

## CHAPITRE IV.

### Espaces normés.

§ 1. *Définitions des espaces vectoriels normés et des espaces du type (B).*

Un espace vectoriel  $E$  est dit *normé* s'il existe une fonctionnelle — qui est appelée *norme* et désignée par  $|x|$  ou  $\|x\|$  — assujettie aux conditions:

- 1)  $|\theta| = 0$  et  $|x| > 0$  pour  $x \neq \theta$ ,
- 2)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,
- 3)  $|tx| = |t| \cdot |x|$  pour tout nombre  $t$ .

Si on définit la distance de deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  par la formule

$$(x, y) = |x - y|,$$

on obtient évidemment un espace métrique. S'il est, de plus, complet (voir p. 9; c. à d. dans le cas considéré que  $\lim_{q \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty} |x_p - x_q| = 0$  entraîne l'existence d'un  $x \in E$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_p - x| = 0$ ), il s'appelle *espace du type (B)*<sup>1)</sup>.

On voit aussitôt que tout espace du type (B) est en même temps du type (F), mais non réciproquement: les exemples d'es-

---

<sup>1)</sup> La classe des espaces du type (B) a été traitée d'une façon générale pour la première fois dans mon ouvrage précité de Fund. Math. III (1922), p. 133—181.

paces décrits dans l'Introduction, p. 9—12, et qui sont tous du type (F), ne sont du type (B) qu'à l'exception des espaces (s) et (S).

§ 2. *Propriétés des opérations linéaires. Extension des fonctionnelles linéaires.*

Nous allons nous occuper d'abord des espaces  $E$  normés, mais pas nécessairement complets.

**Théorème 1.** *Pour qu'une opération additive  $U(x)$  définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$  soit linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre  $M$  tel qu'on ait:*

$$(1) \quad |U(x)| \leq M \cdot |x| \text{ pour tout } x \in G.$$

*Démonstration*<sup>1)</sup>. La condition est nécessaire. En effet, à défaut d'un pareil  $M$ , il existerait une suite  $\{x_n\}$  telle que  $|U(x_n)| > M_n |x_n|$  où  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ . En posant  $Y_n = \frac{1}{M_n |x_n|} \cdot x_n$ , on aurait donc  $|Y_n| = \frac{1}{M_n}$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \Theta$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n) = \Theta$ ,

ce qui est impossible, car  $|U(Y_n)| = \frac{1}{M_n |x_n|} \cdot |U(x_n)| > 1$ .

La condition est suffisante. En effet, pour tous  $x_n$  et  $x$  de  $G$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  entraîne  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U(x_n) - U(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |U(x - x_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot |x - x_n| = 0$  et enfin  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(x_n) = U(x)$ , c. q. f. d.

Etant donnée une opération linéaire  $U(x)$  définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$ , on appelle *norme* de l'opération  $U(x)$  dans  $G$  et on désigne par  $|U|_G$  le plus petit nombre  $M$  satisfaisant à la condition (1). Si  $G = E$ , on peut l'écrire tout court  $|U|$  au lieu de  $|U|_E$ .

<sup>1)</sup> Cf. S. Banach, l. c., Fund. Math. III, p. 151—153.

On a donc  $|U(x)| \leq |U|_G \cdot |x|$  pour  $x \subset G$  et il est facile de voir que

$$|U|_G = \text{borne sup}_{x \subset G, |x| \leq 1} |U(x)|.$$

La question s'impose s'il existe pour tout espace vectoriel normé une fonctionnelle linéaire (définie dans cet espace) qui n'est pas identiquement nulle. La réponse affirmative résulte des théorèmes suivants<sup>1)</sup> dont le premier est une conséquence facile du th. 1 (Chap. II, § 2), p. 27.

**Théorème 2.** *Etant donnée une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$ , il existe une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $E$  et satisfaisant aux conditions:*

$$F(x) = f(x) \text{ pour } x \subset G \text{ et } |F| = |f|_G.$$

Pour la démonstration, il suffit de poser  $p(x) = |x| \cdot |f|_G$  dans le th. 1 du Chap. II.

**Théorème 3.** *Pour tout  $x_0 \subset E$  il existe une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $E$  et telle que*

$$F(x_0) = |x_0| \text{ et } |F| = 1.$$

Pour la démonstration, il suffit de désigner dans le th. 2, qui précède, par  $G$  l'ensemble des éléments de la forme  $hx_0$  où  $h$  est un nombre arbitraire et de poser  $F(hx_0) = h \cdot |x_0|$ .

Il en résulte, en particulier, l'existence dans tout espace vectoriel normé d'une fonctionnelle linéaire n'étant pas identiquement nulle.

**Théorème 4.** *Soit  $f(x)$  une fonctionnelle quelconque définie dans un ensemble  $G \subset E$ . Pour qu'il existe une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $E$  et satisfaisant aux conditions*

$$1^\circ \quad f(x) = F(x) \text{ pour } x \subset G,$$

<sup>1)</sup> Les théorèmes 2—6 se trouvent dans la note de M. H. Hahn, *Über lineare Gleichungen in linearen Räumen*, Journ. für reine u. angew. Math. 157 (1927), p. 214—229; cf. aussi S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires*, Stud. Math. I (1929), p. 211—216, en particulier th. 2 et remarque.

2°  $|F| \leq M$  pour un nombre donné  $M > 0$ ,  
il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i f(x_i) \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i \right|$$

pour toute suite finie  $x_1, x_2, \dots, x_r$  d'éléments de  $G$  et pour toute suite finie  $h_1, h_2, \dots, h_r$  de nombres réels <sup>1)</sup>.

*Démonstration.* La condition est nécessaire. On a en effet  $\left| F\left(\sum_{i=1}^r h_i x_i\right) \right| \leq |F| \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i \right|$ , d'où selon 2°  $\left| \sum_{i=1}^r h_i F(x_i) \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i \right|$  et comme on a selon 1°  $F(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $x_i \in G$ , il en résulte l'inégalité à démontrer.

La condition est suffisante. Soit, en effet,  $H$  l'espace vectoriel des éléments de la forme  $z = \sum_{i=1}^r h_i x_i$  où  $r$  désigne un nombre naturel,  $h_i$  des nombres quelconques et  $x_i \in G$ . Posons  $\varphi(z) = \sum_{i=1}^r h_i f(x_i)$ .

$$\text{Pour } z = \sum_{i=1}^r h_i x_i = \sum_{i=1}^s h'_i x'_i \text{ on a par hypothèse } \left| \sum_{i=1}^r h_i f(x_i) - \sum_{i=1}^s h'_i f(x'_i) \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i - \sum_{i=1}^s h'_i x'_i \right| = 0.$$

La fonctionnelle  $\varphi(z)$  est donc définie dans  $H$  d'une façon univoque et, comme on voit facilement, elle y est additive. En outre,  $|\varphi(z)| = \left| \sum_{i=1}^r h_i f(x_i) \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i \right|$  donne  $|\varphi|_H \leq M$ . L'existence dans  $E$  de la fonctionnelle  $F(x)$  à propriétés 1° et 2° s'obtient donc du th. 2, p. 55, par substitution de  $\varphi$  à  $f$  et de  $H$  à  $G$ .

En particulier, si  $G$  est une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de  $E$  et  $C_n$  désignent les valeurs correspondantes de la fonctionnelle  $f(x)$ , on a le

<sup>1)</sup> Ce théorème a été établi pour certains espaces spéciaux par F. Riesz (*Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497) et, dans une forme plus générale, par E. Helly (*Über lineare Funktionaloperationen*, Wiener Berichte 121 (1912), p. 265—297).

**Théorème 5.** *Pour qu'il existe dans  $E$  une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  assujettie aux conditions*

1°  $F(x_n) = C_n$  pour  $n = 1, 2, \dots$  et 2°  $|F| \leq M$   
 pour un nombre donné  $M > 0$ , une suite donnée  $\{x_n\}$  d'éléments de  $E$  et une suite donnée  $\{C_n\}$  de nombres réels, il faut et il suffit que l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i C_i \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i \right|$$

se présente pour toute suite finie  $h_1, h_2, \dots, h_r$  de nombres réels.

§ 3. Ensembles fondamentaux et ensembles totaux d'éléments.

Nous allons établir à présent quelques théorèmes qui jouent dans la théorie des espaces normés un rôle analogue à celui que le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes joue dans la théorie des fonctions de variable réelle.

**Lemme.** *Etant donné un espace vectoriel  $G \subset E$  et un élément  $y_0$  de  $E$  situé à la distance  $d > 0$  de  $G$ , il existe une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $E$  et satisfaisant aux conditions:*

- 1)  $F(y_0) = 1$ ,
- 2)  $F(x) = 0$  pour  $x \in G$ ,
- 3)  $|F| = \frac{1}{d}$ .

*Démonstration.* Soit  $H$  l'ensemble des  $x$  de la forme

$$(2) \quad x = x' + \alpha y_0 \text{ où } \alpha \text{ est un nombre arbitraire et } x' \in G.$$

Ainsi défini,  $H$  est évidemment un ensemble linéaire et comme  $d > 0$ , la représentation (2) de  $x$  est univoque. Nous définissons dans  $H$  la fonctionnelle additive  $f(x)$ , en posant  $f(x) = \alpha$  pour  $x$  de la forme (2). Comme  $|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| \cdot \left| \frac{1}{\alpha} x + y_0 \right| \geq |\alpha| \cdot d$ , il vient d'une part  $|f(x)| = |\alpha| \leq \frac{1}{d} |x|$ , d'où  $|f|_H \leq \frac{1}{d}$ .

D'autre part  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_0| = d$  pour  $x_n \subset G$  entraîne  $|f(x_n - y_0)| = 1 \leq \leq |x_n - y_0| \cdot |f|_H$ , d'où  $1 \leq d \cdot |f|_H$ , donc  $\frac{1}{d} \leq |f|_H$ . On a par conséquent  $|f|_H = \frac{1}{d}$ .

On en conclut en vertu du th. 2, p. 55, (en y remplaçant  $G$  par  $H$ ) qu'il existe une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $E$  et telle que  $F(x) = f(x)$  pour  $x \subset H$  et  $|F| = |f|_H = \frac{1}{d}$  (condition 3), donc, en particulier,  $F(x) = 0$  pour  $x \subset G$  (condition 2) et  $F(y_0) = 1$  (condition 1), c. q. f. d.

**Théorème 6.** *Etant donné un ensemble quelconque  $G \subset E$  et un élément arbitraire  $y_0$  de  $E$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite  $\{g_n\}$  de combinaisons linéaires<sup>1)</sup> d'éléments de  $G$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = y_0$ , est que  $f(x) = 0$  pour  $x \subset G$  entraîne  $f(y_0) = 0$ , quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $f(x)$ .*

*Démonstration.* La condition est nécessaire. En effet, l'égalité  $f(x) = 0$  pour tous les  $x \subset G$  entraîne l'égalité  $f(g_n) = 0$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , d'où  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n) = f(y_0) = 0$ .

La condition est suffisante en vertu du lemme qui précède, en y désignant par  $G$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de l'ensemble  $G$  considéré ici, c. q. f. d.

Un ensemble  $G \subset E$  s'appelle *fondamental*, lorsque l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de  $G$  est dense dans  $E$ ; il s'appelle *total*, lorsque toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  qui s'annule pour chaque  $x \subset G$ , s'annule aussi pour chaque  $x \subset E$ .

On déduit aisément du th. 6 le suivant

**Théorème 7.** *Pour qu'un ensemble  $G \subset E$  soit fondamental, il faut et il suffit qu'il soit total.*

<sup>1)</sup> voir la définition de cette notion Chap. II, § 1, p. 27.

Une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  est dite *orthogonale* à un élément  $x_0$ , lorsque  $f(x_0) = 0$ ; elle est dite *orthogonale* à  $G$ , lorsque cette égalité se présente pour tout  $x \in G$ .

Le lemme p. 57 implique *pour tout sous-ensemble  $G \neq E$  linéaire et fermé l'existence dans l'espace  $E$  d'une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle et orthogonale à  $G$ .*

§ 4. *Forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces  $(C)$ ,  $(L^r)$ ,  $(c)$ ,  $(l^r)$ ,  $(m)$  et dans les sous-espaces de  $(m)$ .*

Nous allons établir à présent la forme générale des fonctionnelles linéaires dans certains espaces normés particuliers<sup>1)</sup>.

1. *Espace  $(C)$ .* La norme définie dans l'espace  $(M)$ <sup>2)</sup> coïncidant pour les fonctions continues avec celle de l'espace  $(C)$ , on peut considérer  $(C)$  comme un espace vectoriel situé dans  $(M)$ .

Etant donnée une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans  $(C)$ , il existe en vertu du th. 2, p. 55, une fonctionnelle linéaire  $F(x)$  définie dans  $(M)$  et satisfaisant aux conditions:

$$(1) \quad F(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in (C),$$

$$(2) \quad |F|_{(M)} = |f|_{(C)}.$$

Posons:

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{pour } t < u \leq 1 \end{cases}$$

et

$$(3) \quad F(\xi_t) = g(t).$$

Nous allons montrer que  $g(t)$  est une fonction à variation bornée. Soient  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  et  $\varepsilon_i = \text{sign}[g(t_i) - g(t_{i-1})]$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . On a  $\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \varepsilon_i =$   
 $= F \left[ \sum_{i=1}^n \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i \right] \leq |F|_{(M)} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i \right\|$  et on aperçoit

<sup>1)</sup> cf. Introduction, § 7, p. 11–12, exemples 4, 5, 6, 8 et 9.

<sup>2)</sup> voir 3, p. 10.

aisément que la norme de cette somme est = 1. Il en résulte d'après (2) que

$$(4) \quad \text{variation}_{0 \leq t \leq 1} g(t) \leq |F|_{(M)} = |f|_{(C)}.$$

Ceci établi, soient  $x(t) \subset (C)$  et

$$(5) \quad z_n = z_n(u) = \sum_{r=1}^n x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left\{ \xi_{\frac{r}{n}}(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u) \right\}.$$

La fonction  $z_n(u)$  prend donc respectivement dans les intervalles  $\frac{r-1}{n} < u \leq \frac{r}{n}$  les valeurs  $x\left(\frac{r}{n}\right)$ . La fonction  $x = x(u)$  étant

continue, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - z_n\| = 0$ , d'où selon (1):

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = F(x) = f(x).$$

D'autre part, les égalités (3) et (5) donnent

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^n x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left[ g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right) \right],$$

donc, comme  $x(t) \subset (C)$  et  $g(t)$  est une fonction à variation bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t) dg, \text{ d'où en vertu de (6):}$$

$$(7) \quad f(x) = \int_0^1 x(t) dg \text{ pour tout } x(t) \subset (C).$$

Comme par conséquent  $|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t) dg \right| \leq \text{variation}_{0 \leq t \leq 1} g(t) \cdot$

$\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ , on a selon (4), en posant  $|f| = |f|_{(C)}$ :

$$\text{variation}_{0 \leq t \leq 1} g(t) = |f|.$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> qui a été démontré pour la première fois par F. Riesz (*Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. 149 (1909), p. 974-977).



Toute fonctionnelle linéaire définie dans l'espace (C) est de la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg,$$

où  $g(t)$  est une fonction indépendante de  $x(t)$  à variation  $|f|$ .

Réciproquement, étant donnée une fonction  $g(t)$  à variation bornée, la fonctionnelle  $f(x)$  définie par (7) est évidemment linéaire.

2. Espace  $(L^{(r)})$  où  $r \geq 1$ . Étant donnée une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans l'espace  $(L^{(r)})$ , posons:

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{pour } t < u \leq 1 \end{cases}$$

et

$$f(\xi_t) = g(t).$$

Nous allons montrer que  $g(t)$  est une fonction absolument continue.

En effet, soient  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  des intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre à extrémités respectives  $t_i$  et  $t'_i$  où  $t_i < t'_i$  et  $i = 1, 2, \dots, n$ . En posant  $\varepsilon_i = \text{sign}[g(t'_i) - g(t_i)]$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t'_i) - g(t_i)| &= \sum_{i=1}^n \{g(t'_i) - g(t_i)\} \varepsilon_i = \\ (8) \quad &= f\left(\sum_{i=1}^n \{\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}\} \varepsilon_i\right) \leq |f| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \{\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}\} \varepsilon_i \right\|, \end{aligned}$$

La fonction  $(\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}) \varepsilon_i$  prenant dans l'intervalle  $\delta_i$  la valeur  $\varepsilon_i = \pm 1$  et s'annulant ailleurs, il vient en vertu de l'hypothèse que les intervalles  $\delta_i$  n'empiètent pas l'un sur l'autre

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}) \varepsilon_i \right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |\delta_i|},$$

où  $|\delta_i|$  désigne la longueur de  $\delta_i$ . On a donc, d'après (8),

$\sum_{i=1}^n |g(t'_i) - g(t_i)| \leq |f| \cdot \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |\delta_i|}$ , ce qui prouve la continuité absolue de  $g(t)$ .

Ceci établi, posons  $g'(t) = \alpha(t)$ . La fonction  $\alpha(t)$  est intégrable et, comme  $\xi_0 = 0$ , on a évidemment  $f(\xi_t) = \int_0^t \alpha(u) du$ , d'où

$$(9) \quad f(\xi_t) = \int_0^{\xi_t} \alpha(u) du.$$

Soient  $c_1, c_2, \dots, c_n$  des nombres arbitraires,  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  et  $x(t) = c_i$  pour  $t_{i-1} \leq t < t_i$  et  $i = 1, 2, \dots, n$ . On a évidemment  $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot (\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})$ , d'où selon (9)

$$(10) \quad f(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt.$$

Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction „en escalier“  $\alpha(t)$ .

Si  $x = x(t)$  est à présent une fonction quelconque mesurable et bornée, il existe une suite  $\{x_n(t)\}$  de fonctions „en escalier“ bornées dans leur ensemble et tendant presque partout vers  $x(t)$ .

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^r dt = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$

et, selon (10),  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$ . Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction  $x(t)$  mesurable et bornée.

Ceci établi, considérons d'abord le cas où  $r > 1$ .

Posons:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1} \cdot \text{sign } \alpha(t) & \text{pour } |\alpha(t)|^{s-1} \leq n \\ n \cdot \text{sign } \alpha(t) & \text{pour } |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . On a  $|f(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt \right| \leq |f| \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}$

et comme  $x_n(t) \alpha(t) = |x_n(t)| \cdot |\alpha(t)| \geq |x_n(t)| \cdot |x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}}$ , on a

$$\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}} dt \leq |f| \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}, \text{ d'où, en tenant compte que}$$

$$\frac{s}{s-1} = r, \text{ on tire } \left( \int_0^1 |x_n(t)|^r dt \right)^{1-\frac{1}{r}} \leq |f|. \text{ Comme cette inégalité}$$

subsiste pour tout  $n$  naturel et comme  $|x_n(t)|^r \leq |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$  et presque partout  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$ , on obtient

$$(11) \quad \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt} \leq |f|,$$

de sorte que  $\alpha(t)$  est une fonction à  $s$ -ième puissance sommable. Par conséquent, si  $x(t)$  est une fonction mesurable arbitraire à  $r$ -ième puissance sommable, le produit  $x(t) \alpha(t)$  est évidemment une fonction intégrable.

Définissons à présent la suite  $\{x_n(t)\}$  comme il suit:

$$(12) \quad x_n = x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } |x(t)| \leq n, \\ n \operatorname{sign} x(t) & \text{pour } |x(t)| > n. \end{cases}$$

On a alors

$$(13) \quad \|x - x_n\| = \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r dt} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0,$$

de sorte que  $|\int_0^1 x(t) \alpha(t) dt - f(x_n)| = |\int_0^1 [x(t) - x_n(t)] \alpha(t) dt| \leq$

$$\leq \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r dt} \cdot \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt}, \text{ d'où, selon (13), } f(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \text{ et comme } |f(x)| = \left| \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt} \cdot \|x\|, \text{ la formule (11) donne l'égalité}$$

$$|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt}.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème <sup>1)</sup>:

Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans l'espace  $(L^r)$  où  $r > 1$  est de la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$$

où

$$\alpha(t) \in (L^s) \quad \text{et} \quad |f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt}.$$

Passons maintenant au cas où  $r = 1$ . Soient  $0 \leq u < u + h \leq 1$  et

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{pour } u \leq t \leq u + h \\ 0 & \text{pour } 0 \leq t < u \text{ et } u + h < t \leq 1. \end{cases}$$

On a, selon (10),  $|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \right| = \frac{1}{h} \left| \int_u^{u+h} \alpha(t) dt \right|$  et

comme  $|f(x)| \leq |f| \cdot \|x\| = |f| \cdot 1$ , il vient  $\left| \int_u^{u+h} \alpha(t) dt \right| \leq |f| \cdot h$ .

La fonction  $g(u) = \int_0^u \alpha(t) dt$  satisfait donc à la condition de Lipschitz et comme on a presque partout  $g'(t) = \alpha(t)$ , on en conclut que

$$(14) \quad |\alpha(t)| \leq |f| \quad \text{presque partout.}$$

Si à présent  $x = x(t)$  est une fonction intégrable quelconque et la suite  $\{x_n(t)\}$  est définie par les formules (12), on a  $\|x - x_n\| = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)| dt \rightarrow 0$ , d'où  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt =$

<sup>1)</sup> Pour  $r = 2$  ce théorème a été établi par M. Fréchet (*Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. 144 (1907), p. 1414—1416) et dans le cas général par F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497, v. p. 475.

$= \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$ , puisque  $|x_n(t) \alpha(t)| \leq |x(t) \alpha(t)|$ . Or, comme

$$\left| \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)| dt \cdot \text{vrai max}_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)|, \text{ on obtient en vertu}$$

de (14) l'égalité

$$|f| = \text{vrai max}_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)|.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème <sup>1)</sup>:

*Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans l'espace  $(L)$  est de la forme*

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt,$$

où  $\alpha(t)$  est une fonction bornée presque partout et  $|f| = \text{vrai max}_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)|$ .

3. Espace  $(c)$ . Soient

$$(15) \quad \xi_i^n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = i \\ 0 & \text{pour } n \neq i, \end{cases}$$

$$x_n = \{\xi_i^n\} \text{ et } x' = \{\xi_i^i\}.$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  où  $x = \{\xi_n\} \subset (c)$ , posons

$$(16) \quad f(x_n) = C_n \text{ et } f(x') = C',$$

En posant  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ , on a donc  $\|x - \alpha x' - \sum_{n=1}^r (\xi_n - \alpha) x_n\| =$   
 $= \text{borne sup}_{n > r} |\xi_n - \alpha|$ , d'où  $x = \alpha x' + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^r (\xi_n - \alpha) x_n$  et par conséquent  $x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n$ . Donc  $f(x) = \alpha \cdot f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot f(x_n)$ , d'où selon (16)

$$(17) \quad f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot C_n.$$

<sup>1)</sup> Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. H. Steinhaus (*Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeitschr. 5 (1918), p. 186—221).

Si  $x = \{\xi_n\}$  est à présent la suite où

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \text{pour } n \leq r, \\ 0 & \text{pour } n > r, \end{cases}$$

on a  $\|x\| = 1$ ,  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$  et  $f(x) = \sum_{n=1}^r C_n$ , et comme  $|f(x)| \leq |f| \cdot \|x\|$ ,

il vient  $\sum_{n=1}^r |C_n| \leq |f|$ . Le nombre  $r$  étant arbitraire, il en résulte

que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  est convergente. En posant

$$C' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C,$$

on a d'une façon générale selon (17)

$$(18) \quad f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n \quad \text{où} \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n.$$

Soit à présent

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \text{pour } n \leq r \\ \text{sign } C & \text{pour } n > r. \end{cases}$$

Alors  $\|x\| = 1$ ,  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \text{sign } C$  et  $f(x) = |C| + \sum_{n=1}^r |C_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n \cdot \text{sign } C \leq |f|$  et, cette inégalité subsistant pour tout  $r$  naturel,

on obtient  $|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leq |f|$ . Comme d'autre part  $f(x) \leq \left[ |C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \right] \cdot \|x\|$ , il en résulte que l'on a l'égalité

$$(19) \quad |C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

Conformément aux formules (18) et (19), le théorème suivant se trouve ainsi établi:

*Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  où  $x = \{\xi_n\}$  définie dans (c) est de la forme*

$$f(x) = C \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n$$

et on a

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

4. Espace  $(l^{(r)})$  où  $r \geq 1$ . Soit, comme auparavant,  $x_n = \{\xi_i^n\}$  où  $\xi_i^n$  sont définis par la formule (15). On a donc pour  $x = \{\xi_i\} \subset$

$$\subset (l^{(r)}) \text{ arbitraire } \|x - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i\| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \rightarrow 0, \text{ d'où}$$

$$(20) \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i.$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans  $(l^{(r)})$ , posons  $f(x_i) = C_i$ , d'où selon (20)

$$(21) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i.$$

Considérons d'abord le cas où  $r = 1$ .

Soient  $\xi_n = \text{sign } C_n$  et  $\xi_i = 0$  pour  $i \neq n$ . On alors  $f(x) = |C_n| \leq |f|$ . D'autre part, on a pour toute suite  $x = \{\xi_i\} \subset (l)$  l'inégalité  $|f(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\right) \cdot \text{borne sup}_{1 \leq i < \infty} |C_i|$  et par conséquent  $|f| = \text{borne sup}_{1 \leq i < \infty} |C_i|$ .

Nous avons donc démontré le théorème:

Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  où  $x = \{\xi_i\}$  définie dans (1) est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$$

où  $|f| = \text{borne sup}_{1 \leq i < \infty} |C_i|$ .

Passons au cas où  $r > 1$ . Soit  $x^0 = \{\xi_i^0\}$  où

$$\xi_i^0 = \begin{cases} |C_i|^{s-1} \cdot \text{sign } C_i & \text{pour } i \leq n, \\ 0 & \text{pour } i > n \end{cases}$$

et  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . On a alors  $\|x^0\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |C_i|^{rs-r}} = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |C_i|^s}$ , d'où,

selon (21),  $f(x^0) = \sum_{i=1}^n |C_i|^s \leq |f| \cdot \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |C_i|^s}$ , donc  $\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n |C_i|^s} \leq |f|$

et,  $n$  étant arbitraire,  $\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s} \leq |f|$ . D'autre part, pour toute

suite  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$  on a  $f(x) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i \right| \leq \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^r} \cdot \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}$ ,  
d'où finalement l'égalité

$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème:

*Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans l'espace  $(l^{(r)})$  où  $r > 1$  est de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \quad \text{où } x = \{\xi_i\}$$

et on a  $|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}$  où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ .

5. *Espace  $(m)$  et ses sous-espaces vectoriels séparables.* Soit  $E$  un espace vectoriel séparable situé dans  $(m)$ ; les éléments de  $E$  sont donc des suites bornées de nombres. Admettons dans  $E$  la même norme que dans  $(m)$ , à savoir

$$|x| = \text{borne sup}_{1 \leq i < \infty} |\xi_i| \quad \text{où } x = \{\xi_i\} \subset E.$$



Soit  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_i^n\}$  la suite d'éléments de  $E$  qui forment l'ensemble dénombrable dense dans  $E$ . Considérons d'abord  $x_1$  et  $x_2$ . Nous allons établir *pour tout*  $\varepsilon_2 > 0$  l'existence d'un tel  $k_2$  naturel que l'on ait pour tout couple  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de nombre réels:

$$(22) \quad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leq \max_{1 \leq i \leq k_2} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Ecartons, en effet, le cas de la proportionnalité des nombres  $\xi_i^1$  et  $\xi_i^2$  comme trivial et supposons, par contre, qu'il existe pour tout  $k$  naturel un couple  $\lambda_1^k$  et  $\lambda_2^k$  tel que

$$|\lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2| > \max_{1 \leq i \leq k} |\lambda_1^k \xi_i^1 + \lambda_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

En désignant par  $m_k$  celui des nombres  $|\lambda_1^k|$  et  $|\lambda_2^k|$  qui est plus grand et en posant  $l_1^k = \frac{\lambda_1^k}{m_k}$  et  $l_2^k = \frac{\lambda_2^k}{m_k}$ , on aurait donc

$$(23) \quad |l_1^k x_1 + l_2^k x_2| > \max_{1 \leq i \leq k} |l_1^k \xi_i^1 + l_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Comme on a  $1 \leq |l_1^k| + |l_2^k| \leq 2$  pour tout  $k$  naturel, on peut extraire des suites  $\{l_1^k\}$  et  $\{l_2^k\}$  des suites convergentes. Il existe par conséquent une suite  $\{k_j\}$  telle que les suites  $\{l_1^{k_j}\}$  et  $\{l_2^{k_j}\}$  convergent respectivement vers certains nombres  $l_1$  et  $l_2$  où  $1 \leq |l_1| + |l_2| \leq 2$ . Comme  $\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = +\infty$  et en outre  $\lim_{j \rightarrow \infty} |(l_1 x_1 + l_2 x_2) - (l_1^{k_j} x_1 + l_2^{k_j} x_2)| = 0$ , on aurait donc, en vertu de (23),  $|l_1 x_1 + l_2 x_2| \geq \max_{1 \leq i \leq \infty} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2)$ , ce qui est impossible, car on a par définition  $|l_1 x_1 + l_2 x_2| = \text{borne sup}_{1 \leq i \leq \infty} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2|$ .

L'existence d'un  $k_2$  naturel satisfaisant pour tout  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  à (22) étant ainsi démontrée, on en déduit aisément par induction que,  $\{\varepsilon_n\}$  étant une suite arbitrairement donnée de nombres positifs, il existe pour tout  $n > 1$  un  $k_n$  naturel tel que pour toute suite finie  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de nombres réels on a

$$(24) \quad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n| \leq \max_{1 \leq i \leq k_n} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2 + \dots + \lambda_n \xi_i^n| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Ceci établi, désignons pour tout  $n$  naturel donné par  $x^i$  où  $i = 1, 2, \dots, n$  la suite

$$(25) \quad \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{k_n}^i, 0, 0, 0, \dots;$$

on a donc en vertu de (24) pour  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  arbitraires

$$(26) \quad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n| \leq |\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \dots + \lambda_n x'_n| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Soit à présent  $f(x)$  une fonctionnelle linéaire définie dans  $E$ .  
 Donc  $|f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)| \leq |f| \cdot |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|$ ,  
 et par conséquent selon (26),  $|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)| \leq$   
 $\leq |f| \cdot (1 + \varepsilon_n) \cdot |\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \dots + \lambda_n x'_n|$ . Comme par définition  
 de  $x'_i$  (voir (25)) on a  $x'_i \subset (c)$ , il existe en vertu du th. 5, p. 57,  
 une fonctionnelle linéaire  $f_n(x)$  définie dans  $(c)$  et assujettie aux  
 conditions:

$$f_n(x'_i) = f(x_i) \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \text{ et } |f_n| \leq |f| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

En tenant compte de la forme générale des fonctionnelles  
 linéaire dans l'espace  $(c)$ , établie p. 66, et tous les termes des  
 suites  $x'_i$  où  $i = 1, 2, \dots, n$  étant d'après (25) des zéros pour les  
 indices supérieurs à  $k_n$ , on conclut qu'il existe une suite finie de  
 nombres  $a_{n1} a_{n2} \dots a_{nk_n}$  assujettie aux conditions:

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj} \xi_j^i = f_n(x'_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

et

$$\sum_{j=1}^{k_n} |a_{nj}| = |f_n| \leq |f| \cdot (1 + \varepsilon_n),$$

d'où, en posant

$$(27) \quad a_{nj} = \begin{cases} \frac{a_{nj}}{1 + \varepsilon_n} & \text{pour } j \leq k_n \\ 0 & \text{pour } j > k_n, \end{cases}$$

on obtient

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j^i = \frac{1}{1 + \varepsilon_n} f(x_i) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

et

$$(29) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \leq |f|.$$

Admettons que la suite  $\{\varepsilon_n\}$  ait été choisie de façon à avoir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . En vertu de (28) on a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j^i = f(x_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots$  et nous allons montrer, sans altérer la suite double infinie  $\{a_{nj}\}$ , que cette forme se laisse généraliser de  $x_i$  sur tout  $x \subset E$ .

Posons à ce but  $x = \{\xi_i\}$ . La suite d'éléments de la forme  $x_n = \{\xi_i^n\}$  étant définie au début comme dense dans  $E$ , il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un  $x_i = \{\xi_j^i\}$  tel que  $|x - x_i| < \varepsilon$ , d'où  $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j - f(x) \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} (\xi_j - \xi_j^i) \right| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j^i - f(x_i) \right| + |f(x_i) - f(x)|$  et comme  $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} (\xi_j - \xi_j^i) \right| \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \right) \cdot |x - x_i| \leq |f| \cdot \varepsilon$ , on a pour  $n$  suffisamment grand  $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j - f(x) \right| \leq |f| \cdot \varepsilon + \varepsilon + |f| \cdot \varepsilon = (2|f| + 1) \cdot \varepsilon$  et par conséquent la forme généralisée

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j = f(x) \quad \text{pour tout } x = \{\xi_j\} \subset E.$$

Enfin, nous allons montrer que

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| = |f|.$$

En effet, si l'on pose

$$(32) \quad M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|,$$

on a selon (30),  $|f(x)| \leq M \cdot \sup_{1 \leq j < \infty} |\xi_j| = M \cdot |x|$ , pour tout  $x \subset E$ , d'où,  $|f|$  étant le plus petit nombre tel que  $|f(x)| \leq |f| \cdot |x|$  pour tout  $x \subset E$ , on conclut que  $|f| \leq M$ , ce qui donne en vertu de (32) et (29) l'égalité (31).

Recueillons à présent les formules (27), (29), (30) et (31): nous voyons que le théorème suivant se trouve établi<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Ce théorème est dû à M. S. M a z u r.

Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  définie dans un espace vectoriel séparable  $E$  situé dans l'espace  $(m)$  est de la forme

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j$$

où  $x = \{\xi_j\}$  et  $\{\alpha_{nj}\}$  est un tableau de nombres réels satisfaisant aux conditions:

1°  $\alpha_{nj} = 0$  pour  $j > k_n$  où  $\{k_n\}$  est une suite de nombres naturels,

2°  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| \leq |f|$  pour  $n = 1, 2, \dots$ ,

3°  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| = |f|$ .

§ 5. Suites fermées et complètes dans les espaces  $(C)$ ,  $(L^{(r)})$ ,  $(c)$  et  $(l^{(r)})$ .

Nous allons appliquer à présent les résultats qui précèdent à plusieurs notions et problèmes liés avec les propriétés des espaces particuliers que nous venons de considérer.

Une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (C)$  et  $0 \leq t \leq 1$  est dite *fermée dans*  $(C)$ , lorsqu'il existe pour toute fonction  $x(t) \subset (C)$  une suite de combinaisons linéaires  $\left\{ \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t) \right\}$  tendant uniformément vers  $x(t)$ .

La suite  $\{x_n(t)\}$  s'appelle *complète dans*  $(C)$ , lorsque,  $g(t)$  étant une fonction quelconque à variation bornée, les conditions  $\int_0^1 x_n(t) dg = 0$  pour tout  $n = 1, 2, \dots$  entraînent l'égalité  $g(0) = g(t) = g(1)$ , excepté un ensemble au plus dénombrable de valeurs de  $t$ .

Une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (L^{(r)})$  et  $0 \leq t \leq 1$  est dite *fermée dans*  $(L^{(r)})$ , lorsqu'il existe pour toute fonction  $x(t) \subset (L^{(r)})$  une suite  $\{g_n\}$  de fonctions de la forme  $g_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)$  convergente en moyenne avec la  $r$ -ième puissance vers  $x(t)$ , c. à d. telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x(t) - g_n(t)|^r dt = 0$ .

La suite  $\{x_n(t)\}$  s'appelle *complète dans*  $(L^{(r)})$ , lorsque,  $g(t)$  étant une fonction arbitraire qui est mesurable et bornée ou qui appartient à  $(L^{(s)})$  où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , suivant que  $r = 1$  ou  $r > 1$ , les conditions  $\int_0^1 x_n(t) g(t) dt = 0$  pour  $n = 1, 2, \dots$  entraînent presque partout l'égalité  $g(t) = 0$ .

Les deux notions interviennent dans la théorie des séries orthogonales.

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions soit fermée dans  $(C)$ , resp. dans  $(L^{(r)})$ , est qu'elle soit fondamentale (dans le sens défini au § 3, p. 58, de ce chapitre). De-même, pour qu'elle soit complète, il faut et il suffit qu'elle soit totale (dans le sens défini *ibidem*). Il suffit, en effet, de rappeler la forme générale des fonctionnelles linéaires dans  $(C)$ , resp.  $(L^{(r)})$ , établie p. 61, resp. 64—65.

Enfin, le th. 7, p. 58, implique aussitôt que *pour qu'une suite de fonctions soit complète dans*  $(C)$ , resp. dans  $(L^{(r)})$ , *il faut et il suffit qu'elle y soit fermée.*

En procédant d'une façon analogue, on peut établir les notions de suites fermées et de suites complètes pour les espaces  $(c)$  et  $(l^{(r)})$ .

§ 6. *Approximation des fonctions appartenant à*  $(C)$  *et*  $(L^{(r)})$  *par des combinaisons linéaires de fonctions.*

Aussi le th. 6, p. 58, est susceptible d'interprétation dans divers espaces normés particuliers. En voici deux exemples:

1. *Espace*  $(C)$ . *Pour qu'il existe des polynômes formés de termes de la suite*  $\{x_n(t)\}$  *où*  $x_n(t) \in (C)$  *et*  $0 \leq t \leq 1$  *qui approchent uniformément une fonction donnée*  $x(t) \in (C)$ , *il faut et il suffit que, g(t) étant une fonction quelconque à variation bornée,*

*les conditions*  $\int_0^1 x_n(t) dg = 0$  *pour*  $n = 1, 2, \dots$  *entraînent l'égalité*

$$\int_0^1 x(t) dg = 0.$$

2. *Espaces  $(L^r)$ . Pour qu'il existe des combinaisons linéaires formées de termes de la suite  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \in (L^r)$  et  $0 \leq t \leq 1$  qui approchent avec la  $r$ -ième puissance en moyenne une fonction donnée  $x(t) \in (L^r)$ , il faut et il suffit que,  $g(t)$  étant une fonction arbitraire, mesurable et bornée lorsque  $r = 1$  et appartenant à  $(L^s)$*

*où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$  lorsque  $r > 1$ , les conditions  $\int_0^1 g(t) x_n(t) dt = 0$  pour*

*$n = 1, 2, \dots$  entraînent l'égalité  $\int_0^1 g(t) x(t) dt = 0$ .*

### § 7. Le problème des moments.

Passons aux applications du th. 5, p. 57.

On a donné le nom du *problème des moments* au problème qui consiste à établir des conditions pour l'existence d'une fonction  $f$  satisfaisant à l'infinité d'équations

$$(33) \quad \int_a^b f \varphi_i dt = c_i \quad \text{où } i = 1, 2, \dots$$

pour une suite de fonctions  $\{\varphi_i\}$  et une suite de nombres  $\{c_i\}$  données d'avance.

Nous donnons ici la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces normés: elle s'obtient par l'interprétation convenable du th. 5, p. 57, dans ces espaces.

I. *Espace  $(C)$ . Soit  $x_i = x_i(t)$  où  $0 \leq t \leq 1$  une fonction continue. Toute fonctionnelle linéaire  $f(x)$  dans  $(C)$  étant (cf.*

*p. 61) de la forme  $f(x) = \int_0^1 x(t) dg$  où variation  $g(t) = |f|$ , on ob-*

*tient du th. 5, p. 57, le théorème <sup>1)</sup>:*

*Pour qu'il existe une fonction  $g(t)$  à la*

$$\text{variation } g(t) \leq M$$

*et satisfaisant aux équations*

<sup>1)</sup> Ce théorème a été trouvé par F. Riesz (cf. les travaux de F. Riesz et de E. Helly cités ici p. 56, note <sup>1)</sup>).

$$\int_0^1 x_i(t) dg = c_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie  $h_1, h_2, \dots, h_r$  de nombres réels

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i c_i \right| \leq M \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{i=1}^r h_i x_i(t) \right|.$$

II. Espace  $(L^{(r)})$ . Pour  $r > 1$  on parvient, en procédant d'une façon analogue, au théorème<sup>1)</sup>:

Pour qu'il existe une fonction  $\alpha(t)$  où  $0 \leq t \leq 1$  telle que

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt \leq M^s \quad \text{où } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

et qui remplisse les équations

$$\int_0^1 x_i(t) \alpha(t) dt = c_i \quad \text{où } x_i(t) \in (L^{(r)}) \quad \text{et } i = 1, 2, \dots,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie  $h_1, h_2, \dots, h_k$  de nombres réels

$$\left| \sum_{i=1}^k h_i c_i \right| \leq M \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^k h_i x_i(t) \right|^r dt}.$$

Pour  $r = 1$ , les fonctions  $x_i(t)$  sont intégrables et la fonction cherchée  $\alpha(t)$  est bornée et telle que

$$\text{vrai max}_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)| \leq M.$$

La condition nécessaire et suffisante est alors la suivante:

$$\left| \sum_{i=1}^k h_i c_i \right| \leq M \cdot \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^k h_i x_i(t) \right| dt.$$

<sup>1)</sup> Ce théorème est dû également à F. Riesz, l. c.

§ 8. Conditions pour l'existence des solutions de certains systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.

Considérons un autre problème.

Etant donnés un tableau  $\{\alpha_{ik}\}$  et une suite  $\{c_i\}$  de nombres, nous allons chercher d'établir des conditions pour l'existence d'une suite de nombres  $\{z_i\}$  satisfaisant à l'infinité d'équations

$$(34) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \quad \text{où } i = 1, 2, \dots$$

Nous donnons ici, également à l'aide du th. 5, p. 57, la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces:

III. Espace (c). Soient  $x_i = \{\alpha_{ik}\}$  et

$$(35) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ik} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

Toute fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) étant de la forme  $f(x) = C \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\}$  et  $|f| = |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|$  (cf. p. 66), le th. 5, p. 57, donne en vertu de (35) l'énoncé suivant:

Pour qu'il existe une suite de nombres  $\{z_k\}$  qui remplisse les équations (34) en même temps que la condition  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \leq M$ , il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres  $h_1, h_2, \dots, h_r$  l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i c_i \right| \leq M \cdot \text{borne sup}_{1 \leq k < \infty} \left| \sum_{i=1}^r h_i \alpha_{ik} \right|.$$

IV. Espace (l). Soient  $x_i = \{\alpha_{ik}\}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| < \infty$  pour  $i = 1, 2, \dots$

Toute fonctionnelle linéaire dans (l) étant de la forme  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\}$  et  $|f| = \text{borne sup}_{1 \leq i < \infty} |z_i|$  (cf. p. 67), le th. 5, p. 57, donne immédiatement l'énoncé suivant:



Pour qu'il existe une suite bornée  $\{z_k\}$  qui remplisse les équations (34) en même temps que la condition borne sup  $|z_k| \leq M$ , il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres réels  $h_1, h_2, \dots, h_r$  l'égalité

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i c_i \right| \leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^r h_i a_{ik} \right|.$$


---