CHAPITRE VIII.

Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type *(B)*.

§ 1. *Préliminaires.*

Etant donné un espace vectoriel fermé *d'éléments* $G \subset E$ et l'espace $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe, comme nous avons vu (cf. Chap. IV, § 3, p. 57, lemme), pour un *élément* quelconque $x_0 \subset E - G$ *une fonctionnelle linéaire* $f \subset \overline{E}$ telle que l'on a

$$f(x_0) = 1 \quad et \quad f(x) = 0 \quad pour\ tout \quad x \subset G.$$

Le problème s'impose si, réciproquement, la relation analogue ne subsiste entre les espaces $\Gamma \subset \overline{E}$ de fonctionnelles linéaires et les éléments de E. Plus précisément, il s'agit de savoir si, étant donné un espace vectoriel fermé $\Gamma \subset \overline{E}$ de *fonctionnelles linéaires* définies dans E, il existe pour une *fonctionnelle* quelconque $f_0 \subset \overline{E} - \Gamma$ un *élément* $x \subset E$ tel que l'on ait

$$(1) \qquad f_0(x) = 1 \quad et \quad f(x) = 0 \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma.$$

Or, *la réponse est*, dans le cas général, *négative.*

Considérons, en effet, comme E l'espace (c) des suites convergentes de nombres réels, donc comme $\overline{E}$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c), et comme Γ celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c) de la forme:

$$(2) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad où \quad x = \{\xi_i\} \subset (c) \quad et \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty.$$

Ainsi défini, Γ est un espace vectoriel et fermé.

En effet, posons

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0, \tag{3}$$

où

$$f_n \subset \Gamma \quad et \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Il s'agit de montrer que $f \subset \Gamma$. Or, (2) entraîne $\lim\limits_{p\to\infty,\, q\to\infty} \| f_p - f_q \| = 0$, d'où, comme par définition $f_p(x) - f_q(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)}) \xi_i$, on conclut de (3) en vertu du th. (Chap. IV, § 4), p. 66, que $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} | \alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)} | = 0$ et, par conséquent, qu'il existe une suite $\{\alpha_i\}$ telle que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} | \alpha_i^{(n)} - \alpha_i | = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{\infty} | \alpha_i | < \infty$. On a donc pour tout $x = \{\xi_i\} \subset (c)$ l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, d'où, selon (4), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ et comme selon (3) $\lim\limits_{n\to\infty} | f_n(x) - f(x) | \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| \cdot | x | = 0$, il vient $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ pour tout $x \subset (c)$. La fonctionnelle f est donc de la forme (2), d'où finalement $f \subset \Gamma$.

Ceci établi, soit

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad pour \quad x = \{\xi_i\} \subset (c). \tag{5}$$

La fonctionnelle f_0 ainsi définie n'appartient évidemment pas à Γ. Cependant il n'existe aucun $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \subset (c)$ satisfaisant aux conditions (1), car (1) et (5) entraînant l'égalité $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(0)} = 1$, il est impossible d'avoir pour toute suite de nombres $\{\alpha_i\}$ satisfaisant aux conditions (2) l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^{(0)} = 0$ exigée par (1).

§ 2. *Ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires.*

Un ensemble vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires définies dans un espace E du type (B) s'appelle *régulièrement fermé*, lors-

qu'il existe pour toute fonctionnelle linéaire définie dans E, mais n'appartenant pas à Γ, un élément $x_0 \subset E$ qui remplisse les conditions (1).

L'exemple qui précède montre que l'ensemble vectoriel fermé de fonctionnelles linéaires n'est pas toujours régulièrement fermé. Or, la réciproque est vraie: tout ensemble vectoriel de fonctionnelles linéaires Γ qui est régulièrement fermé est en même temps fermé dans le sens ordinaire (v. Introduction, p. 13) de ce terme.

En effet, soit

$$f_n \subset \Gamma \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \| = 0 . \tag{7}$$

Si dans ces conditions f_0 n'appartenait pas à l'ensemble Γ, supposé vectoriel et régulièrement fermé, il existerait un $x_0 \subset E$ satisfaisant à (1); d'après (6) on aurait donc en particulier $f_n(x_0) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, d'où, selon (7), $f_0(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$, contrairement à (1). On doit donc admettre que $f_0 \subset \Gamma$, c. à d. que l'ensemble Γ est fermé.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles régulièrement fermés. Soit, en effet, E un espace du type (B) et $G \subset E$ un ensemble vectoriel, d'ailleurs arbitraire. L'ensemble Γ des fonctionnelles linéaires f définies dans E et telles que

$$f(x) = 0 \quad pour\ tout \quad x \subset G$$

est, comme on l'aperçoit aisément, régulièrement fermé.

Remarque. Si l'ensemble Γ en question est non seulement vectoriel et régulièrement fermé, mais en outre total, il contient toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E.

En effet, la définition de l'ensemble total (voir Chap. III, § 3, p. 42) implique que le seul élément de E pour lequel toutes les fonctionnelles $f \subset \Gamma$ s'annulent est l'élément Θ.

Nous allons nous occuper dans ce chapitre des propriétés

que possèdent les ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires [1]).

§ 3. *Ensembles transfiniment fermés de fonctionnelles linéaires.*

Etant donnés un nombre ordinal quelconque ϑ qui est un *nombre-limite*, c. à d. n'ayant pas de précédent immédiat, et une suite bornée de nombres réels $\{C_\xi\}$ *du type* ϑ, c. à d. où $1 \leqslant \xi < \vartheta$, on appelle *limite transfinie supérieure de* $\{C_\xi\}$ et on désigne par $\overline{\lim\limits_{\xi\to\infty}} C_\xi$ la borne inférieure des nombres réels t satisfaisant à l'inégalité $C_\xi \leqslant t$ à partir d'un indice (ordinal) qui dépend de t. La *limite transfinie inférieure de* $\{C_\xi)$ est ensuite définie par la formule

$$\underline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}}\, C_\xi = -\overline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}}\,(-C_\xi).$$

Lemme 1. *Si l'on a pour une suite* $\{f_\xi\}$ *du type* ϑ *de fonctionnelles linéaires*

$$|f_\xi| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta,$$

il existe une fonctionnelle linéaire f *remplissant les conditions:*

$$(8) \quad |f| \leqslant M \quad \textit{et} \quad \underline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}}\, f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}}\, f_\xi(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

La démonstration résulte du th. 1 (Chap. II, § 2), p. 27, en y posant $p(x) = \overline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}}\, f_\xi(x)$. La fonctionnelle $p(x)$ satisfait en outre à l'inégalité $p(x) \leqslant M \cdot |x|$.

Ce lemme établi, nous appellerons une fonctionnelle linéaire $f(x)$ remplissant les conditions (8) *limite transfinie de la suite* $\{f_\xi(x)\}$.

En particulier, lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$, la fonctionnelle $f(x)$ est évidemment une limite transfinie de la suite $\{f_n(x)\}$, car on a $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x) = f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)$ pour tout $x \subset E$:

---

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Studia Mathematica I, p. 228—234, où se trouvent les théorèmes des §§ 3—5 de ce chapitre.

Un espace vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires est dit *transfiniment fermé*, lorsque toute suite transfinie $\{f_\xi\}$ de fonctionnelles de Γ à normes bornées dans leur ensemble admet une limite transfinie $f \subset \Gamma$.

Tout espace Γ transfiniment fermé est en même temps fermé au sens ordinaire.

En effet, les formules (6) et (7) donnent alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ pour tout $x \subset E$ et comme toute fonctionnelle f qui satisfait à la condition $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ est dans ce cas identique avec la fonctionnelle f_0, cette dernière, comme la seule limite transfinie de la suite $\{f_n\}$, appartient à l'espace Γ, qui est par conséquent fermé.

Lemme 2. *Etant donnés un espace vectoriel et transfiniment fermé Γ de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelle linéaire f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$(9) \qquad 0 < M < |f - f_0| \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

un élément $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

Démonstration. $\{M_i\}$ où $M_1 = M$ étant une suite infiniment croissante quelconque de nombres, désignons par $\mathfrak{m}$ le plus grand nombre cardinal satisfaisant à la condition suivante: étant donné un ensemble quelconque $G \subset E$ de puissance $< \mathfrak{m}$, il existe une fonctionnelle linéaire $f \subset \Gamma$ telle que

$$(10) \quad |f| \leqslant M_2 \quad \textit{et} \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad \textit{pour tout} \quad x \subset G.$$

Le nombre $\mathfrak{m}$ ainsi défini—remarquons le de suite—ne dépasse pas la puissance de E, car, s'il existait un $f \subset \Gamma$ tel que $|f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x|$ pour tout $x \subset E$, on aurait $|f - f_0| \leqslant M_1 = M$, contrairement à l'hypothèse (9).

Ceci dit, nous allons montrer que $\mathfrak{m}$ *est un nombre fini.*

Supposons, en effet, que $\mathfrak{m}$ ne soit pas fini et considérons un ensemble quelconque $G \subset E$ de puissance $\mathfrak{m}$. Rangeons les éléments de G en suite transfinie $\{x_\xi\}$ où $1 \leqslant \xi < \vartheta$, en désignant par ϑ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$; évidemment ϑ est un nombre-limite. En conséquence, pour tout nombre ordinal $\eta < \vartheta$ la puissance de l'ensemble des termes de la suite $\{x_\xi\}$ où $1 \leqslant \xi < \eta$ est $< \mathfrak{m}$. Par définition de $\mathfrak{m}$ il existe donc pour tout $\eta < \vartheta$ une fonctionnelle linéaire $f_\eta \subset \Gamma$ telle que

$$(11) \quad |f_\eta| \leqslant M_2 \quad \textit{et} \quad |f_\eta(x_\xi) - f_0(x_\xi) \leqslant M_1 \cdot |x_\xi| \quad \textit{pour tout} \quad \xi \leqslant \eta$$

et, Γ étant par hypothèse transfiniment fermé, il existe une fonctionnelle linéaire $f \subset \Gamma$ qui est une limite transfinie de la suite $\{f_\eta\}$ où $1 \leqslant \eta < \vartheta$, donc, d'après (11), qui satisfait aux conditions $|f| \leqslant M_2$ et $|f(x_\xi) - f_0(x_\xi) \leqslant M_1 \cdot |x_\xi|$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$, c. à d. aux conditions (10). Ainsi, en supposant $\mathfrak{m}$ non fini, il existerait pour tout ensemble $G \subset E$ de puissance $\mathfrak{m}$ un $f \subset \Gamma$ satisfaisant à (10), contrairement à la définition de $\mathfrak{m}$.

Or, $\mathfrak{m}$ étant fini, il existe un ensemble fini $G_1 \subset E$ tel qu'aucune fonctionnelle f assujettie aux conditions

$$|f - f_0| \leqslant M_2 \quad \textit{et} \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad \textit{pour tout} \quad x \subset G_1$$

n'appartient à Γ.

On en déduit aisément par induction l'existence dans E d'une suite $\{G_i\}$ d'ensembles finis tels qu'aucune fonctionnelle f qui, pour un certain k, remplit les conditions

$$|f - f_0| \leqslant M_k \quad \textit{et} \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_i \cdot |x| \quad \textit{pour} \quad x \subset G_i \quad \textit{et} \quad i < k$$

n'appartient à Γ. Par conséquent, si l'on a pour un f:

$$(12) \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_i \cdot |x| \quad \textit{pour} \quad x \subset G_i \quad \textit{et} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

la fonctionnelle f n'appartient pas à Γ.

Nous pouvons admettre que les éléments des ensembles G_i où $i = 1, 2, \ldots$ ont les normes égales à $\frac{M_1}{M_i}$: il suffit à ce but de

multiplier ces éléments par des nombres convenables. Si l'on range ensuite les éléments de ces ensembles en une suite $\{x_n\}$, en écrivant d'abord ceux de G_1, puis ceux de G_2 et ainsi de suite on obtient

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \Theta \quad \textit{et} \quad |x_n| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots$$

et si

$$(14) \qquad |f(x_n) - f_0(x_n)| \leqslant M_1 \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

la fonctionnelle f n'appartient pas à Γ.

Désignons par G_0 l'ensemble de toutes les suites $\{f(x_n)\}$ pour $f \subset \Gamma$. On a évidemment $G_0 \subset (c)$ et $\{f_0(x_n)\} \subset (c)$. En vertu de (14), la distance de $\{f_0(x_n)\}$ à l'ensemble linéaire G_0 est $\geqslant M_1$. Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chap. IV, § 4, p. 66), il existe donc en vertu du lemme (Chap. IV, § 3), p. 57 (en y posant $G = G_0$), une suite de nombres $\{C_n\}$ et un nombre C tels que l'on a

$$(15) \qquad C \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_0(x_n) = 1,$$

$$(16) \qquad C \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(x_n) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

et

$$(17) \qquad |C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant \frac{1}{M_1}.$$

En posant donc $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$, on obtient finalement de (15)–(17), en vertu de (13), $f_0(x_0) = 1$, $f(x_0) = 0$ pour tout $f \subset \Gamma$ et $|x_0| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cdot |x_n| \leqslant \frac{1}{M_1} = \frac{1}{M}$, c. q. f. d.

Le lemme 2 qui vient d'être établi implique le suivant

Lemme 3. *Les notions d'espaces vectoriels de fonctionnelles linéaires régulièrement fermés et de ceux trasfiniment fermés sont équivalentes.*

Démonstration. Si un espace vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires est transfiniment fermé, il est fermé au sens ordinaire, ce qui implique immédiatement en vertu du lemme 2 que Γ est un espace régulièrement fermé.

Réciproquement, soient Γ un espace vectoriel régulièrement fermé de fonctionnelles linéaires, $\{f_\xi\}$ une suite arbitraire du type ϑ de fonctionnelles appartenant à Γ et dont les normes sont bornées dans leur ensemble, enfin f_0 une fonctionnelle quelconque qui est une limite transfinie de la suite $\{f_\xi\}$. On a donc

$$(18) \quad \varliminf_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \varlimsup_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

Si en conséquence f_0 n'appartenait pas à Γ, il existerait par définition de Γ un élément $x \subset E$ assujetti aux conditions (1), p. 115, d'où, en particulier, $f_\xi(x) = 0$, contrairement à (18). On a donc $f_0 \subset \Gamma$, de sorte que Γ est transfiniment fermé.

Les lemmes 2 et 3 donnent le

Théorème 1. *Etant donné un espace vectoriel régulièrement fermé Γ de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelle linéaire f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$0 < M < |f - f_0| \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

un élément $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1,\ f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

§ 4. *Convergence faible des fonctionnelles linéaires.*

On dit qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles linéaires converge *faiblement* vers la fonctionnelle f, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

La fonctionnelle f porte alors le nom de *limite faible* de la suite $\{f_n\}$.

La fonctionnelle $f(x)$ est donc additive et mesurable (B); selon le th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, elle est donc linéaire. D'autre part, en vertu du th. 5 (Chap. V, § 1), p. 80, la suite des normes $\{|f_n|\}$ est bornée. Enfin, on a

$$|f| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |f_n|, \tag{19}$$

car la convergence faible de la suite $\{f_n\}$ vers f entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$ pour tout x, et comme $|f_n(x)| \leqslant |f_n| \cdot |x|$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on a $|f(x)| \leqslant |x| \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$, d'où la formule (19).

On en déduit aisément le

Théorème 2. *Pour qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires converge faiblement vers la fonctionnelle $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

(20) *la suite $\{|f_n|\}$ bornée*

et

(21) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour tout élément x d'un ensemble dense (ou fondamental).*

Théorème 3. *Si l'espace E est séparable, toute suite de fonctionnelles linéaires $\{f_n\}$ dont l'ensemble des normes est borné contient une suite partielle faiblement convergente.*

Démonstration. Il suffit, en effet, d'extraire de la suite $\{f_n\}$ une suite partielle, convergente dans un ensemble dense dénombrable, ce qui est facile de faire par le procédé de la diagonale.

§ 5. *Ensembles faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) séparables.*

Etant donnés deux ensembles de fonctionnelles linéaires Δ et Γ où $\Delta \subset \Gamma$, l'ensemble Δ est dit *faiblement dense* dans Γ, lorsque pour tout $f \subset \Gamma$ il existe dans Δ une suite $\{f_n\}$ qui converge faiblement vers f.

L'ensemble Γ de fonctionnelles linéaires s'appelle *faiblement fermé*, lorsque Γ admet comme élément toute fonctionnelle f qui est la limite faible d'une suite de fonctionnelles appartenant à Γ.

Théorème 4. *Si l'espace E est séparable, tout ensemble Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E contient un sous-ensemble dénombrable Δ faiblement dense dans Γ.*

Démonstration. On peut se borner au cas où les normes des fonctionnelles de Γ sont bornées dans leur ensemble, car tout ensemble de fonctionnelles est une somme tout au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles ayant cette propriété.

Soient $\{x_n\}$ la suite dense dans E et Z_n pour $n = 1, 2, \ldots$ l'ensemble des points de l'espace n-dimensionnel à coordonnées

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n) \tag{22}$$

pour tous les $f \subset \Gamma$. Il existe évidemment pour tout n un ensemble dénombrable $\Delta_n \subset \Gamma$ tel que les points à coordonnées (22) pour $f \subset \Delta_n$ forment un ensemble dense dans Z_n. L'ensemble $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ est évidemment dénombrable et il existe pour tout $f \subset \Gamma$ une suite $\{f_n\}$ satisfaisant aux conditions $f_n \subset \Delta_n \subset \Delta$ et $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, donc qui converge faiblement vers f, puisque, les fonctionnelles f_n appartenant à $\Delta \subset \Gamma$, l'ensemble de leurs normes est borné par hypothèse.

Théorème 5. *Pour les espaces E du type (B) séparables les notions d'ensembles de fonctions linéaires (définies dans E) régulièrement fermé et faiblement fermé sont équivalentes.*

Démonstration. Soit, d'une part, $\{f_n\}$ une suite de fonctionnelles linéaires appartenant à Γ et qui converge faiblement vers une fonctionnelle f_0. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E. \tag{23}$$

Si f_0 n'appartenait pas à l'ensemble Γ, supposé régulièrement

fermé, il existerait par définition de cette notion un élément $x_0 \subset E$ satisfaisant aux conditions

$$(24) \qquad f_0(x_0) = 1 \quad et \quad f(x_0) = 0 \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma.$$

Comme $f_n \subset \Gamma$, on aurait par conséquent $f_n(x_0) = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, d'où, en vertu de (23), $f_0(x_0) = 0$, contrairement à (24). Il en résulte que $f_0 \subset \Gamma$; l'ensemble Γ est donc faiblement fermé [1]).

D'autre part, en vertu du lemme 3, p. 121, il suffit de montrer que l'ensemble Γ, supposé faiblement fermé, est transfiniment fermé.

Soient $\{f_\xi\}$ une suite du type ϑ telle que

$$(25) \qquad f_\xi \subset \Gamma \quad et \quad |f_\xi| \leqslant M \quad où \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta$$

et $\{x_i\}$ une suite dense dans E. Il existe, en raison de l'hypothèse, pour tout n naturel un ξ_n ordinal tel que

$$(26) \qquad \varliminf_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \varlimsup_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n} \quad pour \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Or, l'espace E étant séparable, on peut en vertu du th. 3, p. 123, extraire de la suite $\{f_{\xi_n}\}$ une suite partielle faiblement convergente. En désignant par f la limite faible de la suite $\{f_{\xi_n}\}$, on a en vertu de (25) $f \subset \Gamma$ et, en même temps, on conclut de (26) que f est une limite transfinie de la suite $\{f_\xi\}$.

Les théorèmes 1, p. 122, et 5, qui vient d'être établi, entraînent immédiatement le

Théorème 6. *Si l'espace E du type (B) est séparable, alors étant donné un ensemble vectoriel faiblement fermé Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E et une fonctionnelle linéaire quelconque f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$0 < M < |f - f_0| \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma$$

---

[1]) On voit donc que la séparabilité de E n'intervient pas dans cette partie de la démonstration.

un élément $x_0 \subset E$ *tel que l'on a*

$$f_0(x_0) = 1,\ f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

Le th. 5 entraîne en vertu du lemme 3, p. 121, *l'équivalence des notions d'ensembles régulièrement, transfiniment et faiblement fermés* de fonctionnelles linéaires *dans les espaces* E du type (B) *séparables.*

Il en résulte, en tenant compte de la remarque, p. 117, le

Théorème 7. *Si l'espace* E *du type* (B) *est séparable et* Γ *est un ensemble de fonctionnelles linéaires définies dans* E*, non seulement vectoriel et faiblement fermé, mais aussi total, alors* Γ *contient toutes les fonctionnelles linéaires définies dans* E (c. à d. $\Gamma = \overline{E}$).

§ **6.** *Conditions pour la convergence faible des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces* (C), $(L^{(p)})$, (c) *et* $(l^{(p)})$.

Nous passons à étudier successivement la convergence faible des fonctionnelles linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B) *séparables.* Tels sont les espaces (C), $(L^{(p)})$ pour $p \geqslant 1$, (c) et $(l^{(p)})$ pour $p \geqslant 1$.

L'ensemble dense dénombrable constituent: dans (C) et $(L^{(p)})$ les polynômes à coefficients rationnels, dans (c), resp. dans $(l^{(p)})$, les suites de nombres rationnels dont tous les termes à partir d'un indice suffisamment élevé restent constants, resp. sont égaux à 0.

Espaces $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans $(L^{(p)})$ étant (cf. Chap. IV, § 4, p. 64) de la forme

$$(27) \qquad \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad \text{où} \quad \alpha(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

la suite des fonctionnelles

$$(28) \qquad \{f_n(x)\} = \left\{\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt\right\} \quad \text{où} \quad \alpha_n(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (27), lorsqu'on a

$$(29) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

pour toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$.

Or, on peut montrer aisément que *pour la convergence faible de la suite* (28) *vers la fonctionnelle* (27), *il faut et il suffit que l'on ait simultanément:*

$$(30) \qquad \textit{la suite } \left\{\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right\} \textit{ bornée}$$

et

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha(t)\,dt \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\ ^{1)}.$$

La démonstration résulte du th. 2, p. 123, étant donné que l'on a $\|f_n\| = \left[\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right]^{\frac{p-1}{p}}$, que, en outre, les fonctions $x_u(t)$ définies pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ par les conditions

$$x_u(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant u \\ 0 & \textit{pour} \quad u < t \leqslant 1 \end{cases}$$

forment un ensemble total dans $(L^{(p)})$ et enfin que $\int_0^1 x_u(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha_n(t)\,dt$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Espace (L). Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans (L) étant de la forme

$$(32) \qquad f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad \textit{où} \quad \alpha(t) \subset (M)$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 65), la suite des fonctionnelles

---

[1]) Ces conditions ont été données par F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497.

$$(33) \qquad \{f_n(x)\} = \left\{\int_0^1 x(t)\, \alpha_n(t)\, dt\right\} \quad \text{où} \quad \alpha_n(t) \subset (M)$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (32), lorsqu'on a

$$(34) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\, \alpha_n(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (L).$$

On montre comme dans le cas qui précède que *pour la convergence faible de la suite de fonctionnelles linéaires* (33) *vers la fonctionnelle* (32), *il faut et il suffit d'avoir simultanément:*

(35) *les fonctions de la suite* $\{\alpha_n(t)\}$ *bornées dans leur ensemble, en dehors tout au plus d'un ensemble de valeurs de* t *de mesure lebesguienne nulle,*

$$(36) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^u \alpha_n(t)\, dt = \int_0^u \alpha(t)\, dt \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\ ^{1)}.$$

Remarque. Les conditions (30) et (31) sont évidemment nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la propriété (29). Il en est de même des conditions (35) et (36) pour la propriété (34).

Espaces $(l^{(p)})$ *où* $p \geqslant 1$. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans $(l^{(p)})$ étant de la forme

$$(37) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \ \textit{où}\ x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)}) \ \textit{et}\ \{\alpha_i\} \subset \begin{cases} (l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}) & \textit{pour}\ p>1 \\ (M) & \textit{pour}\ p=1 \end{cases}$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 67—68), la suite des fonctionnelles

$$(38) \quad \{f_n(x)\} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\, \xi_i\right\} \quad \text{où} \quad \{\alpha_{in}\} \subset \begin{cases} (l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}) & \textit{pour} \quad p>1 \\ (M) & \textit{pour} \quad p=1 \end{cases}$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (37), lorsqu'on a

$$(39) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\, \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \xi_i \quad \textit{pour tout} \quad x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)}).$$

---

[1]) Ces conditions ont été trouvées par M. Lebesgue.

Pour que la suite des fonctionnelles linéaires (38) *converge faiblement vers la fonctionnelle* (37), *il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

$$(40)\quad \textit{la suite:}\ \begin{cases} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|^{\frac{p}{p-1}}\right\} & \textit{pour}\quad p>1 \\ \{\text{borne sup}_{1\leqslant i<\infty} |\alpha_{in}|\} & \textit{pour}\quad p=1 \end{cases} \quad \textit{bornée,}$$

$$(41)\qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i \quad \textit{pour}\quad i=1,2,\ldots$$

La démonstration résulte du th. 2, § 4, p. 123, en s'appuyant sur le fait que les éléments

$$x_j = \{\xi_{ij}\} \quad \textit{où} \quad \xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{pour}\quad i=j \\ 0 & \textit{pour}\quad i\neq j \end{cases}$$

forment une suite totale dans $(l^{(p)})$ et que l'on a en outre $f_n(x_j) = \alpha_{jn}$ pour tous j et n naturels; on tiendra compte enfin de la représentation de la norme des fonctionnelles linéaires dans les espaces $(l^{(p)})$, donnée p. 68.

Remarque. Les conditions (40) et (41) sont en même temps nécessaires et suffisantes pour (39).

Espace (c). Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (c)

$$(42)\quad f(x) = A\lim_{i\to\infty}\xi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i \quad \textit{où}\quad x=\{\xi_i\}\subset(c)\quad \textit{et}\quad \{\alpha_i\}\subset(l)$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 66), la suite des fonctionnelles linéaires

$$(43)\quad \{f_n(x)\} = \left\{A_n\lim_{i\to\infty}\xi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\,\xi_i\right\} \ \textit{où}\ \{\alpha_{in}\}\subset(l)\ \textit{pour}\ n=1,2,\ldots$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (42), lorsque

$$(44)\quad \lim_{n\to\infty}\left[A_n\lim_{i\to\infty}\xi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\,\xi_i\right] = A\lim_{i\to\infty}\xi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i \ \textit{pour tout}\ x=\{\xi_i\}\subset(c).$$

On montre facilement que *pour la convergence faible de la suite* (43) *vers la fonctionnelle* (42), *il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(45) *la suite* $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| \right\}$ *bornée*,

(46) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *et* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

§ 7. *Compacticité faible d'ensembles bornés dans certains espaces.*

Les résultats qui précèdent permettent de déduire en vertu du th. 3, p. 123, les théorèmes suivants.

Pour $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. *Toute suite de fonctions* $\{\alpha_n(t)\}$, *où* $\alpha_n(t) \subset (L^{(p)})$, *assujettie à la condition*

$$\int_0^1 |\alpha_n(t)|^p \, dt < M,$$

où M *est un nombre indépendant de* n, *contient une suite partielle* $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ *telle que l'on a pour une fonction* $\alpha_0(t) \subset (L^{(p)})$:

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha_{n_i}(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 \alpha_0(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})\,^{1)}.$$

En effet, les expressions $\int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ peuvent être regardées comme des fonctionnelles linéaires définies dans $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$. L'ensemble de leurs normes étant borné et l'espace $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ étant séparable, on peut d'après le th. 3, p. 123, extraire de la suite $\{\alpha_n(t)\}$ une suite faiblement convergente; on n'a ensuite qu'à appliquer l'énoncé établi pour les espaces $(L^{(p)})$ au § 6, p. 127.

Pour (M). Toute suite de fonctions $\{\alpha_n(t)\}$ *où* $\alpha_n(t) \subset (M)$

---

[1]) Ce théorème est dû à M. F. Reisz, l. c., p. 466—467.

dont les normes sont bornées dans leur ensemble contient une suite partielle $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ *telle que l'on a pour une fonction* $\alpha_0(t) \subset (M)$:

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 \alpha_{n_i}(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 \alpha_0(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (L).$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Pour $(l^{(p)})$ *où* $p > 1$ *et* (m) on a des théorèmes analogues.

§ 8. *Fonctionnelles linéaires faiblement continues définies dans les espaces des fonctionnelles linéaires.*

$F(f)$ où $f \subset \bar{E}$ désignant une fonctionnelle définie dans l'ensemble $\bar{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires (définies dans E supposé un espace du type (B)), nous appelons la fonctionnelle $F(f)$ *faiblement continue*, lorsqu'on a $\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$ pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles linéaires faiblement convergente vers f.

Théorème 8. *Si l'espace* E *du type* (B) *est séparable et la fonctionnelle linéaire* $F(f)$ *définie pour* $f \subset \bar{E}$ *est faiblement continue, il existe un élément* $x_0 \subset E$ *tel que l'on a*

$$F(f) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \bar{E}. \tag{47}$$

Démonstration. Γ désignant l'ensemble de toutes les fonctionnelles $f \subset \bar{E}$ qui remplissent l'équation $F(f) = 0$, la continuité faible de F a pour conséquence facile que Γ est un ensemble faiblement fermé. On peut évidemment admettre que $\Gamma \neq \bar{E}$. Soit donc f_0 une fonctionnelle linéaire remplissant l'équation

$$F(f_0) = 1. \tag{48}$$

Il en résulte en vertu du th. 6, p. 125, l'existence d'un $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1 \quad \textit{et} \quad f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma. \tag{49}$$

Or, l'identité

$$f = f_0 \cdot F(f) + \varphi \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \bar{E}, \quad \textit{où} \quad \varphi = f - f_0 \cdot F(f), \tag{50}$$

donne, selon (48), $F(\varphi) = 0$, d'où $\varphi \subset \Gamma$ et par conséquent, d'après (49), $\varphi(x_0) = 0$, ce qui entraîne en vertu de (50) la propriété (47), q. f. d.

Remarque. Si l'espace E n'est pas séparable, le th. 8 reste vrai, pourvu que la fonctionnelle $F(f)$ soit linéaire et l'ensemble désigné par Γ soit régulièrement fermé (ce qui permet de faire appel dans le raisonnement au th. 1, p. 122, au lieu du th. 6, p. 125).