CHAPITRE IX.

Suites faiblement convergentes d'éléments.

§ 1. *Définition. Conditions pour la convergence faible des suites d'éléments.*

Une suite $\{x_n\}$ *d'éléments* de E s'appelle *faiblement convergente* vers l'élément $x \subset E$, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \overline{E},$$

c. à d. pour toute fonctionnelle linéaire f définie dans l'espace donné E.

Théorème 1. *Pour que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(1) *la suite $\{|x_n|\}$ bornée*

et

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ *pour tout* $\varphi \subset \Delta$ *où* Δ *est un ensemble dense dans* $\overline{E}$.

Démonstration. La nécessité de (1) résulte du th. 6 (Ch. V, § 1), p. 80, et celle de (2) est évidente.

Pour en démontrer la suffisance, considérons une fonctionnelle quelconque $f \subset \overline{E}$. En vertu de (2), il existe alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$ une fonctionnelle $\varphi \subset \Delta$ telle que $|\varphi - f| < \frac{\varepsilon}{2M}$, où M désigne la borne supérieure des nombres $|x_n|$ et $|x|$, qui existe d'après (1). Par conséquent $|f(x-x_n)| \leqslant |\varphi(x-x_n)| +$

$+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot|x-x_n| \leqslant |\varphi(x-x_n)|+\varepsilon$; comme $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x)$ et ε est arbitraire, on en conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$, c. à d. que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x.

Remarque. Il suffit d'ailleurs d'admettre de Δ que les combinaisons linéaires formées de fonctionnelles appartenant à l'ensemble Δ constituent un ensemble dense dans $\bar{E}$.

Théorème 2. *Si la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il existe une suite $\{g_n\}$ de combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$.*

La démonstration résulte du th. 6 (Chap. IV, § 3), p. 58, et de la définition de la convergence faible des suites d'éléments.

§ 2. *Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces (C), $(L^{(p)})$, (c) et $(l^{(p)})$.*

Envisageons à présent la convergence faible des suites d'éléments dans les espaces particuliers les plus importants.

Espace (C). Etant donnée la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (C) (voir p. 61), *pour qu'une suite de fonctions continues $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers la fonction continue $x(t)$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,dg(t)=\int_0^1 x(t)\,dg(t)$$

pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée.

Il en résulte que *pour la convergence faible d'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (C)$ vers la fonction $x(t) \subset (C)$, il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(4) *les fonctions $x_n(t)$ où $n=1,2,\ldots$ bornées dans leur ensemble,*

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ *pour tout $t \subset [0,1]$.*

En effet, la nécessité de (4) résulte du th. 1, p. 133, et celle de (5) est une conséquence du fait que, t_0 désignant un point arbitraire de [0,1], la fonctionnelle $f(x) = x(t_0)$ est linéaire, d'où $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ et par conséquent $\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$.

La suffisance consiste en ce que les conditions (4) et (5) entraînent l'égalité (3) pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée (cf. Introduction, § 5, p. 7).

Ceci établi, on obtient du th. 2, p. 134, le théorème suivant:

Si une suite de fonctions continues $\{x_n(t)\}$ *où* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *est bornée et converge partout vers une fonction continue* $x(t)$, *il existe une suite de polynômes formés de termes de la suite* $\{x_n(t)\}$ *et qui converge vers* $x(t)$ *uniformément.*

C'est une propriété remarquable de l'espace des fonctions continues et qui est en défaut p. ex. déjà pour les fonctions de la première classe de Baire.

Espaces $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. *La suite* $\{x_n(t)\}$ *où* $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ *converge faiblement vers* $x(t) \subset (L^{(p)})$, *lorsqu'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

pour toute fonction $\alpha(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Il en résulte en vertu de la remarque, p. 128, le théorème suivant:

Pour la convergence faible d'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ *où* $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ *vers la fonction* $x(t) \subset (L^{(p)})$, *il faut et il suffit d'avoir à la fois*

(6) *la suite* $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt\right\}$ *bornée*

et

(7) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^u x_n(t)\, dt = \int_0^u x(t)\, dt \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\,[1].$$

---

[1]) Ce théorème a été démontré par M. F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 465—466.

Espace (L). La suite $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$ où $x_n \subset (L)$, $x_0 \subset (L)$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt \tag{8}$$

pour toute fonction bornée $\alpha(t)$.

Il en résulte le théorème suivant:

Pour la convergence faible de la suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ appartenant à (L) vers la fonction $x(t) \subset (L)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:

(9) *la suite* $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right\}$ *est bornée,*

(10) *il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'on ait*

$$\left|\int_H x_n(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots$$

pour tout ensemble H de mesure $< \eta$ de valeurs de t [1],

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^u x_0(t)\,dt \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{11}$$

En effet, (8) équivaut à l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)]\,\alpha(t)\,dt = 0$ pour $\alpha(t) \subset (M)$; le théorème en question s'en déduit facilement à l'aide du théorème de Lebesgue énoncé p. 7 (voir Introduction, § 6).

Espace (c). Pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_i^n\} \subset (c)$ converge faiblement vers l'élément $x = \{\xi_i\} \subset (c)$, il faut et il suffit d'avoir à la fois:

(12) *la suite $\{|x_n|\}$ bornée,*

---

[1] Cette condition (10) implique d'ailleurs la condition (9).

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^n = \xi_i$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^n) = \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i$.

La démonstration est immédiate, étant donné que toute fonctionnelle linéaire dans (c) est de la forme $f(x) = C\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\}$ et $|f| = |C| + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |C_i|$ (voir p. 66) et en tenant compte du fait que, si l'on pose

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i & pour \quad i = 0 \\ \xi_i & pour \quad i \geqslant 1, \end{cases}$$

les combinaisons linéaires formées de termes de la suite $\{f_i(x)\}$ où $i = 0, 1, 2, \ldots$ constituent un ensemble dense dans celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c).

Espaces $(l^{(p)})$ *où* $p > 1$. *Pour qu'une suite* $\{x_n\}$ *où* $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$ *converge faiblement vers* $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$, *il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

(14) *la suite des nombres* $\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}$ *bornée*

et

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

La démonstration résulte de la remarque, p. 129.

Espace (l). *Pour qu'une suite* $\{x_n\}$ *où* $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l)$ *converge faiblement vers* $x = \{\xi_i\} \subset (l)$, *il faut et il suffit que l'on ait* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, c'est à dire, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0$.

En conséquence:

Dans l'espace (l) *la convergence faible est équivalente à la convergence suivant la norme.*

Démonstration. Admettons que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x. En posant $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$, la suite $\{y_n\}$ où $y_n = \{\eta_i^{(n)}\}$ converge donc faiblement vers Θ avec $n \to \infty$. On a par conséquent pour toute suite bornée de nombres $\{c_i\}$

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n)} = 0\,.$$

Soit

$$c_i = \begin{cases} 1 & pour \quad j = i \\ 0 & pour \quad j \neq i, \end{cases}$$

d'où

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty} \eta_j^{(n)} = 0 \quad pour\ tout \quad j = 1, 2, \ldots$$

Il s'agit de montrer que l'on a

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n)}\,| = \lim_{n\to\infty} |\,y_n\,| = 0\,.$$

Supposons par contre que

$$(19)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n)}\,| > \varepsilon > 0\,.$$

Définissons par induction deux suites croissantes de nombres naturels $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ comme il suit:

1⁰ n_1 est le plus petit n tel que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n)}\,| > \varepsilon$,

2⁰ r_1 est le plus petit r tel que $\sum\limits_{i=1}^{r} |\,\eta_i^{(n_1)}\,| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum\limits_{i=r+1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_1)}\,| < \frac{\varepsilon}{5}$,

3⁰ n_k est le plus petit nombre naturel dépassant n_{k-1} et tel que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_k)}\,| > \varepsilon$ et $\sum\limits_{i=1}^{r_{k-1}} |\,\eta_i^{(n_k)}\,| < \frac{\varepsilon}{5}$,

4⁰ r_k est le plus petit nombre naturel dépassant r_{k-1} et tel que $\sum\limits_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\,\eta_i^{(n_k)}\,| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum\limits_{i=r_k+1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_k)}\,| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Les suites $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ ainsi définies existent en vertu de (17) et (19). Or, soit maintenant

$$(20)\qquad c_i = \begin{cases} \operatorname{sign}\, \eta_i^{(n_1)} & pour \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1 \\ \operatorname{sign}\, \eta_i^{(n_{k+1})} & pour \quad r_k < i \leqslant r_{k+1}\,. \end{cases}$$

On a donc $|\,c_i\,| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, d'où selon (16)

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)} = 0 . \tag{21}$$

Mais, d'après (20), on a $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| -$ $- \sum_{=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}|$, d'où, en vertu de 3⁰ et 4⁰, $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, ce qui est incompatible avec (21). On a donc l'égalité (18), c. q. f. d.

§ 3. *Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ pour $p > 1$.*

Au sujet de la relation entre la convergence faible d'éléments et celle selon la norme on peut énoncer pour les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$ les théorèmes plus généraux suivants:

Si la suite $\{x_n(t)\}$, où $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ et $p > 1$, converge faiblement vers $x(t) \subset (L^{(p)})$ et si en outre

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt = \int_0^1 |x(t)|^p\,dt ,$$

alors la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers $x(t)$ selon la norme, c. à d. que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p\,dt = 0\ ^{1)}.$$

Nous allons démontrer le théorème analogue pour les espaces $(l^{(p)})$ où $p > 1$ (le cas $p = 1$ étant envisagé au § 2, qui précède).

---

[1]) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Radon (Sitzungsberichte der Akad. für Wissensch. in Wien, 122 (1913), Abt. II-a, p. 1295—1438). Cf. aussi F. Riesz, Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 4 (1929), p. 58—64 et 182—185.

Si la suite $\{x_n\}$, où $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$ et $p \geqslant 1$, converge faiblement vers $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$ et si l'on a

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0. \tag{22}$$

Démonstration. On a d'après (15), p. 137,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \tag{23}$$

et

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p}, \tag{24}$$

où N est un nombre naturel arbitraire. Or,

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p}$$

d'où par l'hypothèse et d'après (23) et (24)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \left[2\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p}\right]^p = 2^p \sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p = 0$ et N est arbitraire, on en tire l'égalité (22), q. f. d.

§ 4. *Espaces faiblement complets.*

Etant donné dans un espace E du type (B) une suite d'éléments $\{x_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E, il peut n'exister aucun élément $x_0 \subset E$ vers lequel la suite $\{x_n\}$ soit faiblement convergente, c. à d. tel que l'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ pour toutes les fonctionnelles linéaires $f \subset \overline{E}$ à la fois.

En voici un exemple dans l'espace (C). Soit $\{x_n(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ une suite de fonctions continues, bornées dans leur ensemble et convergeant partout vers une fonction $z(t)$ qui n'est pas continue. La limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x_n(t)\, dg$ existe alors pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée (cf. Introduction, § 5, p. 7), mais la suite $\{x_n(t)\}$ ne converge faiblement vers aucune fonction continue.

Cependant on a le théorème:

Dans les espaces $(L^{(p)})$ *et* $(l^{(p)})$ *où* $p \geqslant 1$ *l'existence de* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ *pour une suite* $\{x_n\}$*, quelle que soit la fonctionnelle linéaire* f*, entraîne la convergence faible de la suite* $\{x_n\}$ *vers un élément* x_0.

Démonstration pour (L). Si $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt$, où $x_n(t) \subset (L)$, existe pour toute fonction $\alpha(t) \subset (M)$, on a évidemment

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \int_0^1 [x_p(t) - x_q(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Nous allons montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ et un N naturel tels que l'on a

$$\int_H \left| x_N(t) - x_n(t) \right| dt < \varepsilon \tag{25}$$

pour tout $n \geqslant N$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$.

En effet, il existerait dans le cas contraire deux suites infiniment croissantes de nombres naturels $\{p_k\}$ et $\{n_k\}$ et une suite d'ensembles $\{H_k\}$ de mesure tendant vers 0 telles que $\int\limits_{H_k} |x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)|\, dt \geqslant \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^1 [x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0$ *pour tout* $\alpha(t) \subset (M)$, contrairement au th. de Lebesgue (voir Introduction, § 6, p. 7).

Ceci établi, on a donc en particulier, si η est suffisamment petit, $\int\limits_H |x_n(t)|\, dt < \frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ pour tout $n = 1, 2, \dots$, d'où selon (25),

$$(26) \qquad \int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

pourvu que la mesure de H soit $< \eta$.

Posons

$$(27) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \beta(t).$$

Nous allons montrer que la fonction $\beta(t)$ est absolument continue.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe d'après (26) un $\eta > 0$ tel que l'on a $\int_H |x_n(t)|\, dt < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$. En particulier, si H se compose d'un nombre fini de segments à extrémités t_i et t_i' n'empiétant pas l'un sur l'autre, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_H x_n(t)\, dt = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_i \int_{t_i}^{t_i'} x_n(t)\, dt = \sum\limits_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)]$, d'où $\left|\sum\limits_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)]\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui exprime la continuité absolue de la fonction $\beta(t)$.

Ceci étant, on n'a qu'à poser $\beta'(t) = x_0(t)$ pour conclure de (27) et des conditions pour la convergence faible, établies p. 128, que la suite $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$.

Démonstration pour $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. Admettons que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$, où $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, existe pour tout $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$. Les fonctionnelles $f_n(y) = \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$ sont évidemment linéaires dans $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et comme, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$ existe pour tout $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, la fonctionnelle $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$ est, selon le th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, également linéaire dans $(L^{(\frac{p}{p-1})})$; elle est donc (cf. Chap. IV, § 4, p. 64) de la forme $f(y) = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt$ où $y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $x_0 \subset (L^{(p)})$.

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \textit{pour tout} \quad y\subset(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

c. à d. que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0, c. q. f. d.

Démonstration pour (l) est analogue à celle du théorème établi au § 2, p. 137—139, et consiste à établir la convergence suivant la norme de la suite $\{x_n\}$ vers un élément x_0.

Démonstration pour $(l^{(p)})$ *où* $p>1$ est analogue à celle pour $(L^{(p)})$.

§ 5. *Un théorème sur la convergence faible d'éléments.*

Nous allons terminer ce chapitre par le théorème général suivant.

Théorème 3. *Etant donnée une opération linéaire $y=U(x)$ définie dans un espace E du type (B) et dont le contredomaine est situé dans un espace E_1, également du type (B), si une suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0 dans E, la suite $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$ dans E_1.*

Démonstration. Y étant une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E_1, la fonctionnelle $Y[U(x)]=X(x)$, définie dans E y est évidemment additive et continue, car on a $|X(x)|=|Y[U(x)]|\leqslant \leqslant|Y|\cdot|U(x)|\leqslant|Y|\cdot|U|\cdot|x|$.

La convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 implique donc que $\lim\limits_{n\to\infty} Y[U(x_n)]=\lim\limits_{n\to\infty} X(x_n)=X(x_0)=Y[U(x_0)]$, c. à d. que $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$, c. q. f. d.

Remarque. Dans l'hypothèse supplémentaire que *l'opération $y=U(x)$ est totalement continue,* la convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 entraîne la *convergence de $\{U(x_n)\}$ vers $U(x_0)$ selon la norme,* c. à d. l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}|U(x_n)-U(x_0)|=0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite partielle $\{x_{n_i}\}$ telle que

$$(28) \qquad |U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

la suite $\{U(x_{n_i})\}$ convergeant en même temps suivant la norme vers un $y' \subset E_1$. Or, la convergence faible de $\{x_{n_i}\}$ vers x_0 entraînant d'autre part, en vertu du th. 3 qui précède, celle de $\{U(x_{n_i})\}$ vers $U(x_0)$, on aurait $y' = U(x_0)$, ce qui est impossible selon (28).