CHAPITRE V.

Espaces du type *(B)*.

§ 1. *Opérations linéaires dans les espaces du type* (*B*).

Nous allons établir ici quelques théorèmes généraux sur les espaces E du type (B) [1]), dans lesquels leur propriété qu'ils sont non seulement normés, mais aussi *complets*, intervient d'une façon essentielle.

Théorème 1. *$F(x)$ étant une opération mesurable (B) et $U(x)$ une opération additive, définies toutes les deux dans E et telles que $|F(x)| \geqslant |U(x)|$ pour tout $x \subset E$, l'opération $U(x)$ est linéaire.*

Démonstration. Il existe en vertu du th. 4 de l'Introduction p. 17, un ensemble $H \subset E$ de I-e catégorie tel que l'opération $F(x)$ est continue dans $E-H$. Il existe par conséquent pour $x_0 \subset E-H$ un $r>0$ et un $M>0$ tels que

$$(1)\quad |x-x_0| \leqslant r \text{ entraîne } |U(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant M \text{ pour tout } x \subset E-H.$$

L'ensemble des points $x \subset E-H$ tels que $|x-x_0| \leqslant \frac{r}{2}$ étant de II-e catégorie, il en est à plus forte raison de même de l'ensemble G de tous les points de la forme $x'+x$ où $|x'| < \frac{r}{2}$, $x \subset E-H$ et $|x-x_0| \leqslant \frac{r}{2}$. Il existe donc dans G un élément $x'+x_1 \subset E-H$ où $x_1 \subset E-H$. Comme $|x_1-x_0| \leqslant \frac{r}{2}$, on a

---

[1]) voir la définition de ces espaces Chap. IV, p. 53.

$|x'+x_1-x_0|\leqslant r$, d'où, selon (1), $|U(x')|\leqslant|U(x'+x_1)|+|U(x)\leqslant$ $\leqslant 2M$. La norme de $U(x)$ est par conséquent bornée dans la sphère $|x|\leqslant\frac{r}{2}$, donc, évidemment dans toute sphère. Il en résulte en vertu du th. 1 (Chap. IV, § 2), p. 54, que l'opération $U(x)$ est continue.

Théorème 2. *Si, pour une opération additive $U(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entraîne $\varliminf\limits_{n\to\infty}|U(x_n)|\geqslant|U(x)|$ pour tout $x\subset E$, l'opération $U(x)$ est linéaire* [1]).

Démonstration. L'ensemble G_n de tous les $x\subset E$ tels que $|U(x)|\leqslant n$ est pour tout $n=1,2,\ldots$ fermé et comme $E=\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, un au moins des ensembles G_n contient une sphère dans laquelle la norme de $U(x)$ est bornée, d'où, comme dans le th. précédent, la continuité de l'opération $U(x)$.

Théorème 3. *Si une suite d'opérations linéaires $\{U_n(x)\}$ définies dans l'espace E est convergente dans un ensemble G qui est dense dans une sphère K et si la suite des normes $\{|U_n|\}$ est bornée, la suite des opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente dans l'espace E tout entier* [2]).

Démonstration. Etant donné un $x_0\subset K$, il existe par hypothèse une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n\subset G$ pour $n=1,2,\ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

Or, on a pour trois nombres n, p et q quelconques:

$$|U_p(x_0)-U_q(x_0)|\leqslant|U_p(x_0-x_n)|+|U_q(x_n-x_0)|+|U_p(x_n)-U_q(x_n)|,$$

donc

$$\varlimsup_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}|U_p(x_0)-U_q(x_0)|\leqslant 2M|x_0-x_n| \quad \text{où } M=\varlimsup_{n\to\infty}|U_p|,$$

---

[1]) Cf. S. Banach. l. c., Fund. Math. III (1922), p. 153, th. 3.

[2]) Cf. S. Banach et H. Steinhaus, l. c., Fund. Math. IX (1927), p. 53.

d'où, comme $\lim_{n\to\infty} |x_0 - x_n| = 0$, on a $\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| = 0$, ce qui implique la convergence de la suite $U_n(x_0)$.

Etant donné à présent un élément arbitraire $x \subset E$ et x'_0 désignant en particulier le centre de la sphère K, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $x'_0 + \varepsilon x \subset K$, donc que la suite $U_n(x'_0 + \varepsilon x)$ est convergente. La convergence de $U_n(x)$ en résulte en vertu de celle de $U_n(x'_0)$ et de $U_n(x'_0 + \varepsilon x)$.

Théorème 4. *Etant donnée une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires définies dans E, l'ensemble H de tous les $x \subset E$ pour lesquels $\overline{\lim}_{n\to\infty} |U_n(x)| < \infty$ est soit de I-e catégorie, soit identique à E*[1]).

La démonstration résulte du th. 1 (Chap. III, § 1), p. 36, vu que H est un ensemble linéaire et mesurable (B).

Théorème 5. *Etant donnée dans E une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires telles que $\overline{\lim}_{n\to\infty} |U_n(x)| < \infty$ pour tout $x \subset E$, la suite des normes $\{|U_n|\}$ est bornée*[2]).

Démonstration. En vertu du th. 11 de l'Introduction, p. 19, il existe une sphère $K \subset E$ et un nombre N tels que l'on a $|U_n(x)| \leqslant N$ pour tout $x \subset K$ et $n = 1, 2, \ldots$ En désignant par r le rayon de la sphère K, on en tire facilement $|U_n| \leqslant \frac{2N}{r}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Théorème 6. *Etant donnée une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E telle que l'on a $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f(x_n)| < \infty$ pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E, la suite des normes $\{|x_n|\}$ est bornée.*

Démonstration. L'ensemble $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E constitue, en y conservant la définition de la norme adoptée pour ces fonctionnelles, un espace du type (B). Définissons dans $\overline{E}$ une suite de fonctionnelles $\{F_n\}$, en posant $F_n(f) = f(x_n)$ pour tout $f \subset \overline{E}$. L'hypothèse $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f(x_n)| < \infty$

---

[1]) ibidem, p. 55.
[2]) ibidem, p. 57.

entraîne par conséquent $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |F_n(f)| < \infty$ pour tout $f \subset \bar{E}$. En vertu du th. 5, qui précède, il existe donc un nombre N tel que $|F_n(f)| \leqslant N \cdot |f|$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ D'autre part comme $x_n \subset E$, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle linéaire $f_n(x)$ définie dans E et telle que l'on a $|f_n(x_n)| = |x_n|$ et $|f_n| = 1$. On a donc $|x_n| = |f_n(x_n| = |F_n(f_n)| \leqslant N \cdot |f_n| = N$, quel que soit n, c. q. f. d.

§ 2. *Principe de condensation des singularités.*

Théorème 7. *Etant donnée dans E une suite double d'opérations linéaires $\{U_{pq}(x)\}$ telles que*

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}| = \infty \text{ pour tout } p = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

il existe un ensemble $G \subset E$ (indépendant de p) de II-e catégorie dans E et tel que l'on a pour tout $x \subset G$:

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| = \infty \text{ pour tout } p = 1, 2, \ldots \tag{3}$$ [1].

Démonstration. L'ensemlbe H_p de tous les élements $x \subset E$ tels que $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| < \infty$ ne peut coïncider avec E, car en vertu du th. 5, p. 80, l'hypothèse (2) se trouverait contredite. Il en résulte en vertu du th. 4, p. 80, que H_p, et par suite l'ensemble $H = \sum\limits_{p=1}^{\infty} H_p$ de tous les éléments $x \subset E$ pour lesquels la condition (3) *est en défaut*, est de I-e catégorie dans E. Il ne reste donc qu'à poser $G = E - H$.

Remarque. Les contredomaines E_p des suites $\{U_{pq}\}$ peuvent varier avec $p = 1, 2, \ldots$, tandis que pour tout p donné ils doivent évidemment être supposés identiques pour toutes les valeurs de q, puisqu'on fait intervenir dans l'énoncé du th. 7 la notion de convergence des suites $\{U_{pq}(x)\}$ avec q tendant vers ∞.

---

[1]) ibidem, p. 54, th. I.

Le th. 7 qui précède constitue, avec le th. 6 (Chap. I, § 4), p. 24, au point de vue fonctionnel ce qu'on appelle le *principe de condensation des singularités*. Nous allons l'expliquer sur des exemples [1]).

Soit $\{g_k(t)\}$ une suite orthogonale et normée de fonctions à carré sommable dans [0,1]. Etant donnée une fonction quelconque $x(t)$ intégrable dans [0,1], la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

s'appelle *le développement de la fonction* $x(t)$ *suivant la suite* $\{g_k(t)\}$ (pourvu, bien entendu, que les intégrales $\int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$ existent pour tout $k = 1, 2, \ldots$).

On a les théorèmes suivants p. ex. dans les espaces (C) et (L):

Dans (C). *Etant donnée une suite* $\{t_p\}$ *de points de* [0,1], *l'existence pour tout* $p = 1, 2, \ldots$ *d'une fonction continue* $x_p(t)$ *dont le développement dans le point* t_p *est divergent, resp. non borné, entraîne l'existence d'une fonction continue* $x(t)$ *dont le développement est divergent, resp. non borné, dans tout point* t_p *où* $p = 1, 2, \ldots$

La démonstration résulte du th. 7, p. 81, et du th. 6 (Chap. I, § 4), p. 24, si l'on pose

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t_p) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds,$$

en regardant $U_{pq}(x)$ comme des fonctionnelles linéaires dans (C).

Dans (L). *Etant donnée une suite d'intervalles* $\{[\alpha_p, \beta_p]\}$ *situés sur* [0,1], *l'existence pour tout* $p = 1, 2, \ldots$ *d'une fonction intégrable* $x_p(t)$ *dont le développement jouit de la propriété*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} |s_n(t)|\, dt = \infty \quad \text{où} \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x_p(t)\, dt$$

---

[1]) cf. ibidem, p. 56—61.

entraîne l'existence d'une fonction intégrable $x(t)$ dont le développement jouit de la même propriété dans tous les intervalles $[\alpha_p, \beta_p]$ à la fois.

La démonstration résulte du th. 7, p. 81, en posant

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x(t)\, dt \quad pour \quad \alpha_p \leqslant t \leqslant \beta_p$$

et en regardant $U_{pq}(x)$ comme des opérations linéaires définies dans l'espace des fonctions intégrables dans [0,1] et dont les contredomaines sont situés respectivement dans les espaces des fonctions intégrables dans $[\alpha_p, \beta_p]$.

Remarque. En particulier, si les points à coordonnées α_p, β_p forment un ensemble dense dans le carré [0,1; 0,1], la propriété en question de $x(t)$ se présente dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$ de [0,1].

En s'appuyant sur cette remarque, on peut démontrer pour les séries de Fourier *l'existence d'une fonction intégrable $x(t)$ telle que l'on ait* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_\alpha^\beta s_n(t)\, dt \right| = \infty$ *dans tout intervalle* $[\alpha, \beta] \subset [0,2\pi]$.

§ 3. *Espaces du type (B) compacts.*

Lemme. *Etant donné un ensemble linéaire fermé G qui est un vrai sous-ensemble d'un ensemble linéaire $D \subset E$, il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $x_0 \subset D$ tel que l'on a*

$$|x_0| = 1 \quad et \quad |x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon \quad pour\ tout\ x \subset G.$$

Démonstration. Soient: $x' \subset D - G$, d la distance de x' à G et η un nombre positif arbitraire. Il existe donc un $y' \subset G$ tel que $d \leqslant |x' - y'| \leqslant d + \eta$. Posons $x_0 = \dfrac{x' - y'}{|x' - y'|}$. Pour tout $x \subset G$ on a alors $|x_0 - x| = \dfrac{1}{|x' - y'|} \cdot |x' - y' - |x' - y'| \cdot x|$ et comme

les relations $x \subset G$ et $y' \subset G$ entraînent $y' + |x' - y'| \cdot x \subset G$, on en obtient $|x_0 - x| \geqslant \frac{1}{|x' - y'|} \cdot d \geqslant \frac{d}{d + \eta}$, d'où, en posant $\eta = d \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$, il vient $|x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon$.

Evidemment, on a aussi $|x_0| = \frac{|x' - y'|}{|x' - y'|} = 1$ et $x_0 \subset D$, car $x' \subset D$ et $y' \subset G \subset D$.

Théorème 8. *Si tout ensemble d'éléments de E dont les normes constituent un ensemble borné est compact, il existe dans E une suite finie d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tels que tout $x \subset E$ est de la forme*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r, \tag{4}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sont des nombres (qui dépendent de x).

Démonstration. Soient: x_1 un élément arbitraire de E tel que $|x_1| = 1$ et x_{r+1}, où $r > 1$, un élément arbitraire de E tel que

$$|x_{r+1}| = 1 \quad \textit{et} \quad |x_{r+1} - x_i| \geqslant \frac{1}{2} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Désignons pour tout $r \geqslant 1$ par G_r l'ensemble de tous les éléments $x \subset E$ qui sont de la forme (4) et posons $D = E$. En supposant que le théorème n'est pas vrai, on aurait donc toujours $G_r \subset D$ et $G_r \neq D$, d'où, selon le lemme qui précède (avec $G = G_r$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $x_0 = x_{r+1}$), l'existence pour tout r naturel d'un $x_{r+1} \subset E$ assujetti à (5), c. à d. d'une suite infinie $\{x_r\}$ telle que $|x_r| = 1$ et $|x_p - x_q| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $p \neq q$.

Cette suite ne contiendrait par conséquent aucune suite convergente; elle constituerait donc un ensemble non compact, bien que l'ensemble correspondant des normes soit borné. On serait ainsi en contradiction avec l'hypothèse du théorème.

§ 4. *Une propriété des espaces $(L^{(r)})$, (c) et $(l^{(r)})$.*

Par l'application du th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, à la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces, on obtient les théorèmes suivants:

Pour $(L^{(r)})$ *où* $r \geqslant 1$. *Si* $\alpha(t)$ *où* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *est une fonction mesurable et s'il existe pour toute fonction* $x(t) \subset (L^{(r)})$ *l'intégrale* $\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$, *alors* $\int_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$ *pour* $r > 1$ *et* $\alpha(t)$ *est une fonction bornée pour* $r = 1$ [1]).

Démonstration. Posons pour n naturels

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \textit{pour} \quad |\alpha(t)| \leqslant n \\ n \operatorname{sign} \alpha(t) & \textit{pour} \quad |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Nous avons alors $|x(t)\,\alpha(t)| \geqslant |x(t)\,\alpha_n(t)|$, donc, comme $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt.$$

L'expression $\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une fonctionnelle linéaire dans $(L^{(r)})$ (car $\alpha_n(t)$ est une fonction bornée), $\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ est en vertu du th. 4, p. 23, également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent, en vertu du théorème sur la forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces $(L^{(r)})$ où $r > 1$ (voir p. 64), une fonction $\bar{\alpha}(t) \subset (L^{\left(\frac{r}{r-1}\right)})$ telle que $\int_0^1 x(t)\,\bar{\alpha}(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ pour tout $x(t) \subset (L^{(r)})$. En posant donc

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 & \textit{pour} \quad t_0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

on a $\int_0^{t_0} \bar{\alpha}(t)\,dt = \int_0^{t_0} \alpha(t)\,dt$ pour tout $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$, d'où *presque partout* $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$.

---

[1]) Pour $r > 1$ ce théorème est dû à M. F. Riesz.

On procède d'une façon analogue pour $r = 1$.

Pour (c). *Si pour toute suite convergente* $x = \{\xi_i\}$ *la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *est convergente, on a* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$.

Démonstration. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) et comme $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, on conclut du th. 4, p. 23, que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ est également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent un $M > 0$ tel que $\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i\right| \leqslant M \cdot \|x\| = M \cdot \operatorname{borne\,sup}_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i|$.

En posant donc

$$\xi_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_i & \textit{pour} \quad i \leqslant n \quad \textit{et} \quad \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \textit{pour} \quad i > n \quad \textit{ou} \quad \alpha_i = 0, \end{cases}$$

on obtient $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant M$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, d'où $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant M$.

Pour $(l^{(r)})$ *où* $r \geqslant 1$. *Si la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *est convergente pour toute suite* $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$, *alors* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$ *pour* $r > 1$ *et la suite* $\{\alpha_i\}$ *est bornée pour* $r = 1$ [1].

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

§ 5. *Espaces du type (B) formés de fonctions mesurables.*

Nous allons nous arrêter un peu sur quelques propriétés des espaces du type (B) assujettis à des conditions plus spéciales. Admettons à ce but que E soit l'espace des fonctions mesurables définies dans l'intervalle fermé $[0,1]$ et telles qu'on ait pour tout $x_n = x_n(t) \subset E$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$:

1. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ *entraîne* $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = 0$;

---

[1]) Ce dernier théorème a été trouvé par M. E. Landau *(Über einen Konvergenzsatz,* Göttinger Nachr. 1907, p. 25—27).

2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ *entraîne l'existence dans E d'une suite partielle $\{x_{n_i}(t)\}$ et d'un x tels que l'on ait $|x_{n_i}(t)| \leqslant |x(t)|$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et pour presque tout $0 \leqslant t \leqslant 1$* ($|\ |$ désignant ici la valeur absolue);

3. $\lim_{n\to\infty}$ as $x_n(t) = x(t)$ *entraîne* $\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$.

Tels sont, en particulier, *les espaces* (M), (C) *et* $(L^{(r)})$, envisagés à plusieurs reprises (v. pages 10—12, 59—64 et 72—76); s'il s'agit de réaliser la condition 2., on n'a qu'à définir pour $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n_i}\| < \infty$ la fonction $x(t)$ par l'égalité $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_i}(t)|$.

Théorème 9. *Soient E et E_1 deux espaces du type (B) assujettis aux conditions* 1., 2. *et* 3. *et $K(s, t)$ une fonction définie dans le carré* [0,1; 0,1]. *Si l'intégrale*

$$u(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{6}$$

existe pour tout $x \subset E$ et pour presque toute valeur de s et si $u(s) \subset E_1$, elle est une opération linéaire [1]).

Démonstration. Posons

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \tag{7}$$

et désignons par $\{\overline{x_n}\}$ une suite quelconque extraite de $\{x_n\}$. En vertu de (7) et de la condition 2., il existe dans E une suite partielle $\{\overline{x_{n_i}} - x\}$ et un $z \subset E$ tels que l'on a pour tout $i = 1, 2, \ldots$ presque partout $|\overline{x_{n_i}}(t) - x(t)| \leqslant z(t)$. Evidemment $\lim_{i\to\infty}$ as $K(s, t) \cdot [\overline{x_{n_i}}(t) - x(t)] = 0$, et $|K(s, t) \cdot (\overline{x_{n_i}} - x)| \leqslant |K(s, t)| \cdot z(t)$. De plus l'intégrale $\int_0^1 K(s, t)\, z(t)\, dt$ existe dans un ensemble H de mesu-

---

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Fund. Math. III (1922), p. 166, th. 2.

re 1, car $z \subset E$. On a donc $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 K(s,t)\,[\overline{x}_{n_i}(t) - x(t)]\,dt = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 K(s,t)\,\overline{x}_{n_i}(t)\,dt = \int\limits_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt$ pour $s \subset H$.

Or, toute suite extraite de $\{u_n(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)\,x_n(t)\,dt\}$ contenant une suite partielle qui converge presque partout vers $u(s)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \text{as}\, u_n(s) = u(s)$, ce qui implique selon 3. et le th. 2, p. 79, que l'opération (6) est linéaire.

§ **6.** *Exemples des opérations linéaires dans quelques espaces particuliers du type* (*B*).

Nous donnons ici quelques applications du th. 9, qui vient d'être établi, aux espaces (*M*), (*C*) et ($L^{(r)}$).

Espace (*M*). Si $K(s,t)$ où $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ est une fonction mesurable et si pour tout s on a $\int\limits_0^1 |K(s,t)|\,dt < N < \infty$, l'expression

$$U(x) = \int\limits_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt \tag{8}$$

est une opération linéaire définie dans (*M*) et dont le contredomaine est situé dans (*M*).

Espace (*C*). Si la fonction $K(s,t)$ est continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'expression (8) est une opération linéaire définie dans l'espace (*C*), son contredomaine étant aussi situé dans (*C*).

Espace (*L*). Si $K(s,t)$ est une fonction mesurable dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que $\int\limits_0^1 C(s)\,ds < N < \infty$ où $C(s) = \text{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |K(s,t)|$, l'expression (8) est une opération linéaire de domaine (*L*) et de contredomaine $\subset (L)$.

Espaces $(L^{(p)})$. $K(s,t)$ étant une fonction mesurable dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que pour tout couple de fonctions $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $y(s) \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ où $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < \infty, \tag{9}$$

l'expression (8) est une opération linéaire définie dans $(L^{(p)})$ et dont le contredomaine est situé dans $(L^{(q)})$.

En effet, étant donné un $x \subset (L^{(p)})$ quelconque, on a pour tout $y \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$:

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt = \int_0^1 y(s) \left[\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \right] ds,$$

d'où (cf. p. 85) $\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \subset (L^{(q)})$ et par conséquent, selon (8), $U(x)$ est une opération linéaire.

Pour que la condition (9) se trouve vérifiée, il suffit d'admettre que $\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\, ds\, dt < \infty$, où r est le plus petit des nombres p et $\frac{q}{q-1}$ (en particulier, que la fonction $K(s,t)$ et bornée, lorsque $r = 1$, et intégrable, lorsque $p = q = +\infty$).

On a, en effet, en vertu de l'inégalité de Riesz:

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt \right| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\, ds\, dt \right\}^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left\{ \int_0^1 |x(s)|^r\, ds \right\}^{\frac{1}{r}} \cdot$$

$\cdot \left\{ \int_0^1 |y(t)|^r\, dt \right\}^{\frac{1}{r}}$. En particulier, pour $p = q = 2$, la condition (9) peut donc être remplacée par $\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2\, ds\, dt < \infty$, ce qui implique que l'opération (8) est linéaire dans $(L^{(2)})$ et que son contredomaine est également contenu dans $(L^{(2)})$.

La même remarque s'applique aux cas où $p = q = 1$ et $p = q = \infty$.

§ 7. *Quelques théorèmes sur les méthodes de sommation.*

Etant donné un tableau infini de nombres

$$\text{(A)} \qquad \begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1k},\ \dots \\ a_{21},\ a_{22},\ \dots,\ a_{2k},\ \dots \\ a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{ik},\ \dots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{array}$$

nous dirons qu'une suite de nombres $x = \{\xi_k\}$ est *sommable* (*vers* $A(x)$) *par la méthode* A (qui correspond au tableau (A)), lorsque chacune des séries $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k$ est convergente et la suite $\{A_i(x)\}$ converge aussi (vers $A(x)$).

La méthode A est dite *permanente*, lorsque toute suite convergente est sommable par cette méthode vers sa limite. Elle s'appelle *reversible*, lorsqu'à toute suite convergente $\{\eta_i\}$ vient correspondre exactement une suite x (convergente ou non) telle que $A_i(x) = \eta_i$ pour $i = 1, 2, \dots$ Nous dirons qu'une méthode B (qui correspond au tableau $(B) = \{\{b_{ik}\}\}$) n'est *pas plus faible de* A, lorsque toute suite sommable par la méthode A l'est aussi par la méthode B.

Enfin, une méthode A porte le nom de méthode *parfaite*, lorsqu'elle est à la fois permanente, reversible et telle que les conditions

$$\text{(10)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, a_{ik} = 0 \quad \textit{pour } k = 1, 2, \dots$$

entraînent

$$\text{(11)} \qquad \alpha_i = 0 \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \dots$$

Théorème 10. *Pour qu'une méthode* A *soit permanente, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:*

1^0 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

2^0 $\lim_{i\to\infty} a_{ik} = 0$ *pour tout* $k = 1, 2, \ldots$

3^0 $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$ [1]).

Démonstration. Nécessité. La convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k$ pour toute suite convergente $x = \{\xi_k\}$ et pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots$ entraîne (cf. p. 86, pour (c)) la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$. Les fonctionnelles $A_i(x)$, définies dans l'espace (c), sont par conséquent linéaires et comme elles forment une suite convergente, on en conclut d'après le th. 5, p. 80, que la condition 1^0 est remplie.

Soient d'autre part: $\xi_i^0 = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots$, $\xi_i^n = 0$ pour $i \neq n$ et $\xi_n^n = 1$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ Posons $x_n = \{\xi_i^n\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On a $A_i(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ et $A_i(x_n) = a_{in}$ pour i et n naturels, donc $A(x_0) = 1$ et $A(x_n) = 0$ pour $n > 0$, de sorte que les conditions 2^0 et 3^0 sont également remplies.

Suffisance des trois conditions résulte du th. 3, p. 79, et du fait que la suite $\{x_n\}$ définie tout à l'heure est dans l'espace (c) fondamentale.

Lemme 1. *Soient* A *une méthode permanente et* $y_0 = \{\eta_i^0\}$ *une suite convergente. Si pour toute suite de nombres* $\{\alpha_i\}$ *les conditions* (10) *entraînent l'égalité* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$, *il existe pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *telle que l'on a*

$$(12) \qquad |A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

---

[1]) Ce théorème est dû à O. Toeplitz. *(Über allgemeine lineare Mittelbildungen,* Prace Mat. Fiz. XXII, Varsovie (1911), p. 113—119).

Démonstration. Désignons par G l'ensemble de toutes les suites convergentes $\{\eta_i\}$ auxquelles correspondent des suites convergentes x telles que $\eta_i = A_i(x)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Considéré dans l'espace (c), l'ensemble G ainsi défini constitue évidemment un espace vectoriel. Si y_0 n'est pas un point d'accumulation de G, il existe en vertu du lemme (Chap. IV, § 3), p. 57, une fonctionnelle linéaire $F(y)$ définie dans (c) et telle que l'on a $F(y_0) = 1$ et $F(y) = 0$ pour tout $y \subset G$. Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chap. IV § 4, p. 66), il existe donc une suite de nombres $\{\alpha_i\}$ telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ est absolument convergente et que:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \quad \textit{pour } \{\eta_i\} \subset G,$$

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i^0 = 1.$$

La méthode A étant permanente, on a d'après (13)

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) + \alpha \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0 \quad \textit{pour tout } x = \{\xi_k\} \subset (c)$$

et le th. 10 qui précède entraîne l'existence d'un M satisfaisant à la condition 1° de son énoncé. On a par conséquent $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k| \leqslant$ $\leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \|x\|$, d'où

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}.$$

En posant pour un k naturel fixe $\xi_k = 1$ et $\xi_n = 0$ pour $n \neq k$, on conclut de (15) que

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots$$

En posant ensuite $\xi_k = 1$ pour $k = 1, 2, \ldots$, on tire de (15),

(16) et (17) que $\alpha_i = 0$, d'où, en vertu de (14), que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 1$, ce qui est, en raison de (17), en contradiction avec l'hypothèse.

Lemme 2. *Si la méthode* A *est permanente et les conditions* (10) *entraînent la condition* (11), *il existe pour toute suite convergente* $\{\eta_i^0\}$ *et pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *satisfaisant à la condition* (12).

La démonstration est immédiate en vertu du lemme 1, qui précède.

Lemme 3. $x_0 = \{\xi_k^0\}$ *étant une suite bornée, sommable par une méthode permanente* A, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *telle que*

$$(18) \qquad |A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. Posons

$$(19) \qquad \eta_i^0 = A_i(x_0) \quad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots$$

et désignons par $\{\alpha_i\}$ une suite quelconque assujettie aux conditions (10), p. 90.

On, a selon (19)

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0)$$

et, A étant une méthode permanente, il existe d'après le th. 10, p. 90, un nombre M satisfaisant à 1°, d'où $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k^0| \leqslant$ $\leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \operatorname{borne\,sup}_{1 \leqslant k < \infty} |\xi_k^0|$ et selon (20) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}$, donc, selon (10), $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$. Ceci établi, la thèse du lemme à démontrer résulte immédiatement du lemme 1.

Lemme 4. *Soit* x_0 *une suite sommable par une méthode* A *permanente et reversible. Si, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite* x *satisfaisant à la condition* (18), *la suite* x_0 *est sommable vers le*

même nombre par toute méthode B *permanente et pas plus faible de* A.

Démonstration. La reversibilité de A entraîne (voir Chap. III, § 6, th. 10, p. 47, et remarque p. 50) l'existence d'une suite $\{\alpha_i\}$ et d'un tableau $\{\beta_{ik}\}$ ayant les propriétés suivantes:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{ik}| < \infty \quad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

(22) *si l'on pose pour une suite convergente* $y = \{\eta_i\}$:

$$\xi_k = f_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ik}\, \eta_i + \alpha_k \lim_{i\to\infty} \eta_i \quad \textit{où} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k = \eta_i \quad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots$$

Les fonctionnelles $f_k(y)$ ainsi définies dans l'espace (c) sont linéaires. Pour toute suite convergente y la suite correspondante $x = \{\xi_k\}$ étant par hypothèse sommable par la méthode permanente B, chacune des séries $\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}\, \xi_k$ est convergente et la suite de leurs sommes $\{B_i(x)\}$ l'est également.

Posons pour tout $y \subset (c)$:

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}\, f_k(y) \quad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots \quad \textit{et} \quad F(y) = \lim_{i\to\infty} F_i(y).$$

Ainsi définies, les fonctionnelles $F_i(y)$ sont linéaires; en vertu du th. 4 (Chap. I §, 3), p. 23, il en est donc de même de la fonctionnelle $F(y)$.

Ceci établi, soient, conformément à l'hypothèse, x_0 la suite donnée et x une suite convergente satisfaisant à (18). En posant $y_0 = \{A_i(x_0)\}$ et $y = \{A_i(x)\}$, on a $y_0 \subset (c)$, $y \subset (c)$ et $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$, donc

$$|B(x) - B(x_0)| = |F(y) - F(y_0)| \leqslant |F| \cdot \varepsilon \tag{23}$$

et, comme $A(x) = B(x)$, il vient $|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |A(x_0) -$

$-A(x)+B(x)-B(x_0)$, d'où, selon (18) et (23), $|A(x_0)-B(x_0)| \leqslant$ $\leqslant |F|\cdot\varepsilon+\varepsilon$, ce qui entraîne l'égalité $A(x_0)=B(x_0)$, q. f. d.

Les lemmes 3 et 4 donnent le

Théorème 11. *Si la méthode permanente* B *n'est pas plus faible que la méthode permanente et reversible* A, *toute suite bornée sommable par* A *est aussi sommable par* B *vers le même nombre*[1]).

D'autre part les lemmes 2 et 4 donnent le

Théorème 12. *Si* A *est une méthode parfaite et* B *une méthode permanente pas plus faible de* A, *toute suite sommable par* A *est aussi sommable par* B *vers le même nombre*[2]).

---

[1]) Pour une classe spéciale de méthodes reversibles, à savoir des méthodes ainsi dites *normales*, ce théorème a été trouvé par M. S. Mazur (l. c., Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 599—611, Satz VII).

[2]) Pour les méthodes normales cf. S. Mazur, *Über eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren*, Stud. Math. II (1930), p. 40—50.