CHAPITRE VII.

Suites biorthogonales.

§ 1. *Définition et propriétés générales.*

Une suite d'éléments $\{x_i\}$ et de fonctionnelles linéaires $\{f_i\}$ s'appelle *biorthogonale*, lorsque

$$(1) \qquad f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad i = j, \\ 0 & \textit{pour} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Etant donné un $x \subset E$ arbitraire, la série

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)$$

porte le nom du *développement de x suivant la suite biorthogonale* $\{x_i\}, \{f_i\}$.

Dans le cas où la suite $\{f_i\}$ constitue un ensemble total de fonctionnelles (cf. Chap. III, § 3, p. 42) et la série (2) est pour un x convergente, x est la somme de cette série; en effet, on a alors pour tout $j = 1, 2, \ldots$

$$f_j\left[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)\right] = f_j(x) - f_j(x) = 0.$$

Théorème 1. *Si la série* (2) *est convergente pour tout $x \subset E$, la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$$

est aussi convergente pour tout $x \subset E$, *quelle que soit la fonctionnelle linéaire* F.

Démonstration. En posant

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot F(x_i), \tag{3}$$

on a $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot F(x_i) = F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right]$, de sorte que la convergence de la suite $\{S_n(x)\}$ pour tout x est évidente.

Théorème 2. *Si les normes des sommes partielles* (3) *de la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) \tag{4}$$

sont bornées dans leur ensemble, quelle que soit la fonctionnelle linéaire F, *la série* (2) *est convergente pour tout* $x \subset E$ *qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite* $\{x_i\}$.

Démonstration. En posant

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x), \tag{5}$$

on a $F[s_n(x)] = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \cdot f_i(x) = S_n(x)$ (voir (3)) et, comme par hypothèse $|S_n| \leqslant M$ où M est un nombre indépendant de n, on a pour tout $x \subset E$ en vertu du th. 6 (Chap. V, § 1), p. 80: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(x)| < \infty$. Il existe donc en vertu du th. 5 (Chap. V, § 1), p. 80, un nombre N, indépendant de n et de x, tel que $|s_n(x)| \leqslant N \cdot |x|$.

Or, comme pour tout $i = 1, 2, \ldots$ on a $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$, on établit par un raisonnement banal l'existence de $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ pour tout élément $x \subset E$ qui satisfait à la condition de l'énoncé.

Théorème 3. *Si les normes des sommes partielles* (5) *de la série* (2) *sont bornées dans leur ensemble, quel que soit* $x \subset E$, *la*

série (4) *est convergente pour toute fonctionnelle* F *qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite* $\{f_i\}$.

La démonstration est analogue à celle du th. 2, qui précède.

Théorème 4. *Dans les mêmes hypothèses, si en outre* $\{x_i\}$ *est une suite fondamentale, la série* (2) *est convergente pour tout* $x \subset E$.

Démonstration. On a, selon (5), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |s_n(x)| < \infty$ pour tout $x \subset E$ et, de plus, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = x_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ La convergence de la série (2) pour tout $x \subset E$ en résulte en vertu des th. 5 et 3 (Chap. V, § 1), p. 80 et 79.

§ 2. *Suites biorthogonales dans quelques espaces particuliers.*

Envisageons à présent comment se comportent les suites biorthogonales dans les espaces qui nous intéressent plus particulièrement.

Posons

$$\int_0^1 x_i(t)\, y_j(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad i = j \\ 0 & \textit{pour} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Admettons de plus que $\{x_i(t)\}$ soit une suite de fonctions dans $(L^{(p)})$ où $p > 1$ et $\{y_i(t)\}$ en soit une dans $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$; enfin que ces suites y soient complètes (ou fermées).

Théorème 5. *Dans ces hypothèses, si la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$$

est convergente en moyenne avec la p-ième puissance, quelle que soit la fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$, *la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt \tag{7}$$

est convergente en moyenne avec la $\frac{p}{p-1}$ *-ième puissance pour toute fonction* $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Démonstration. Soit

$$f_i(x) = \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour } x(t) \subset (L^{(p)}).$$

La série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)$ est donc par hypothèse pour tout $x \subset (L^{(p)})$ convergente en moyenne (c. à d. selon la norme) avec la p-ième puissance. En vertu du th. 3, p. 107, la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$ où $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ est par conséquent avec la $\frac{p}{p-1}$-ième puissance convergente selon la norme (c. à d. en moyenne) pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans l'espace $(L^{(p)})$; il en est donc de même de la série (7) pour toute fonction $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, c. q. f. d.

En particulier, lorsque $x_i(t) = y_i(t) \subset (L^{(r)})$ où r est le plus grand des nombres p et $\frac{p}{p-1}$, le théorème qui vient d'être établi entraîne le corollaire suivant.

Si la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt \tag{8}$$

est pour tout $x \subset (L^{(p)})$ *convergente en moyenne avec la p-ième puissance, elle l'est également pour tout* $x \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ *avec la* $\frac{p}{p-1}$*-ième puissance.*

On peut y admettre p. ex. que x_i où $i = 1, 2, \ldots$ sont des fonctions bornées.

Considérons maintenant le cas où, dans l'hypothése (6), $\{x_i(t)\}$ est une suite de fonctions intégrables et $\{y_i(t)\}$ une suite

de fonctions bornées pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Admettons enfin que la suite $\{x_i(t)\}$ soit complète dans (L).

Théorème 6. *Dans ces hypothèses, si la série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$ *est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$, *la série* $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$ *est bornée presque partout pour tout* $x(t) \subset (M)$ *et réciproquement.*

Le démonstration est analogue à celle du th. 5, qui précède: on considère x_i comme des éléments du domaine (L) et y_i comme des représentants des fonctionnelles linéaires; on a recours enfin aux th. 3 et 4, p. 107—108.

En particulier, lorsque $x_i(t) = y_i(t)$, on a les corollaires:

1° *Si la série* (8), *où* $x_i(t) = y_i(t) \subset (M)$, *est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$, *elle est bornée pour tout* $x(t) \subset (M)$ *et réciproquement.*

2° *Si la série* (8), *où* $x_i(t) = y_i(t) \subset (C)$ *et* $\{x_i\}$ *est une suite complète dans* (C), *est uniformément convergente pour tout* $x(t) \subset (C)$, *elle est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$ *et réciproquement.*

La démonstration s'obtient: dans un sens, en considérant x_i comme des éléments du domaine (C) et $y_i = x_i$ comme des représentants des fonctionnelles, et, dans le sens inverse, en regardant $x_i(t)$ comme des éléments du domaine (L) et $y_i = x_i$ comme des représentants des fonctionnelles linéaires définies dans (L).

§ 3. *Bases dans les espaces du type (B).*

Une suite $\{x_i\}$ d'éléments de E s'appelle *base* [1]), lorsqu'il existe pour tout $x \subset E$ exactement une suite de nombres $\{\eta_i\}$ telle que l'on ait

---

[1]) Cette notion a été introduite dans le cas général par M. J. Schauder (*Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 47—65).

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i .$$

Etant donnée une base $\{x_i\}$, soit E_1 l'ensemble des suites $y = \{\eta_i\}$ pour lesquelles la série $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$ est convergente. En posant $|y| = \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \right|$, on montre facilement que E_1 ainsi normé constitue un espace du type (B).

Posons ensuite

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \quad \textit{pour toute suite} \quad y = \{\eta_i\} \subset E_1 .$$

Ainsi définie, l'opération $U(y)$ est linéaire, car $|U(y)| \leqslant |y|$, est comme elle transforme E_1 en E d'une façon biunivoque, l'opération inverse $y = U^{-1}(x)$ est également linéaire.

Enfin la fonctionnelle

$$f_i(x) = \eta_i \quad \textit{où} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

est aussi linéaire, car $|\eta_i x_i| \leqslant 2 \cdot |y|$ et $|f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{|x_i|} |y| \leqslant$ $\leqslant \frac{2}{|x_i|} |U^{-1}| \cdot |x|$.

Or, on a par conséquent

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E$$

et, ce développement étant unique, on obtient l'égalité (1) (voir p. 106), de sorte que *la suite* $\{x_i\}, \{f_i\}$ *est biorthogonale.*

Remarquons que pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans E la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$ converge vers $F(x)$, car on a pour tout $x \subset E$: $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i) = \lim_{n \to \infty} F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right] = F(x)$.

On ne sait pas si tout espace du type (B) séparable admet une base.

La question n'est résolue que pour certains espaces particuliers. Ainsi p. ex. dans $(L^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la base est donnée par le système orthogonal de Haar. Dans (C) la base a été construite par M. J. Schauder[1]). Dans $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la base est fournie par la suite $\{x_i\}$ où $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$ et $\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & pour \quad i = n \\ 0 & pour \quad i \neq n; \end{cases}$ on a alors $f_i(x) = \xi_i$ pour $x = \{\xi_i\}$. Enfin dans (c) la base est formée de la même suite augmentée de l'élément $x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}$ où $\xi_n^{(0)} = 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On a alors $f_0(x) = \lim\limits_{i \to \infty} \xi_i$ pour $x = \{\xi_i\} \subset (c)$.

§ 4. *Quelques applications à la théorie des développements orthogonaux.*

Théorème 7. *Les suites $\{x_i\}, \{f_i\}$ et $\{y_i\}, \{\varphi_i\}$ étant biorthogonales et les équations $f_i(x) = \varphi_i(y)$ où $i = 1, 2, \ldots$ admettant pour tout x exactement une seule solution $y = U(x)$, la convergence de la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i x_i$ entraîne celle de la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i y_i$ pour toute suite de nombres $\{h_i\}$.*

Démonstration. On aperçoit facilement que les égalités $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ entraînent l'égalité $y_0 = U(x_0)$. En vertu du th. 7 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération $y = U(x)$ est par conséquent linéaire. En posant donc $|U| = M$, on a $|U(x)| \leqslant M \cdot |x|$ et comme par définition $U(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$, il vient $U\left(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i y_i$ pour h_i réels quelconques, ce qui implique immédiatement la thèse du théorème.

Corollaire. *$\{x_i(t)\}$ et $\{y_i(t)\}$ étant des suites orthogonales normées de fonctions continues, si pour toute fonction continue $x(t)$ il existe une fonction continue unique $y(t)$ telle que l'on ait $\int\limits_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt = \int\limits_0^1 y_i(t)\, y(t)\, dt$, la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$ entraîne celle de la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t)$.*

---

[1]) l. c., Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 48—49.

Des corollaires analogues s'obtiennent pour d'autres espaces fonctionnels [1]).

Théorème 8. *Soient:* $\{x_i\}$, $\{f_i\}$ *une suite biorthogonale, où* $\{f_i\}$ *est une suite totale, et* $\{h_i\}$ *une suite de nombres telle que,* $\{\alpha_i\}$ *étant une suite de coefficients d'un élément* x (c. à d. que $\alpha_i = f_i(x)$ pour $i = 1, 2, \ldots$), $\{h_i \alpha_i\}$ *en soit une d'un élément* y.

Si dans ces conditions $\{\beta_i\}$ *est une suite de coefficients d'une fonctionnelle linéaire* F (c. à d. que $\beta_i = F(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$), *la suite* $\{h_i \beta_i\}$ *l'est d'une fonctionnelle linéaire* Φ.

Démonstration. Le système d'équations $f_i(x) = h_i f_i(y)$ où $i = 1, 2, \ldots$ admet par hypothèse pour tout x exactement une solution. Désignons la par $y = U(x)$.

Les égalités $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ entraînent évidemment l'égalité $y_0 = U(x_0)$. Par conséquent, en vertu du th. 7 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération $U(x)$ est continue. En particulier, on vérifie aisément que l'on a

$$U(x_i) = h_i x_i \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Or, étant donnée une fonctionnelle linéaire F telle que $\beta_i = F(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$, on a selon (9) $F[U(x_i)] = h_i F(x_i) = h_i \beta_i$, c. à d. que les nombres $h_i \beta_i$ sont des coefficients de l'opération $\Phi = \overline{U}(F)$, c. q. f. d.

Remarquons que si $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, $U(x)$ est en vertu de (9) la limite d'une combinaison linéaire de termes de la suite $\{x_i\}$.

Comme une application facile de cette remarque, nous obtenons le

Théorème 9. *Soit* $\{x_i(t)\}$ *une suite orthogonale et normée de fonctions continues, fermée dans l'espace* (C).

---

[1]) Cf. S. Banach, *Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales*, Comptes Rendus 180, Paris 1925, p. 1637—1640 et H. Steinhaus, *Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales*, Stud. Math. 1 (1929), p. 191—200.

Si la suite de facteurs $\{h_i\}$ *transforme toute suite* $\{\alpha_i\}$ *de coefficients d'une fonction bornée en une suite* $\{h_i \alpha_i\}$ *de ceux d'une fonction bornée, elle transforme en même temps toute suite* $\{\beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction continue arbitraire en une suite* $\{h_i \beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction continue.*

Le théorème inverse est aussi vrai.

On a enfin le

Théorème 10. *Soit* $\{x_i(t)\}$ *une suite de fonctions bornées orthogonale, normale et complète dans* $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ *où* $p > 1$.

Si la suite de facteurs $\{h_i\}$ *transforme la suite de coefficients* $\{\alpha_i\}$ *d'une fonction arbitraire* $x(t) \subset (L^{(p)})$ *dans la suite* $\{h_i \alpha_i\}$ *de ceux d'une fonction* $y(t) \subset (L^{(p)})$, *elle transforme aussi toute suite* $\{\beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction arbitraire* $\bar{x}(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ *dans la suite* $\{h_i \beta_i\}$ *de ceux d'une fonction* $\bar{y}(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$. *Si* $p = \infty$, *alors* $(L^{(p)}) = (M)$ [1].

---

[1]) Cf. W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* Stud. Math. I (1929), p. 1—39 et 241—255.