit{où} \quad y = U(x) \quad \textit{et} \quad |\varepsilon(q')| = 1.$$

Applications. Le th. 3 qui précède implique en particulier que l'espace (C) des fonctions continues $x(t)$ définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

n'est pas isométrique avec celui des fonctions continues $x(u, v)$ de deux variables u et v, définies dans le carré $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Cependant l'espace $(L^{(p)})$ des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ est isométrique avec celui des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans le carré $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Il existe, en effet, une fonction biunivoque $t = \varphi(u, v)$ qui transforme ce carré (sauf un ensemble de mesure nulle) en intervalle [0,1] (encore sauf un ensemble de mesure nulle) de manière que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles de mesure égale.

En faisant donc correspondre à toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$ la fonction $y(u, v) = x[\varphi(u, v)]$, on obtient une transformation des deux espaces fonctionnels l'un en l'autre qui, comme il est facile de voir, n'altère pas les distances.

§ 5. *Rotations.*

Nous appelons *rotation* d'un espace E du type (B) *autour du point* $x_0 \subset E$ toute transformation biunivoque et isométrique de E en E tout entier qui en transforme le point x_0 en x_0.

En vertu du th. 2, p. 166, toute rotation autour de Θ est une transformation linéaire.

Nous allons étudier les rotations dans quelques cas particuliers des espaces du type (B).

Espace (C). La rotation la plus générale dans (C) autour de Θ est donnée par l'opération de la forme

$$y(t) = \varepsilon \cdot x[\alpha(t)],$$

où $x(t) \subset (C)$, $\varepsilon = +1$ ou -1 indépendamment de $x(t)$ et $\alpha(t)$ est une fonction arbitrairement choisie qui transforme l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant 1$ en lui-même d'une façon biunivoque.

La démonstration résulte de la remarque, p. 172, en tenant compte du fait que, $\varepsilon(t)$ étant une fonction continue telle que $|\varepsilon(t)| = 1$, on a $\varepsilon(t) = \text{const.}$

Espace (c). Nous pouvons considérer cet espace comme celui des fonctions continues définies dans un ensemble borné et fermé de nombres réels ayant un seul point d'accumulation. En vertu de la remarque, p. 172, on en déduit facilement le théorème suivant.

La rotation la plus générale dans (c) autour de Θ est donnée par l'opération $y = U(x)$ où

$$x = \{\xi_n\} \subset (c),\; y = \{\eta_n\} \subset (c) \quad et \quad \eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)},$$

$\{\varepsilon_n\}$ désignant une suite convergente quelconque telle que $|\varepsilon_n| = 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\varphi(n)$ une fonction arbitrairement choisie qui transforme d'une manière biunivoque l'ensemble des nombres naturels en lui-même.

Espace (L^2). Toute rotation de (L^2) autour de Θ est de la forme

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt, \tag{15}$$

où $x(t) \subset (L^2)$ et $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\}$ sont des suites arbitraires, complètes dans (L^2), de fonctions orthogonales normées définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Démonstration. On a d'après (15)

$$\int_0^1 y^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt\right]^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt,$$

d'où $\|y\| = \|x\|$. Toute transformation de la forme (15) est donc en effet une rotation autour de Θ.

Réciproquement, soient: $y = U(x)$ une rotation autour de Θ donnée dans (L^2) et $\{\alpha_n(t)\}$ une suite quelconque, complète dans (L^2), orthogonale et normée. En posant $\beta_n(t) = U[\alpha_n(t)]$ où $n = 1, 2, \ldots$, on a donc

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt$$

et par conséquent $y(t) = U[x(t)]$ est de la forme (15). De plus,

$$(16)\qquad \int_0^1 \beta_n^2(t)\,dt = \int_0^1 U^2[\alpha_n(t)]\,dt = \int_0^1 \alpha_n^2(t)\,dt = 1$$

et comme $\beta_i(t) + \beta_j(t) = U[\alpha_i(t) + \alpha_j(t)]$, on a pour $i \neq j$

$$\int_0^1 [\beta_i(t) + \beta_j(t)]^2\,dt = \int_0^1 [\alpha_i(t) + \alpha_j(t)]^2\,dt = 2,$$

d'où en vertu de (16)

$$(17)\qquad \int_0^1 \beta_i(t)\,\beta_j(t)\,dt = 0 \quad pour\ i \neq j.$$

En conséquence, si pour une fonction $\beta(t) \subset (L^2)$ on a $\int_0^1 \beta_n(t)\,\beta(t)\,dt = 0$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, on aura d'après (15) $\int_0^1 y(t)\,\beta(t)\,dt = 0$ pour toute fonction $y(t) \subset (L^2)$, de sorte que $\beta(t) = 0$. Il en résulte en vertu de (16) et (17) que $\{\beta_n(t)\}$ est une suite complète dans (L^2) de fonctions orthogonales et normées.

Espace (l^2). On peut énoncer pour (l^2) un théorème tout à fait analogue. C'est une conséquence de l'isométrie des espaces (L^2) et (l^2) (v. th. 1, p. 165).

Espaces $(L^{(p)})$ *et* $(l^{(p)})$ *où* $1 \leqslant p \neq 2$. On a les lemmes suivants:

1. *Etant donnée une rotation* $y = U(x)$ *de* $(L^{(p)})$, *où* $1 \leqslant p \neq 2$, *autour de* Θ, *si on a pour un couple* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *de fonctions appartenant à* $L\,(^{(p)})$

$$(18)\qquad x_1(t) \cdot x_2(t) = 0 \quad presque\ partout\ dans\ [0,1],$$

alors pour le couple $y_1(t)$, $y_2(t)$, *où* $y_1 = U(x_1)$ *et* $y_2 = U(x_2)$, *on a également*

$$(19)\qquad y_1(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad presque\ partout\ dans\ [0,1].$$

Démonstration. Pour tout couple de nombres α, β on a par hypothèse, d'après (18), $\|\alpha x_1 + \beta x_2\|^p = |\alpha|^p \cdot \|x_1\|^p + |\beta|^p \cdot \|x_2\|^p$, d'où par définition de y_1 et y_2 il vient $\|\alpha y_1+\beta y_2\|^p=|\alpha|^p\cdot\|y_1\|^p+$ $+|\beta|^p\cdot\|y_2\|^p$ et par conséquent

$$(20)\qquad \int_0^1 |\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p\,dt=|\alpha|^p\int_0^1 |y_1(t)|^p\,dt+|\beta|^p\int_0^1 |y_2(t)|^p\,dt.$$

Dans le cas où $p=1$, on en tire, en posant successivement $\alpha=\beta=1$ et $\alpha=-\beta=1$, la relation $\int_0^1 |y_1(t)+y_2(t)|\,dt=\int_0^1 |y_1(t)-y_2(t)|\,dt=$ $=\int_0^1 [|y_1(t)|+|y_2(t)|]\,dt$, qui n'est possible que lorsque la condition (19) est réalisée.

Dans le cas où $p>2$, on obtient de la relation (20), en désignant par H l'ensemble des valeurs de $t\subset[0,1]$ pour lesquelles $y_1(t)\cdot y_2(t)\neq 0$, la relation

$$(21)\qquad \int_H |\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p\,dt=|\alpha|^p\int_H |y_1(t)|^p+|\beta|^p\int_H |y_2(t)|^p\,dt,$$

qui donne, en y posant $\varphi(\alpha,t)=|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^p$, les égalités

$$(22)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=p\,|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-1}\cdot\operatorname{sign}[\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)]\cdot y_1(t)$$

et

$$(23)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=p\,(p-1)\,|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-2}\cdot y_1^2(t).$$

Or, comme $|\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)|^{p-1}\subset(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $y_1(t)\subset(L^{(p)})$, on constate aisément l'existence de l'intégrale $\int_0^\alpha\int_H \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right| d\alpha\,dt$, d'où selon (22)

$$(24)\qquad \int_H \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{d}{d\alpha}\int_H \varphi(\alpha,t)\,dt=p\cdot\operatorname{sign}\alpha\cdot|\alpha|^{p-1}\int_H |y_1(t)|^p\,dt$$

et par conséquent $\int_H \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} dt=0$; il en résulte aussitôt (puisqu'on a selon (23) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \geqslant 0$) que $\int\limits_0^\alpha \int\limits_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\alpha\, dt = \int\limits_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dt$, d'où selon (24) $\int\limits_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} dt = p\,(p-1)\,|\alpha|^{p-2} \int\limits_H |y_1(t)|^p\, dt$ et par conséquent selon (23)

$$(25) \qquad \int\limits_H |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-2} \cdot y_1^2(t)\, dt = |\alpha|^{p-2} \int\limits_H |y_1(t)|^p\, dt.$$

On tire de (25), en posant $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ l'égalité

$$(26) \qquad \int\limits_H |y_2(t)|^{p-2} \cdot |y_1(t)|^2\, dt = 0,$$

ce qui entraîne par définition de H que $mH = 0$ [1]).

Enfin, dans le cas où $1 < p < 2$, considérons pour $i = 1$ et 2 la fonctionnelle $Y_i(y) = \int\limits_0^1 Y_i(t)\, y(t)\, dt$ où $y(t) \subset (L^{(p)})$ et $Y_i(t) = |y_i(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} y_i(t)$. L'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ est une rotation de l'espace $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ autour de Θ [2]). Posons $X_i = \overline{U}(Y_i)$ et $X_i(x) = \int\limits_0^1 X_i(t)\, x(t)\, dt$ où $x \subset (L^{(p)})$. On a $X_i(x_i) = Y_i(y_i) = |Y_i| \cdot |y_i| = |X_i| \cdot |x_i|$, d'où en vertu de l'inégalité de R i e s z $X_i(t) = 0$ pour les mêmes valeurs de t que $x_i(t) = 0$. Par conséquent $X_1(t) \cdot X_2(t) = 0$ et comme $\frac{p}{p-1} > 2$, on conclut en vertu du cas précédent que $Y_1(t) \cdot Y_2(t) = 0$, donc que $y_1(t) \cdot y_2(s) = 0$. La condition (19) se trouve ainsi démontrée.

2. *Etant donnée une rotation $y = U(x)$ de $(l^{(p)})$ où $1 \leqslant p \neq 1$ autour de Θ, si on a pour deux suites $x_1 = \{\xi_n^{(1)}\}$ et $x_2 = \{\xi_n^{(2)}\}$ appartenant à $(l^{(p)})$*

$$\xi_n^{(1)} \cdot \xi_n^{(2)} = 0 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

---

[1]) mH désigne la mesure de l'ensemble H (cf. Introduction, p. 3).

[2]) Pour la démonstration de ce fait, voir plus loin celle du th. 11, p. 188.

alors pour les suites $y_1 = U(x_1) = \{\eta_n^{(1)}\}$ *et* $y_2 = U(x_2) = \{\eta_n^{(2)}\}$ *on a également*

$$\eta_n^{(1)} \cdot \eta_n^{(2)} = 0 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots$$

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent pour les espaces $(L^{(p)})$, les modifications à apporter étant évidentes.

Les deux lemmes donnent respectivement les théorèmes suivants sur la forme générale des rotations.

I. *Etant donnée une rotation* $y = U(x)$ *de l'espace* $(L^{(p)})$, *où* $1 \leqslant p \neq 2$, *autour de* Θ, *il existe deux fonctions* $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *définies pour* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *et telles que les conditions suivantes soient remplies:*

(a) la fonction $\varphi(t)$ *transforme biunivoquement l'intervalle fermé* [0,1] *presque entier en même intervalle presque entier de façon que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles mesurables et réciproquement,*

(b) on a pour presque tout $t \subset [0,1]$

$$\psi(t) = \left[\lim_{h \to +0} \frac{m\, I[t, t+h]}{h}\right]^{\frac{1}{p}}$$

où $I[t, t+h]$ *désigne l'image de l'intervalle fermé* $[t, t+h]$ *donnée par la fonction* φ *(c. à d. l'ensemble des points* $\varphi(s)$ *pour* $t \leqslant s \leqslant t+h$,

(c) on a pour tout $x \subset (L^{(p)})$

$$y(t) = x[\varphi(t)] \cdot \psi(t)$$

où $y(t) = U[x(t)]$.

Réciproquement, si $\varphi(t)$ *est une fonction satisfaisant à la condition (a), il existe une fonction* $\psi(t)$ *définie par (b) et l'opération* $y = U(x)$ *définie par (c) est une rotation de* $(L^{(p)})$ *autour de* Θ [1]).

II. *Etant donnée une rotation quelconque* $y = U(x)$ *de l'espace* $(l^{(p)})$ *où* $1 \leqslant p \neq 2$ *autour de* Θ, *il existe une fonction* $\varphi(n)$ *et une suite de nombres* $\{\varepsilon_n\}$ *telles que*

---

[1]) Pour la démonstration de ce théorème voir S. Banach, *Sur les rotations dans les champs des fonctions intégrables avec p-ième puissance*, Studia Mathematica IV (à paraître).

(a) *la fonction $\varphi(n)$ transforme l'ensemble des nombres naturels tout entier en lui-même d'une manière biunivoque,*

(b) *on a $|\varepsilon_n| = 1$ pour $n = 1, 2, \dots$,*

(c) *on a pour tout couple de suites $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$ et $y = \{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$ où $y = U(x)$*

$$\eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)} \quad \textit{pour } n = 1, 2, \dots$$

Réciproquement, pour $\varphi(n)$ et $\{\varepsilon_n\}$ quelconques satisfaisant aux conditions (a) et (b), l'opération $y = U(x)$ définie par la condition (c) est une rotation.

Démonstration. Soit d'abord $y = U(x)$ une rotation de $(l^{(p)})$ autour de Θ. Posons

$$\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \textit{pour } i = n \\ 0 & \textit{pour } i \neq n \end{cases} \tag{27}$$

et $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$ pour $i = 1, 2, \dots$ On a évidemment pour tout $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i. \tag{28}$$

En posant $y_i = U(x_i) = \{\eta_n^{(i)}\}$, on a donc en vertu de (28) pour $y = U(x) = \{\eta_n\}$ l'égalité $y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$, d'où

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^{(i)} \quad \textit{pour } n = 1, 2, \dots \tag{29}$$

Selon (27) on a $\xi_n^{(i)} \cdot \xi_n^{(j)} = 0$, lorsque $i \neq j$; on en conclut en vertu du lemme, p. 177, 2, que

$$\eta_n^{(i)} \cdot \eta_n^{(j)} = 0 \quad \textit{pour } i \neq j \quad \textit{et} \quad n = 1, 2, \dots \tag{30}$$

Comme y peut être une suite quelconque appartenant à $(l^{(p)})$, il n'existe en vertu de (29) et (30) pour tout n naturel qu'un seul nombre $\varphi(n)$ tel que $\eta_n^{\varphi(n)} \neq 0$. Il en résulte d'après (29) que l'on a

$$(31) \qquad \eta_n = \xi_{\varphi(n)} \cdot \varepsilon_n \quad pour \quad \varepsilon_n = \eta_n^{\varphi(n)} \quad et \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ce qui réalise la condition (c).

D'autre part, $n_1 \neq n_2$ entraîne $\varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$, car dans le cas contraire on aurait selon (31) pour toute suite $\{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$ l'égalité $\varepsilon_{n_2} \eta_{n_1} - \varepsilon_{n_1} \eta_{n_2} = 0$ qui est impossible; et s'il existait un n_0 naturel tel qu'on ait $\varphi(n) \neq n_0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on aurait selon (31) pour la suite $x = \{\xi_n\}$ où

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & pour \quad n = n_0 \\ 0 & pour \quad n \neq n_0 \end{cases}$$

l'égalité $\eta_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est aussi impossible. Ainsi la condition (a) se trouve également démontrée.

Enfin, on a par définition de la rotation: $|y| = |x|$, ce qui donne en vertu de (31)

$$(32) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{\varphi(n)}|^p \cdot |\varepsilon_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \quad pour\ tout \quad x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)}).$$

En conséquence, si on choisit, pour tout n_0 naturel arbitrairement donné, la suite $x = \{\xi_n\}$ de façon à avoir

$$\xi_{\varphi(n)} = \begin{cases} 1 & pour \quad n = n_0 \\ 0 & pour \quad n \neq n_0, \end{cases}$$

on obtient de (32) $|\varepsilon_{n_0}|^p = 1$, d'où $|\varepsilon_{n_0}| = 1$, ce qui prouve la condition (b).

La réciproque est évidente.

§ 6. *Isomorphie et équivalence.*

Deux espaces E et E_1 du type (F) s'appellent *isomorphes,* lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire qui transforme E en E_1 tout entier.

Soit $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, cette opération; en vertu du th. 5 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est également linéaire, de sorte que l'opération $y = U(x)$ transforme E en E_1 d'une manière bicontinue.

Les espaces E et E_1 sont dits *équivalents,* lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire $y = U(x)$ qui transforme E en E_1 de façon que $|y| = |x|$ pour tout $x \subset E$.

L'équivalence de deux espaces en entraîne par conséquent l'isomorphie, mais, comme nous le verrons, la réciproque n'est pas vraie.

Considérons deux exemples.

1⁰. Soit (c_0) l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0. On a le théorème:

Les espaces (c) et (c_0) sont isomorphes.

En effet, en posant pour $x = \{\xi_i\} \subset (c)$

$$\eta_1 = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad et \quad \eta_i = \xi_{i-1} - \eta_1 \quad pour \quad i > 1,$$

on a évidemment $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$, d'où, en posant $y = \{\eta_i\}$, on a $y \subset (c_0)$ et il est facile de voir que l'opération $y = U(x)$ ainsi définie est additive et remplit la condition $|U(x)| \leqslant 2|x|$; elle est donc linéaire.

Réciproquement, si $y = \{\eta_i\} \subset (c_0)$, on n'a qu'à poser pour $x = \{\xi_i\}$

$$\xi_i = \eta_{i+1} + \eta_1 \quad où \quad i = 1, 2, \ldots,$$

pour obtenir $x \subset (c)$, puisque $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = \eta_1$, et pour voir que $y = 0$ entraîne $x = 0$.

L'opération $y = U(x)$ est donc linéaire et détermine une transformation biunivoque de (c) en (c_0).

2⁰. *Les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans*

$$(L^{(p)}),\ (l^{(p)}) \quad où \quad p > 1,\ (L),\ (l) \quad et \quad (c)$$

sont équivalents respectivement aux espaces

$$(L^{(q)}),\ (l^{(q)}) \quad où \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ (M),\ (m) \quad et \quad (l).$$

Ce n'est qu'une autre façon de formuler les théorèmes sur la forme générale des fonctionnelles linéaires établis au Chap. IV, § 4 (voir p. 61—68).

Le th. 2, p. 166, implique immédiatement le

Théorème 4. *Les espaces E et E_1 du type (B) qui sont isométriques sont équivalents.*

§ 7. *Produits des espaces du type (B).*

Etant donnés deux espaces E et E_1 du type (B), désignons par $E \times E_1$ l'espace que constitue l'ensemble de tous les couples ordonnés x, y où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres, en posant

$$x,y + x',y' = x + x',\ y + y' \quad et \quad h\ x,y = hx,\ hy$$

(bien entendu, où $x' \subset E$, $y' \subset E_1$ et h étant un nombre) et en y définissant la norme de façon que la condition suivante soit remplie:

$$(33) \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \ \textit{équivaut à} \lim_{n\to\infty} \| x_n, y_n - x_0, y_0 \| = 0.$$

Ainsi défini, l'espace $E \times E_1$ est également du type (B). Nous l'appellerons *produit* des espaces E et E_1.

Il est aisé de voir que la condition (33) se trouvera remplie, si on admet en particulier comme norme du couple $z = x, y$ l'une ou l'autre des expressions

1) $\|z\| = [\|x\|^p + \|y\|]^{\frac{1}{p}}$ *où* $p \geqslant 1$,

2) $\|z\| = \max[\|x\|, \|y\|]$

et qu'elles ne sont pas les seules convenables pour remplir cette condition. Or, on aperçoit aussitôt qu'en choisissant des normes quelconques, pourvu qu'elles soient conformes à la conditions (33), on obtiendra toujours des espaces isomorphes.

Pour mettre en évidence quelle norme a été adoptée, convenons de désigner le produit des espaces E et E_1 dans le cas de la norme 1) par $(E \times E_1)_{l^p}$ et dans celui de la norme 2) par $(E \times E_1)_m$.

On définit de la même façon le produit d'un nombre fini d'espaces $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ du type (B). Il est évident que *le produit des espaces séparables est un espace séparable.*

Le produit $E \times E$ portera le nom du *carré de* E et sera désigné par E^2.

Théorème 5. *Les espaces* $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ *où* $p \geqslant 1$ *et* (c) *sont isomorphes respectivement avec leur carré.*

Démonstration, Il suffit de faire correspondre à toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$ le couple des fonctions $x_1(t), x_2(t)$ définies par les formules

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \quad et \quad x_2(t) = x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) \quad où \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

pour avoir une transformation biunivoque et linéaire de $(L^{(p)})$ en $(L^{(p)})^2$.

De même, il suffit de faire correspondre à toute suite $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$ le couple de suites $x_1 = \{\eta_n\}$, $x_2 = \{\zeta_n\}$ définies par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n} \quad et \quad \zeta_n = \xi_{2n-1} \quad où \quad n = 1, 2, \ldots,$$

pour que l'espace $(l^{(p)})$ se trouve transformé en $(l^{(p)})^2$ d'une manière biunivoque et linéaire.

Enfin, faisons correspondre à toute suite $x = \{\xi_n\} \subset (c)$ le couple $x_1 = \{\eta_n\}$, $x_2 = \{\zeta_n\}$ défini par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n} - \xi_1 \quad et \quad \zeta_n = \xi_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} \xi_n + \xi_1 \quad où \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il vient

$$\xi_1 = \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \ \xi_{2n} = \eta_n + \lim_{n\to\infty} \zeta_n \quad et \quad \xi_{2n+1} = \zeta_n + \lim_{n\to\infty} \eta_n \quad où \quad n = 1, 2, \ldots$$

et on voit que c'est une transformation biunivoque et linéaire de (c) en $(c)^2$.

Théorème 6. *L'espace (C) est isomorphe avec le produit $(C) \times (c)$* [1].

Démonstration. Désignons par E le sous-espace de (C) formé de fonctions $x(t) \subset (C)$ qui satisfont à la condition

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

Construisons pour toute fonction $x(t) \subset (C)$ une fonction $\bar{x}(t) \subset (C)$ telle que $\bar{x}\left(\frac{1}{n}\right) = x\left(\frac{1}{n}\right)$ et qui soit linéaire dans les intervalles $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ pour tout n naturel.

Faisons correspondre à tout $x(t) \subset (C)$ le couple (formé d'une fonction et d'une suite de nombres)

---

[1]) Ce théorème a été établi par M. K. Borsuk.

$$y(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \quad \text{où} \quad y(t) = x(t) - \bar{x}(t).$$

On a évidemment $y(t) \subset E$ et $\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \subset (c)$.

Il est facile de voir que la transformation établie par cette correspondance est linéaire.

On aperçoit également que pour tout couple $y(t), \{\xi_n\} \subset E \times (c)$ il existe une fonction continue $x(t)$ telle que $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ et $\xi_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n = 1, 2, \ldots$, de sorte que la transformation considérée est biunivoque et épuise les espaces (C) et $E \times (c)$ entièrement. Ces deux espaces sont donc isomorphes.

Il en résulte l'isomorphie des espaces $(C) \times (c)$ et $E \times (c) \times (c) = E \times (c)^2$. Or, $(c)^2$ étant (selon le th. 5 qui précède) isomorphe avec (c), l'espace $(C) \times (c)$ est isomorphe avec $E \times (c)$, donc avec (C), c. q. f. d.

Théorème 7. *L'espace (C) est isomorphe avec chacun des espaces $(C^{(p)})$ où $p = 1, 2, \ldots$* [1]*.*

Démonstration. Faisons correspondre à toute fonction $x(t) \subset (C^{(p)})$ (cf. Introduction, § 7, p. 11, 7) le couple formé de la fonction $y(t) = x^{(p)}(t)$ et du système de p nombres: $x(0), x'(0), \ldots, x^{(p-1)}(0)$. En désignant par R_p l'espace à p dimensions, $(C^{(p)})$ est donc isomorphe avec $(C) \times R_p$ et par conséquent, en vertu du th. 6 qui précède, avec $(C) \times (c) \times R_p$.

Or, comme $(c) \times R_p$ est isomorphe avec (c), l'espace $(C^{(p)})$ est isomorphe avec $(C) \times (c)$, donc (encore d'après le th. 6) avec l'espace (C), c. q. f. d.

Théorème 8. *L'espace (C) est isomorphe avec l'espace $(C)^2$* [2]*.*

Démonstration. Faisons correspondre à tout couple $x(t), y(t)$ de fonctions de (C) le couple $z(t), \xi$ où $z(t) \subset (C)$ est la fonction définie par les formules

---

[1]) Ce théorème a été démontré par M. K. Borsuk.

[2]) Ce théorème est dû aussi à M. K. Borsuk.

$$z(t)=\begin{cases} x(2t) & pour \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ y(2t-1)-y(0)+x(1) & pour \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

et ξ est le nombre déterminé pour tout $y(t) \subset (C)$ par l'équation $\xi = y(0)$.

Ainsi l'espace $(C)^2$ se trouve transformé en $(C) \times R_1$, où R_1 désigne l'espace de tous les nombres réels. Cette transformation est linéaire et comme on a par définition $x(t) = z\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y(t) = z\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi$, elle est biunivoque. On a ainsi l'isomorphie des espaces $(C)^2$ et $(C) \times R_1$ et comme en vertu du th. 6, p. 183, (C) est isomorphe avec $(C) \times (c)$, l'espace $(C)^2$ est isomorphe avec $(C) \times (c) \times R_1$, donc, par suite de l'isomorphie entre $(c) \times R_1$ et (c), avec l'espace $(C) \times (c)$ et par conséquent (encore en vertu du th. 6) avec l'espace (C), c. q. f. d.

Remarque. On ignore si l'espace (C) est isomorphe avec celui de toutes les fonctions continues définies dans le carré.

§ 8. *Espace (C) comme l'espace universel* [1]).

Théorème 9. *Tout espace E du type (B) séparable est équivalent à un sous-espace linéaire fermé de l'espace (C).*

Démonstration. Soient Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires à la norme $\leqslant 1$ définies dans E et $\{x_n\}$ la suite d'éléments de E à la norme $\leqslant 1$, dense dans la sphère $|x| \leqslant 1$.

Comme distance, posons pour tout couple f_1, f_2 de fonctionnelles appartenant à Γ

$$(34) \qquad (f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{1 + |f_1(x_n) - f_2(x_n|} \cdot$$

Nous allons montrer que, avec cette définition de la distance, Γ est complet et compact.

---

[1]) Les théorèmes de ce § ont été trouvés en commun par M. S. Mazur et moi.

Considérons une suite $\{f_i\}$ où $f_i \subset \Gamma$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et soit $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} (f_p, f_q) = 0$. En vertu de (34), il existe donc la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n)$. Comme $|f_i| \leqslant 1$, la suite $\{f_i(x)\}$ est un vertu du th. 3 (Chap. V, § 1), p. 79, convergente pour tout $x \subset E$; par conséquent la suite des fonctionnelles $\{f_i\}$ est faiblement convergente vers une fonctionnelle f et on a $|f| \leqslant 1$, d'où $f \subset \Gamma$. Comme $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_n) = f(x_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on conclut de (34) que $\lim\limits_{i\to\infty} (f_i, f) = 0$. Ainsi Γ est complet.

D'autre part, on peut extraire de la suite $\{f_i\}$ par le procédé de la diagonale une suite partielle $\{f_{i_k}\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{i_k}(x_n)$ existe pour $n = 1, 2, \ldots$, d'où, comme auparavant, l'existence d'une fonctionnelle $f \subset \Gamma$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} (f_{i_k}, f) = 0$. Ainsi Γ est compact.

Il existe par conséquent [1]) une transformation continue de l'ensemble parfait et non dense de Cantor $P \subset [0,1]$ en ensemble Γ. En désignant par $f_t \subset \Gamma$ la fonctionnelle qui vient correspondre au point $t \subset P$, considérons un élément quelconque $x \subset E$ et définissons $y(t)$ comme il suit: posons pour tout $t \subset P$

$$y(t) = f_t(x)$$

et pour les points de l'ensemble $[0, 1] - P$ complétons la fonction $y(t)$ d'une façon linéaire, en posant notamment pour tout $t \subset [0,1] - P$

$$y(t) = \frac{y(t') - y(t'')}{t' - t''} \cdot (t - t'') + y(t''),$$

où t' et t'' désignent les points les plus proches de P tels que $t' < t < t''$.

Examinons les propriétés de la fonction $y(t)$ ainsi définie. Si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$ où $t_n \subset P$, la suite $\{f_{t_n}\}$ converge faiblement vers f_{t_0}, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n}(x) = f_{t_0}(x)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} y(t_n) = y(t_0)$. La fonction y est par conséquent continue dans P. Comme linéaire ailleurs, elle est donc continue dans $[0,1]$ tout entier; ainsi $y(t) \subset (C)$.

---

[1]) v. p. ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin 1927), p. 197.

D'autre part, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle $f \subset \Gamma$ telle que $|f(x)| = \|x\|$. Soit $t_0 \subset [0,1]$ le point tel que $f = f_{t_0}$. On a donc $|y(t_0)| = |f_{t_0}(x)| = \|x\|$ et comme

$$|y(t)| = |f_t(x)| \leqslant |f_t| \cdot |x| \leqslant |x| \quad pour\ tout \quad t \subset P,$$

on en conclut en raison du fait que la fonction $|y(t)|$ atteint son maximum dans l'ensemble P, que $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y(t)| = \|x\|$.

Ainsi, nous avons fait correspondre à tout élement $x \subset E$ un élément $y = y(t) \subset (C)$ et on voit, en posant $y = U(x)$, que cette opération est additive. Comme $\|y\| = \|x\|$, elle est linéaire et transforme l'espace E en un sous-espace E_1 de (C) d'une façon isométrique. Les espaces E et $E_1 \subset (C)$ sont donc équivalents, c. q. f. d.

Théorème 10. *Tout espace métrique séparable E peut être transformé d'une manière isométrique en un sous-espace de (C).*

Démonstration. Selon une remarque de M. Fréchet[1]) tout espace métrique séparable E se laisse transformer isométriquement en un sous-espace de (m). Une telle transformation s'obtient, comme on le vérifie sans peine, en faisant correspondre à tout $x \subset E$ la suite $\{\xi_n\}$ définie par la formule

$$\xi_n = (x, x_n) - (x_0, x_n) \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots$$

où la suite $\{x_n\}$ forme un ensemble dense dans E.

En conséquence, nous pouvons nous borner au cas où $E \subset (m)$. On montre facilement que l'espace formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de E et de leurs limites est un espace du type (B) séparable. En vertu du th. 9 qui précède il existe donc une transformation isométrique de cet espace, et à plus forte raison de son sous-espace E, en un sous-espace de (C), c. q. f. d.

Remarque. En vertu des th. 9 et 10 qui viennent d'être établis l'espace (C) peut être considéré comme l'espace *universel* pour les

---

[1]) cf. M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, Math. Annalen 68 (1910), p. 161.

espaces séparables du type (B), resp. métriques. L'étude des espaces du type (B) se réduit donc à celle des sous-ensembles linéaires fermés de l'espace (C).

§ 9. *Espaces conjugués.*

Etant donné un espace E du type (B), l'espace $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E est évidemment aussi du type (B). Nous appellerons $\overline{E}$ l'espace *conjugué* avec E.

Théorème 11. *Si deux espaces E et E_1 du type (B) sont isomorphes, resp. équivalents, les espaces $\overline{E}$ et $\overline{E}_1$ sont également isomorphes, resp. équivalents.*

Démonstration. En effet, si une opération linéaire $y = U(x)$ transforme E en E_1 d'une manière biunivoque et bicontinue, l'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ transforme en vertu du th. 5 (Chap. X, § 1), p. 149, l'espace $\overline{E}_1$ en espace $\overline{E}$ tout entier également d'une manière biunivoque et linéaire, d'où l'isomorphie de ces derniers espaces.

Si, en outre, E et E_1 sont équivalents, on a pour les fonctionnelles linéaires correspondantes X et Y:

$$|X| = \underset{|x|\leqslant 1}{\text{borne sup}}\, X(x) = \underset{|x|\leqslant 1}{\text{borne sup}}\, Y[U(x)] = \underset{|y|\leqslant 1}{\text{borne sup}}\, Y(y) = |Y|,$$

de sorte que les espaces $\overline{E}$ et $\overline{E}_1$ sont dans ce cas équivalents, c. q. f. d.

Remarque. Cependant, l'équivalence des espaces $\overline{E}$ et $\overline{E}_1$ n'entraîne pas toujours celle des espaces E et E_1.

Considérons, à titre d'exemple, les espaces $E = (c)$ et $E_1 = (c)^2_m$ [1]. Comme espaces conjugués avec eux on obtient $\overline{E} = (l)$ et $\overline{E}_1 = (l)^2_l$ [1] et on établit facilement leur équivalence. Mais il n'en est pas ainsi des espaces E et E_1. Nous pouvons regarder E comme l'espace des fonctions continues définies dans l'ensemble Q composé de nombres 0 et $\frac{1}{n}$ où $n = 1, 2, \ldots$ et l'espace E_1 peut être

[1]) Pour la signification des indices dans ces symboles voir p. 182.

considéré comme celui des fonctions continues définies dans l'ensemble Q_1 formé de nombres $0, 1, \frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n}$ où $n = 1, 2, \ldots$ Or, les ensembles Q et Q_1 en question n'étant pas homéomorphes, on en conclut en vertu du th. 3, p. 170, que les espaces E et E_1 ne sont pas isométriques, donc à plus forte raison équivalents.

Théorème 12. *Si l'espace conjugué $\bar{E}$ est séparable, l'espace E l'est également.*

Démonstration. $\Gamma \subset \bar{E}$ désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans E à la norme 1, il existe par l'hypothèse une suite $\{X_n\}$, où $X_n \subset \Gamma$, dense dans Γ.

Soit $\{x_n\}$ la suite d'éléments de E qui remplissent les conditions

$$(35) \qquad |x_n| = 1 \quad et \quad X_n(x_n) > \frac{1}{2} \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

En supposant que l'espace E ne soit pas séparable, on peut affirmer que la suite $\{x_n\}$ n'est pas fondamentale dans E, donc, en vertu du th. 7 (Chap. IV, § 3), p. 58, elle n'y est pas totale. Il existe par conséquent une fonctionnelle linéaire $X \subset \Gamma$ telle que

$$(36) \qquad |X| = 1 \quad et \quad X(x_n) = 0 \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

En posant $Z_n = X_n - X$, on a par conséquent selon (35) et (36) $Z_n(x_n) = X_n(x_n) - X(x_n) > \frac{1}{2}$, d'où $|Z_n| > \frac{1}{2}$, donc $|X_n - X| > \frac{1}{2}$ pour tout n naturel, ce qui est impossible, la suite $\{X_n\}$ étant supposée dense dans Γ et X appartenant à Γ.

Théorème 13. *Etant donné un espace E du type (B) séparable et tel que toute suite $\{x_i\}$ d'éléments de E à normes bornées dans leur ensemble contient une suite partielle faiblement convergente vers un élément de E, l'espace E est équivalent à l'espace $\bar{\bar{E}}$ (conjugué de $\bar{E}$).*

Démonstration. Soit G l'ensemble des fonctionnelles linéaires $F(X)$ définies dans $\bar{E}$ et telles que $F(X) = X(x_0)$ pour tout $X \subset \bar{E}$ et pour un $x_0 \subset E$ qui ne dépend que de F. On a donc $|F(X)| \leqslant |X| \cdot |x_0|$, d'où l'inégalité $|F| \leqslant |x_0|$. En vertu du th. 3

(Chap. IV, § 2), p. 55, il existe d'autre part une fonctionnelle $X_0 \subset \bar{E}$ telle que $|X_0| = 1$ et $X_0(x_0) = |x_0|$, donc $F(X_0) = |x_0|$, d'où l'inégalité $|F| \geqslant |x_0|$. Les deux inégalités donnent $|F| = |x_0|$.

G est un ensemble *total* (dans l'espace $\bar{E}$ des fonctionnelles linéaires définies dans $\bar{E}$).

En effet, si pour un $X_0 \subset \bar{E}$ on a $F(X_0) = 0$, quel que soit $F \subset G$, on a aussi $X_0(x) = 0$, quel que soit $x \subset E$, donc $X_0 = 0$.

Nous allons montrer que l'ensemble G est *transfiniment fermé.*

Soient à ce but ϑ un nombre-limite quelconque et $\{F_\xi\}$ où $F_\xi \subset G$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$ une suite transfinie de fonctionnelles à normes bornées dans leur ensemble. Il existe donc un nombre $M > 0$ tel qu'on a $|F_\xi| < M$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$ et par définition de G toute fonctionnelle F_ξ est de la forme $F_\xi(X) = X(x_\xi)$. L'espace E étant par hypothèse séparable, soit $\{x_i\}$ la suite dense dans E.

Pour tout n naturel désignons par $x_\xi^{(n)}$ un terme arbitrairement extrait de $\{x_i\}$ qui satisfait à l'inégalité

$$(37) \qquad |x_\xi^{(n)} - x_\xi| < \frac{1}{n}$$

et posons

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}) \quad pour \quad X \subset \bar{E}.$$

Dans le cas où ϑ est confinal avec ω (donc où il existe une suite $\{\xi_i\}$ à i naturels de nombres transfinis tels que $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = \vartheta$ et $\xi_i < \vartheta$ pour $i = 1, 2, \ldots$), la suite $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$ renferme une suite partielle faiblement convergente vers un élément $x^{(n)} \subset E$. Evidemment on a alors

$$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{i\to\infty}} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

et par conséquent la fonctionnelle $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ est une limite transfinie de la suite $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Dans le cas où le nombre-limite ϑ n'est pas confinal avec ω, la suite transfinie $\{x_\xi^{(n)}\}$, qui ne contient par définition qu'une infinité au plus dénombrable de termes différents, renferme un terme $x^{(n)}$ tel que pour tout $\eta < \vartheta$ il existe un $\xi > \eta$ donnant lieu à l'égalité $x_\xi^{(n)} = x^{(n)}$. On a alors

$$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

de sorte que la fonctionnelle $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ est encore une limite transfinie de la suite $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Ceci établi, considérons la suite $\{x^{(n)}\}$. On peut en extraire une suite faiblement convergente vers un $\bar{x} \subset E$. Posons $X(\bar{x}) = F_0(X)$. On a donc d'une part

$$(38) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X) \quad \textit{pour tout } X \subset \bar{E}$$

et d'autre part, par définition de G, $F_0 \subset G$. Or, on a selon (37) $X(x_\xi) \geqslant X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}|X|$, d'où, par définition de F_ξ et $F_\xi^{(n)}$, $\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi) \geqslant \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}|X| = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n}|X| \geqslant$ $\geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n}|X|$ et par conséquent, selon (38), $\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) \geqslant$ $\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X)$. La fonctionnelle F_0 est donc une limite transfinie de la suite $\{F_\xi\}$ et puisque $F_0 \subset G$, l'ensemble G est en effet transfiniment fermé.

Comme total et transfiniment fermé, l'ensemble G coïncide en vertu de la remarque (Chap. VIII, § 2), p. 117, et du lemme 3 (Chap. VIII, § 3), p. 121, avec l'espace $\bar{\bar{E}}$.

Par définition de G, à tout $F \subset \bar{\bar{E}}$ vient donc correspondre un $x \subset E$ tel que, comme il a été prouvé au début, $|F| = |x|$. L'opération $U(x) = F$ est par conséquent biunivoque, linéaire et transforme E en $\bar{\bar{E}}$ sans altérer la norme. Les espaces E et $\bar{\bar{E}}$ sont donc équivalents, c. q. f. d.

Remarque. Ainsi p. ex. les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$ sont équivalents aux espaces conjugués avec ceux des fonctionnelles linéaires définies dans eux (cf. p. 181, 2°).

Théorème 14. *L'espace conjugué avec le produit des espaces du type (B) est isomorphe au produit des espaces conjugués avec eux.*

Démonstration. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant des espaces du type (B), il s'agit d'établir l'isomorphie entre l'espace $\overline{E}$ où $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et l'espace $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n$. On peut se borner au cas où $n = 2$.

Désignons respectivement par x_1, x_2 et z les éléments de E_1, E_2 et E et par X_1, X_2 et Z les fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces.

Soit H l'ensemble de tous les couples x_1, Θ où $x_1 \subset E_1$. Nous pouvons donc regarder H comme un sous-ensemble de $E = E_1 \times E_2$ et par conséquent toute fonctionnelle linéaire Z, considérée dans l'espace H, détermine une fonctionnelle linéaire X_1 définie dans E_1. Posons

$$Z(z) = X_1(x_1) \quad \textit{pour} \quad z = x_1, \Theta$$

et d'une façon analogue

$$Z(z) = X_2(x_2) \quad \textit{pour} \quad z = \Theta, x_2.$$

Pour $z = x_1, x_2$ on a donc, comme il est facile de vérifier,

$$Z(z) = X_1(x_1) + X_2(x_2). \tag{39}$$

Réciproquement, étant données deux fonctionnelles linéaires $X_1 \subset \overline{E}_1$ et $X_2 \subset \overline{E}_2$, la formule (39) détermine la fonctionnelle $Z \subset \overline{E}$.

La correspondance est biunivoque et établit une transformation linéaire de $\overline{E}_1 \times \overline{E}$ en $\overline{E}$ tout entier, donc l'isomorphie de ces deux espaces, q. f. d.

Remarque. En posant $E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_{l^p}$, resp. $E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_m$, on aperçoit aisément que l'espace conjugué $\overline{E}$ est *isométrique* pour $p > 1$ avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_{l^{\frac{p}{p-1}}}$ et pour $p = 1$ avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_m$, resp. avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_l$.