CHAPITRE VI.

Opérations totalement continues et associées.

§ 1. *Opérations totalement continues.*

Une opération linéaire $U(x)$ s'appelle *totalement continue*, si elle transforme tout ensemble borné en ensemble compact.

Exemple. Si, pour $i=1, 2, \ldots, n$, X_i désignent des fonctionnelles linéaires et x_i des éléments, l'opération $U(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \cdot x$ est totalement continue.

Théorème 1. *Le contredomaine de toute opération totalement continue est séparable.*

Démonstration. L'ensemble G_n de tous les $U(x)$ où $|x| \leqslant n$ étant compact, donc séparable[1]), il en est de même de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$, qui est le contredomaine de l'opération U.

Théorème 2. *Etant donnée une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires totalement continues, toute opération linéaire $U(x)$ telle que $\lim_{n \to \infty} |U_n - U| = 0$ est aussi totalement continue.*

Démonstration. Soient $\{x_i\}$ une suite bornée et $\{\overline{x}_i\}$ une suite extraite de $\{x_i\}$ par la méthode de la diagonale de façon que $\lim_{i \to \infty} U_n(\overline{x}_i)$ existe pour tout n naturel. On a en conséquence pour $n=1, 2, \ldots$: $|U(\overline{x}_p) - U(\overline{x}_q)| \leqslant |U(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_p)| + |U_n(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_q)| + |U_n(\overline{x}_q) - U(\overline{x}_q)|$, donc $|U(\overline{x}_p) - U(\overline{x}_q)| \leqslant |U - U_n| \cdot (|\overline{x}_p| + |\overline{x}_q|) +$

---

1) cf. p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 126.

$+ |U_n(\overline{x_p}) - U_n(\overline{x_q})|$, d'où évidemment $\overline{\lim\limits_{q\to\infty, p\to\infty}} |U(\overline{x_p}) - U(\overline{x_q})| = 0$. Ainsi la suite $\{U(\overline{x_i})\}$ est convergente, ce qui implique la continuité totale de l'opération $U(x)$.

§ 2. *Exemples des opérations totalement continues dans quelques espaces particuliers.*

Si $K(s,t)$ est une fonction continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, la fonction (de la variable s)

$$(1) \qquad u(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

est continue, quelle que soit la fonction intégrable $x(t)$. Regardée comme opération définie dans un des espaces

$$(2) \qquad (M), (C), (L) \text{ et } (L^{(r)}) \text{ où } r > 1,$$

et dont le contredomaine est situé dans un quelconque de ces espaces, *l'opération* (1) *est totalement continue.*

La démonstration s'appuie sur le théorème suivant de Arzelà: *Pour qu'une suite de fonctions continues $\{u_n(s)\}$ renferme une suite partielle uniformément continue, il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|s_1 - s_2| < \eta$ entraîne l'inégalité $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$.*

Admettons en effet que $\|x_n(t)\| \leqslant 1$ et que l'on ait pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $n = 1, 2, \ldots$: $u_n(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x_n(t)\, dt$. La continuité de $K(s,t)$ implique l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ d'un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|s_1 - s_2| < \eta$ entraîne $|K(s_1, t) - K(s_2, t)| \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Par conséquent $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \left|\int_0^1 [K(s_1,t) - K(s_2,t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon \cdot \int_0^1 |x_n(t)|\, dt$, ce qui donne, en raison de l'inégalité $\int_0^1 |x_n(t)|\, dt \leqslant$ $\leqslant \|x_n\|$, facilement vérifiable dans les espaces (2), $|u_n(s_1) -$ $- u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$, de sorte qu'en vertu du théorème de Arzelà on peut extraire de $\{u_n(s)\}$ une suite uniformément convergente. Or, toute suite de fonctions uniformément convergente étant dans les espaces (2) convergente en même temps suivant la norme (qui y a été adoptée), il est démontré que l'opération (1) y est totalement continue.

On a, en particulier, les théorémes suivants:

Espace (C). *Pour que l'opération* (1) *soit totalement continue dans* (C), *il suffit d'admettre que l'on a pour tout* s_0:

$$\lim_{s\to s_0}\int_0^1 |K(s_0,t)-K(s,t)|\,dt=0. \tag{3}$$

En effet, pour tout $\varepsilon>0$ on déduit facilement de (3) l'existence d'un $\eta>0$ tel que $|s_1-s_2|\leqslant\eta$ entraîne $\int_0^1 |K(s_1,t)-$ $-K(s_2,t)|\,dt\leqslant\varepsilon$, ce qui implique, comme auparavant, la continuité totale de l'opération (1) dans (C).

La condition (3) sera remplie p. ex., lorsque $K(s,t)$ est une fonction bornée et telle que l'on a $\lim\limits_{s\to s_0} K(s,t)=K(s_0,t)$ pour tout s_0 et pour presque tout t.

Notons enfin que l'opération

$$y(s)=\int_0^s K(s,t)\,x(t)\,dt$$

est aussi totalement continue dans (C), si la condition (3) est remplie.

Espaces $(L^{(p)})$. $K(s,t)$ *étant une fonction mesurable pour* $0\leqslant s\leqslant 1$ *et* $0\leqslant t\leqslant 1$ *et* r *désignant l'inférieur des nombres* p *et* $\frac{q}{q-1}$ *où* $p>1$ *et* $q>1$, *si l'on a*

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,ds\,dt<\infty, \tag{4}$$

l'opération (1) *est totalement continue dans* $(L^{(p)})$ *et son contredomaine est situé dans* $(L^{(q)})$.

En effet, $\{K_n(s, t)\}$ étant une suite de fonctions continues, soit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_n(s, t) - K(s, t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt = 0. \tag{5}$$

L'opération $y = U_n(x) = \int_0^1 K_n(s, t)\, x(t)\, dt$ étant totalement continue pour $x \subset (L^{(p)})$ et $y \subset (L^{(q)})$, on a $\| U_n(x) - U(x)\|^q \leqslant \int_0^1 \Big|\int_0^1 (K_n - K)\, x(t)\, dt\Big|^q ds \leqslant \Big\{\int_0^1 ds \Big[\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\Big]^{\frac{q(r-1)}{r}}\Big\} \cdot \Big(\int_0^1 |x(t)|^r dt\Big)^{\frac{q}{r}}$.

Or, comme $r \leqslant p$, on a $\Big(\int_0^1 |x(t)|^r dt\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \Big(\int_0^1 |x(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$ et comme $r \leqslant \frac{q}{q-1}$, c. à d. $\frac{q(r-1)}{r} \leqslant 1$, on a $\|U_n(x) - U(x)\| \leqslant \Big\{\int_0^1\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds\Big\}^{\frac{r-1}{r}} \cdot \|x\|$, donc $\|U_n - U\| \leqslant \Big[\int_0^1\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds\Big]^{\frac{r-1}{r}}$, d'où, selon (5), $\lim\limits_{n\to\infty} \|U_n - U\| = 0$, ce qui implique en vertu du th. 2, p. 96, la continuité totale de U, c. à d. de l'opération (1), où $u(s) = U(x) \subset (L^{(q)})$.

Remarque. En particulier, pour $p = q = 2$ la condition $\int_0^1\int_0^1 K^2(s, t)\, ds\, dt < +\infty$ entraîne donc la continuité totale de l'opération (1) pour $x \subset (L^{(2)})$ et $u(s) \subset (L^{(2)})$.

§ 3. *Opérations conjuguées (associées).*

Soient, comme d'habitude, E et E_1 deux espaces du type (B) et $y = U(x)$ une opération linéaire définie dans E et dont le contredomaine est contenu dans E_1.

Convenons de désigner par X et Y des fonctionnelles linéaires définies respectivement dans E et E_1.

Considérons l'expression $Y[U(x)]$ où Y est une fonctionnelle quelconque définie dans E_1. Cette expression peut être regardée évidemment comme une fonctionnelle définie dans E. Posons notamment

$$(6) \qquad X(x) = Y[U(x)].$$

Ainsi définie, la fonctionnelle X est additive et continue, car on a $|X(x)| \leqslant |Y[U(x)]| \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|$, d'où

$$(7) \qquad |X| \leqslant |Y| \cdot |U|.$$

Or, la relation (6) entre X et Y constitue une nouvelle opération

$$X = \overline{U}(Y),$$

dont le domaine est l'espace $\overline{E}_1$ des fonctionnelles linéaires définies dans E et dont le contredomaine est situé dans l'espace $\overline{E}$ de celles définies dans E.

L'opération $\overline{U}(Y)$ s'appelle *associée* à $U(x)$ (ou *conjuguée* avec $U(x)$). En vertu de (7), elle est additive et continue.

Théorème 3. *$\overline{U}(Y)$ étant une opération associée à l'opération linéaire $U(x)$, on a $|\overline{U}| = |U|$.*

Démonstration. On a d'une part pour tout $x \subset E$: $|Y[U(x)]| \leqslant \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|$, d'où $|\overline{U}(Y)| = |Y(U)| \leqslant |Y| \cdot |U|$ et par conséquent

$$(8) \qquad |\overline{U}| \leqslant |U|.$$

D'autre part, étant donné un $x_0 \subset E$ arbitraire, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle linéaire Y_0 définie dans E_1 et telle que l'on a $|Y_0| = 1$ et $|Y_0[U(x_0)]| = |U(x_0)|$, donc $|U(x_0)| = |Y_0[U(x_0)]| \leqslant |\overline{U}| \cdot |Y_0| \cdot |x_0| = |\overline{U}| \cdot |x_0|$, d'où $|U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| \cdot |x_0|$ et par conséquent

$$(9) \qquad |U| \leqslant |\overline{U}|.$$

Les inégalités (8) et (9) donnent l'égalité, q. f. d.

Théorème 4. *Si l'opération linéaire $U(x)$ est totalement continue, il en est de même de l'opération associée $\overline{U}(Y)$:* en d'autres termes, si $|Y_n| < M$, il existe une suite $\{Y_{n_i}\}$ et une fonctionnelle X telles que

$$\lim_{i\to\infty} |\overline{U}(Y_{n_i}) - X| = 0. \tag{10}$$

Démonstration. Le contredomaine $G \subset E_1$ de l'opération $U(x)$ contenant en vertu du th. 1, p. 96, un ensemble dénombrable dense, on peut selon le th. 3 (Chap. V, § 1), p. 79, extraire de la suite des fonctionnelles $\{Y_n\}$ où $|Y_n| < M$ une suite partielle $\{Y_{n_i}\}$ convergente pour tout $y \subset G$. Posons donc $\lim_{i\to\infty} Y_{n_i}[U(x)] = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x)$ et soit x_i un élément de E tel que l'on ait

$$|x_i| = 1 \quad et \quad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}|X - X_{n_i}|. \tag{11}$$

Or, si le théorème n'était pas vrai, c. à d. s'il existait un nombre $\eta > 0$ tel que $|X - X_{n_i}| > \eta$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, on aurait d'après (11), en posant pour abréger $Y_i' = Y_{n_i}$:

$$|Y_i'[U(x_i)] - \lim_{j\to\infty} Y_j'[U(x_i)]| \geqslant \frac{\eta}{2} \tag{12}$$

et (comme $|x_i| = 1$) il existerait une suite d'indices $\{k_i\}$ telle que $\lim_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. On trouverait donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, un N naturel tel que l'on ait pour tout $i > N$ les inégalités $|y_0 - U(x_{k_i})| < \varepsilon$ et $|Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| < \varepsilon$, d'où $|Y'_{k_i}[U(x_{k_i})] - \lim_{i\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i})]| \leqslant \leqslant |Y'_{k_i}[U(x_{k_i}) - y_0]| + |Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| + |\lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i}) - y_0]| \leqslant \leqslant M\cdot\varepsilon + \varepsilon + M\cdot\varepsilon$, ce qui est impossible en vertu de (12), le nombre ε étant aussi petit que l'on veut.

§ 4. *Applications. Exemples des opérations conjuguées dans quelques espaces particuliers.*

Espace (C). Si $K(s, t)$ est une fonction continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'expression

$$U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est une opération continue.

Soit $Y(y)$ où $y \subset (C)$ une fonctionnelle linéaire quelconque. Comme définie dans (C), elle est donc (cf. Chap. IV, § 4, p. 61) de la forme $Y(y) = \int_0^1 y(t)\, d\, Y(t)$, où $Y(t)$ est une fonction à variation bornée. La fonctionnelle $X(x) = Y[U(x)]$ est également linéaire dans (C), donc encore de la forme

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, X(t), \tag{13}$$

où $X(t)$ est aussi une fonction à variation bornée (et nous pouvons admettre que $X(0) = 0$). En posant par conséquent

$$y(s) = U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{14}$$

on a pour toute fonction $x(t) \subset (C)$:

$$\int_0^1 x(s)\, d\, X(s) = \int_0^1 y(s)\, d\, Y(s). \tag{15}$$

Considérons la fonction

$$x_{v,n}(s) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant v \\ 0 & \textit{pour} \quad v + \frac{1}{n} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

et qui soit linéaire pour $v \leqslant s \leqslant v + \frac{1}{n}$. Par substitution de $x_{v,n}(s)$ au lieu de $x(s)$ dans (14) et (15) on obtient $\int_0^1 x_{v,n}(s)\, dX(s) =$
$= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(s, t)\, x_{v,n}(t)\, dt\right] d\, Y(s) = \int_0^1 x_{v,n}(t) \left[\int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s)\right] dt$ [1]), d'où,

---

[1]) en vertu du théorème suivant sur la „commutativité de l'intégration" pour les intégrales multiples de Stieltjes d'une fonction continue:

par le passage à la limite avec $n \to \infty$, on a pour $s = 0,1$ et pour tout point s où la fonction $X(s)$ est continue, donc dans tout point de [0, 1], sauf tout au plus une infinité dénombrable de points,

$$X(s) = \int_0^s \left[\int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s) \right] dt; \tag{16}$$

or, la valeur de l'intégrale de Stieltjes (13) restant la même, lorsqu'on modifie la valeur de la fonction $X(t)$ dans une infinité dénombrable de points (excepté 0 et 1), on peut admettre que la fonction $X(s)$ est définie par la formule (16) dans [0, 1] tout entier, donc qu'elle est continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$.

L'expression (16) peut être considérée par conséquent comme représentation de l'opération associée $\overline{U}(Y) = X$. Il faut l'entendre dans ce sens que, $Y(s)$ étant une fonction à variation bornée qui représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 y(s)\, d\, Y(s)$, la fonction correspondante $X(s)$ à variation bornée représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 x(t)\, d\, X(t)$.

Etant donnée une fonction $F(s, t)$ *continue dans le carré* $K = [0, 1;\ 0, 1]$ *et deux fonctions* $g(t)$ *et* $h(t)$ *à variation bornée dans* [0, 1], *on a* $\iint_K F(s, t)\ dg(s)\ dh(t) =$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s, t)\, dg(s) \right] dh(t) = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s, t)\, dh(t) \right] dh(s).$$

La première de ces trois intégrales (l'intégrale double) est à entendre comme la limite des sommes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(s_i', t_j') [g(s_{i+1}) - g(s_i)]\, [h(t_{j+1}) - h(t_j)]$$

(où $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots < s_{m+1} = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < \ldots < t_{n+1} = 1$, les points $s_i' \subset [s_i, s_{i+1}]$ et $t_j' \subset [t_j, t_{j+1}]$ étant arbitraires), lorsque la longueur des plus grands des segments $[s_i, s_{i+1}]$ et $[t_j, t_{j+1}]$ tend vers 0.

La démonstration du théorème en question coïncide avec celle du théorème analogue pour les intégrales de Riemann.

Pour l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

(avec la même fonction $K(s, t)$) on a

$$\bar{U}(Y) = Y(t) - \int_0^t dt \int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s) = X(t).$$

Espaces $(L^{(p)})$. Si $K(s, t)$ est une fonction mesurable pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ et si l'on a

(17) $$\int_0^1 \int_0^1 | K(s, t)\, x(t)\, Y(s) | < \infty$$

pour tout couple $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $Y(s) \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ où $p > 1$ et $q > 1$, l'opération

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est linéaire pour $x \subset L^{(p)})$ et $y \subset (L^{(q)})$.

La fonctionnelle linéaire Y dans l'espace $(L^{(q)})$ est de la forme

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds,$$

où $Y(s)$ est une fonction appartenant à $(L^{\frac{q}{q-1}})$ et on a

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, ds \cdot \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, dt \cdot \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds.$$

En posant

(18) $$X(t) = \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds,$$

on a

$$\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds = \int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt.$$

L'expression (18) peut être considérée comme représentation de l'opération associée $\overline{U}(Y) = X$.

Dans le cas particulier où $p = q > 1$, l'opération associée à l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est de la forme

$$X = \overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds.$$

Espace (L). Les considérations qui précèdent s'appliquent également à l'espace (L). Si l'on a la formule (17) pour $x \subset (L)$ et $Y \subset (M)$, l'expression

$$y = U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est une opération linéaire pour $x \subset (L)$ et $y \subset (L)$.

L'opération associée est de la forme

$$X = \overline{U}(Y) = \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds$$

où $Y(s) \subset (M)$ représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds$ pour $y(s) \subset (L)$, tandis que $X(t) \subset (M)$ représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt$ pour $x(t) \subset (L)$.

Pour un couple correspondant X, Y et x, y on a

$$\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds.$$