CHAPITRE III.

# Espaces du type *(F)*.

§ 1. *Définition et préliminaires.*

Soit $E$ un espace vectoriel $(D)$ complet et assujetti aux conditions suivantes (où $x$, $x_n$, $y$ sont des éléments de $E$ et $h$, $h_n$ sont des nombres):

$$1^0\ (x, y) = (x - y, \Theta),$$

$$2^0\ \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \textit{ entraîne } \lim_{n\to\infty} h_n x = \Theta \textit{ pour tout } x,$$

$$3^0\ \lim_{n\to\infty} x_n = \Theta \textit{ entraîne } \lim_{n\to\infty} h x_n = \Theta \textit{ pour tout } h.$$

Les espaces $E$ à propriétés $1^0 - 3^0$ seront dits *espaces du type* $(F)$. Tous les exemples $1 - 10$ des espaces $(D)$, décrits au § 7 de l'Introduction, p. $9 - 12$, sont à la fois, comme il est aisé de voir, autant d'espaces du type $(F)$.

Les conditions $1^0 - 3^0$ entraînent aussitôt les propriétés suivantes de la limite:

a) *lorsque* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *on a* $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

Il suffit, en effet, de remarquer que l'on a toujours $(x_n + y_n, x + y) = (x_n + y_n - x - y, \Theta) \leqslant (x_n - x + y_n - y, y_n - y) + (y_n - y, \Theta) = (x_n - x, \Theta) + (y_n - y, \Theta) = (x_n, x) + (y_n, y)$.

b) *si* $\lim_{n\to\infty} h_n = h$, *on a* $\lim_{n\to\infty} h_n x = h x$, *quel que soit* $x \subset E$.

On a, en effet, toujours $(h_n x, hx) = ((h_n - h)x, \Theta)$.

Nous voyons donc que *tout espace du type* $(F)$ *est en même temps un espace du type* $(G)$. Il en résulte que tous les théorèmes du Chapitre I subsistent, lorsque $E$ est supposé un espace du type $(F)$.

Or, il est à remarquer que *les espaces vectoriels du type* $(F)$ *sont connexes*, car pour tout $x$ et $y$ de $E$ l'ensemble des éléments de la forme $hx+(1-h)y$ où $0 \leqslant h \leqslant 1$ est un ensemble connexe contenant les éléments $x$ et $y$.

Etant donnée une sphère arbitraire $K$ (voir p. 13) dans l'espace $E$ du type $(F)$, il est facile de voir que l'ensemble $xK$ (voir la définition p. 21) est également une sphère.

Soit $h \neq 0$. L'opération $U(x) = hx$ constitue alors une transformation continue et biunivoque de l'espace $E$ en lui-même et on aperçoit aisément que les ensembles fermés, ouverts, non denses, de I-e resp. de II-e catégorie, mesurables $(B)$, se transforment respectivement en ensembles de la même nature.

On a, en particulier, le théorème suivant, qui résulte du théorème 2 (Chap. I, § 2), p. 22, et de la remarque p. 23, tout espace du type $(F)$ étant connexe:

**Théorème 1.** *$E$ étant un espace du type $(F)$, tout espace linéaire $H \subset E$ mesurable $(B)$ et de II-e catégorie est identique à $E$.*

## § 2. *Opérations homogènes.*

Nous allons nous occuper maintenant des opérations additives définies dans un espace $E$ du type $(F)$ et dont les contredomaines sont situés dans un espace $E_1$, également du type $(F)$.

Pour toutes les opérations de ce genre restent vrais les théorèmes 3, 4, 5 et 6 du Chapitre I. De plus, en appelant *homogène* toute opération $U(x)$ qui satisfait pour tout nombre $h$ à l'égalité $U(hx) = hU(x)$, on a le

**Théorème 2.** *Toute opération linéaire est à la fois homogène.*

*Démonstration.* L'opération $U(x)$ étant supposée linéaire, il est évident que l'on a pour tout $x \subset E$ et pour tout $r$ rationnel $U(rx) = rU(x)$. Or, si $\{r_n\}$ est une suite de nombres rationnels tendant vers $h$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} r_n x = hx$. La continuité de l'opération $U(x)$ donne par conséquent $U(hx) = \lim\limits_{n\to\infty} U(r_n x) = \lim\limits_{n\to\infty} r_n U(x) = $ $= hx$; l'opération $U(x)$ est donc en effet homogène.

## § 3. *Séries d'éléments. Inversion des opérations linéaires.*

Posons pour abréger

$$|x| = (x, \Theta).$$

On vérifie facilement que l'on a les relations suivantes pour tous $x$ et $y$ de $E$:

1⁰ $(x, y) = |x - y|$,

2⁰ $|\Theta| = 0$; $x \neq \Theta$ *entraîne* $|x| > 0$,

3⁰ $|-x| = |x|$,

4⁰ $|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$,

5⁰ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *entraîne* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Etant donnée une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $E$, on dit que la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ est *convergente* vers un élément $x$, ou que $x$ *est la somme de cette série*, lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$. On l'écrit: $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

La définition de la série implique en outre les relations:

6⁰ $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *entraîne* $|x| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n$ tel que $|x - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i| < \varepsilon$, d'où $|x| \leqslant \varepsilon + |\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ et, $\varepsilon$ étant arbitraire, $|x| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

7⁰ *Si la série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$ *est convergente, la série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *est convergente vers un élément.*

Posons, en effet, $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $p < q$, on a $|s_p - s_q| = |\sum_{i=p+1}^{q} x_i| \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=p+1}^{q} |x_i|$. On voit donc que $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} |s_p - s_q| = 0$. Par conséquent $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est une série convergente vers un élément.

Ceci établi, nous allons démontrer les théorèmes suivants.

**Théorème 3.** *Le contredomaine d'une opération linéaire est soit de I-e catégorie, soit identique à $E_1$.*

*Démonstration.* Admettons que le contredomaine $H \subset E_1$ de l'opération linéaire $U(x)$ définie dans $E$ soit de II-e catégorie. Nous allons prouver d'abord que

(1) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'image donnée par $U(x)$ de la sphère ouverte $|x| < \varepsilon$ contient une sphère ouverte $|y| < \eta$.*

Etant donné à ce but un $\bar{\varepsilon} > 0$, désignons pour tout $n$ naturel par $G_n$ l'ensemble des points de la forme $x = n\,x'$, où $|x'| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ et par $H_n$ l'image de $G_n$ donnée par $U(x)$, c. à d. l'ensemble des points $y = U(x)$ où $x \subset G_n$. Quel que soit le point $x$ donné, on a toujours $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta$; il existe par conséquent un $n$ naturel tel que $\left|\frac{1}{n} x\right| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$, donc tel que $x \subset G_n$. Il en résulte que $E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$ et que $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$.

Or, $H$ étant supposé de II-e catégorie, il en est de-même d'un certain $H_{n_0}$. Soit $K_1$ une sphère ouverte de centre $y_1$ et de rayon $\eta_1$ contenue dans $H_{n_0}'$.

On en déduit aussitôt que la sphère ouverte $K_2$ de centre $\frac{1}{n_0} y_1$ et de rayon $\frac{1}{n_0} \eta_1$ est contenue dans $H_1'$. En effet $y \subset K_2$, c'est à dire $\left|y - \frac{1}{n_0} y_1\right| < \frac{1}{n_0} \eta_1$, entraîne $n_0 y \subset K_1$, car $|n_0 y - y_1| =$

$= \left| n_0 \left( y - \frac{1}{n_0} y_1 \right) \right| \leqslant n_0 \left| y - \frac{1}{n_0} y_1 \right| < \eta_1$; il existe donc des points $\overline{y_n} \subset H_{n_0}$ tels que $\lim_{n \to \infty} \overline{y_n} = n_0 y$, c'est à dire que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n_0} \overline{y}_n = y$ et par conséquent $\frac{1}{n_0} \overline{y}_n \subset H_1$, d'où $y \subset H_1'$.

Soit $K_3$ une sphère ouverte arbitraire de centre $y_3 \subset H_1$ contenue dans $K_2$. L'ensemble des points $y_3 - y$ où $y \subset H_1$ admet donc comme point d'accumulation tout point d'une sphère ouverte $|y| < \overline{\eta}$. Or, en posant $y_3 = U(x_3)$ et $y = U(x)$ où $x_3$ et $x$ appartiennent à $G_1$, on a $|x_3 - x| \leqslant |x_3| + |x| < \overline{\varepsilon}$ et $U(x_3 - x) = y_3 - y$. Il est ainsi établi que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte $|x| < \overline{\varepsilon}$ contient une sphère ouverte $|y| < \overline{\eta}$.

Soit à présent $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$ où $i = 1, 2, \ldots$ D'après ce qui précède, il existe une suite de nombres $\eta_i > 0$ tels que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte $|x_i| < \varepsilon_i$ contient une sphère ouverte $|y_i| < \eta_i$ et on est évidemment libre d'admettre que $\lim_{i \to \infty} \eta_i = 0$. Nous allons définir par induction deux suites de points $\{y_n\}$ et $\{x_n\}$ comme il suit. Posons $|\dot{y}| < \eta = \eta_1$ et soient:

*a*) $y_1$ un point arbitraire de $E_1$ tel que $|y - y_1| < \eta_2$ et $x_1$ le point de $E$ tel que $U(x_1) = y_1$ et $|x_1| < \varepsilon_1$,

*b*) $y_n$ un point arbitraire de $E_1$ tel que $\left|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\right| < \eta_{n+1}$ et $x_n$ le point de $E$ tel que $U(x_n) = y_n$ et $|x_n| < \varepsilon_n$.

On a ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \tag{2}$$

et, comme $|x_n| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{3}$$

En vertu de 7° la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est convergente. Soit $x$ la somme de cette série. En vertu de (3) et 6° on a $|x| < \varepsilon$ et en vertu de (2): $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$. La proposition (1) se trouve ainsi démontrée.

Or, comme pour tout $y \subset E_1$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} y = \Theta$ et il existe par conséquent un $n$ naturel tel que $\left|\frac{1}{n} y\right| < \eta$, on peut trouver un $x$ tel que $U(x) = \frac{1}{n} y$, donc que $U(nx) = y$. Mais il en résulte que $H = E_1$, conformément à la thèse du théorème.

**Théorême 4.** *Si l'opération linéaire $U(x)$ transforme $E$ en $E_1$ tout entier, il existe pour toute suite de points $\{y_n\}$ de $E_1$ convergente vers $y_0 = U(x_0)$ une suite de points $\{x_n\}$ de $E$ convergente vers $x_0$ et telle que $U(x_n) = y_n$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$*

*Démonstration.* Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tendant vers 0. L'opération $U(x)$ étant linéaire, on a la proposition (1), établie au cours de la démonstration du th. 3; il en résulte que l'image de la sphère ouverte $|x| < \varepsilon_n$ contient une sphère ouverte $|y| < \eta_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Considérons un $m_0$ naturel tel que, pour tout $m > m_0$, l'inégalité $|y_m - y_0| < \eta_n$ se présente au moins pour une valeur de $n$ et soit, pour un $m$ donné tel que $y_m \neq y_0$, $n_m$ la plus grande de ces valeurs. Soit enfin $x_m$ le point défini par les conventions:

*a)* *si* $m \leqslant m_0$, posons $x_m =$ un point arbitraire satisfaisant à l'équation $U(x_m) = y_m$,

*b)* *si* $m > m_0$ *et* $y_m \neq y_0$, posons $x_m =$ un point arbitraire de la sphère ouverte $|x - x_0| < \varepsilon_{n_m}$ satisfaisant à la même équation,

*c)* *si* $m > m_0$ *et* $y_m = y_0$, posons $x_m = x_0$.

La suite $\{x_n\}$ ainsi définie remplit — comme on vérifie facilement — la thèse du théorème.

**Théorème 5.** *Si l'opération linéaire transforme $E$ en $E_1$ d'une façon biunivoque, cette transformation est en même temps bicontinue* [1]).

La démonstration résulte immédiatement du th. 4.

**Théorème 6.** *Si un espace vectoriel $E$ est un espace $(F)$ aussi bien avec une définition de la distance $(x, y)$ qu'avec une autre définition de la distance $(x, y)_1$ et si*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0 \text{ entraîne toujours } \lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0,$$

*alors, réciproquement,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0 \text{ entraîne toujours } \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0,$$

*de sorte que la notion de limite est la même pour les deux métriques.*

La démonstration s'obtient du th. 5, en désignant par $E_1$ l'espace $E$ avec la métrique $(x, y)_1$ et l'opération linéaire $y = U(x)$ étant définie par la relation $y = x$.

**Théorème 7.** *Toute opération additive $y = U(x)$ qui remplit la condition*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \text{ entraînent } y_0 = U(x_0)$$

*est une opération linéaire.*

*Démonstration.* Introduisons dans $E$ une nouvelle définition de la distance:

$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''), \tag{4}$$

où $x' \subset E$, $x'' \subset E$, $y' = U(x')$, $y'' = U(x'')$, $(x', x'')$ désigne la distance primitive de $x'$ à $x''$ dans $E$ et $(y', y'')$ désigne la distance de $v'$ à $y''$ dans $E_1$.

Il est facile de voir que, considéré avec la notion de distance $(x', x'')_1$, l'espace $E$ est un espace du type $(F)$; en particulier, pour vérifier qu'il est complet, soit $\{x_n\}$ une suite de points telle que

---

[1]) Pour le cas des espaces du type $(B)$ (cf. Chap. V, § 1) ce théorème, de même que le th. 6 (qui en est un corollaire) se trouve dans ma note citée p. 27, mais la démonstration y est différente.

$\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p, x_q)_1=0$; par conséquent, selon (4), $\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p, x_q) = \lim\limits_{p,q\to\infty}(y_p, y_q) = 0$, de sorte qu'il existe un $x_0$ et un $y_0$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n, y_0) = 0$, et, comme par l'hypothèse, $y_0 = U(x_0)$, on en tire en effet d'après (4), $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x_0)_1 = 0$.

Or, on a pour tout $x'$ et $x''$, selon (4), $(x', x'')_1 \geqslant (x', x'')$; par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$; en vertu du th. 6, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$ entraîne donc réciproquement $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$, donc aussi, d'après (4), $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. Ainsi l'opération additive $U(x)$ est continue, c. q. f. d.

**Lemme 1.** *Soient $U'(x)$ et $U''(x)$ deux opérations linéaires définies respectivement dans les espaces $E'$ et $E''$ du type $(F)$ et dont les contredomaines sont situés dans l'espace $E_1$, également du type $(F)$. Si l'équation $U'(x) = U''(y)$ admet pour tout $x$ exactement une solution $y = U(x)$, l'opération $U(x)$ est linéaire.*

La démonstration résulte du th. 7, car, comme on aperçoit aussitôt, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$ entraînent $y_0 = U(x_0)$.

**Lemme 2.** *Etant données: une opération additive $y = U(x)$ et une opération linéaire $z = V(y)$ telle que $V(y) = \Theta$ entraîne $y = \Theta$, si en outre l'opération $V[U(x)]$ est linéaire, l'opération $U(x)$ est aussi linéaire.*

La démonstration résulte du lemme 1, car l'équation $V[U(x)] = V(y)$ admet pour tout $x$ exactement une solution $y = U(x)$.

**Définition.** Une classe $T$ d'opérations linéaires est dite *totale*, lorsque l'ensemble des égalités $V(x) = 0$ pour $V \subset T$ entraîne l'égalité $x = \Theta$.

**Théorème 8.** *Soient: $y = U(x)$ où $x \subset E$ et $y \subset E_1$ une opération additive et $T$ une classe totale d'opérations linéaires définies dans $E_1$. Si $V[U(x)]$ est pour tout $V \subset T$ une opération linéaire, $U(x)$ est également une opération linéaire.*

*Démonstration.* Admettons que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Pour tout $V \subset T$ on a $\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y_0)$ et, l'opération $V[U(x)]$ étant linéaire, $\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = V[U(x_0)]$, d'où $V\ U(x_0)] - V(y_0) = 0$, donc $V[U(x_0) - y_0] = 0$ et, la classe $T$ étant totale, $U(x_0) = y_0$. En vertu du th. 7 l'opération $U(x)$ est par conséquent linéaire.

**Théorème 9.** *$\{U_i(x)\}$ où $x \subset E'$ et $\{V_i(y)\}$ où $y \subset E''$ étant deux suites d'opérations linéaires à contredomaines situés dans un espace $E_1$ du type $(F)$, si le système d'équations $U_i(x) = V_i(y)$ où $i = 1, 2, \dots$ admet pour tout $x$ exactement une solution $y = U(x)$, l'opération $y = U(x)$ est linéaire.*

*Démonstration.* Admettons en effet que l'on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et, pour la suite correspondante $\{y_n\}$, que $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. En raison de la continuité des opérations $\{U_i\}$ et $\{V_i\}$, on a alors $U_i(x_0) = V_i(y_0)$ pour tout $i = 1, 2, \dots$, d'où $y_0 = U(x_0)$, ce qui entraîne selon le th. 7 la continuité de l'opération $y = U(x)$.

## § 4. *Fonctions continues sans dérivée.*

A titre d'application, nous allons démontrer d'abord par une déduction facile du th. 4 du Chapitre I, p. 23, *l'existence d'une fonction continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive* [1]).

$(C^1)$ désignant l'ensemble de toutes les fonctions continues périodiques de période 1, posons pour tout couple de fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de $(C^1)$:

$$(x_1(t), x_2(t)) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Il est facile de voir que $(C^1)$ constitue alors un espace du type $(F)$.

---

[1]) S. Banach, *Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires,* Bull. des Sc. Math. L (1926), p. 27—32 et 36—43. La méthode appliquée a été développée ensuite par M. S. Saks et M. H. Steinhaus, qui l'ont employée pour traiter divers problèmes de la Théorie des fonctions (Cf. S. Saks, Fund. Math. X, p. 186—196 et H. Steinhaus, Stud. Math. I, p. 51—81).

Soit pour un nombre arbitraire $h \neq 0$

$$y(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

$(S)$ désignant l'espace des fonctions mesurables (cf. 1, p. 9), qui est du type $(F)$ (cf. § 1, p. 35), admettons que $y(t) \subset (S)$. L'expression (5) définit alors une opération linéaire à domaine $(C^1)$ et à contredomaine contenu dans $(S)$.

Soient $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ où $h_n \neq 0$ et

$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n) - x(t)}{h_n} \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{6}$$

Or, *si toute fonction continue avait presque partout la dérivée*, la limite de l'expression (6) existerait pour presque toutes les valeurs de $t$. Il existerait par conséquent pour tout $x \subset (C^1)$ la limite $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$, qui serait définie dans le domaine $(S)$, c. à d. une limite *en mesure*. En posant $U(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$, on obtiendrait donc une opération additive $U(x)$ mesurable $(B)$ qui, en vertu du th. 4, Chap. I, p. 35, serait une opération linéaire. $U(x)$ est évidemment la dérivée de la fonction $x(t)$.

Il résulte de la continuité de l'opération $U(x)$ que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ *uniformément*, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t) = 0$ *en mesure*. Cependant pour $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{nt}{2\pi}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ uniformément, tandis que la suite des dérivées $\left\{\frac{1}{2\pi} \cos n \frac{t}{2\pi}\right\}$ ne tend pas vers 0 en mesure. Il existe par conséquent des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive.

§ 5. *La continuité des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles.*

Soit $F(x) = 0$ une équation différentielle partielle linéaire p. ex. du second ordre:

$$(7) \quad F(x) = a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a_4 \frac{\partial x}{\partial u} + a_5 \frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0,$$

où $a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) sont des fonctions continues des variables $u$ et $v$ dans une région fermée $\overline{G}$ ayant pour frontière une courbe simple fermée $C$.

Il peut arriver que, pour des conditions aux limites d'une certaine nature, l'équation (7) *admette toujours une seule solution* $x(u, v)$ qui est continue dans $\overline{G}$ avec ses dérivées partielles qui figurent dans (7), c. à. d. du premier et second dégré dans l'intérieur $G$ de $\overline{G}$.

Dans cette hypothèse, les conditions aux limites peuvent être d'ailleurs bien diverses. Elles peuvent consister p. ex. à donner les valeurs de la fonction sur la courbe $C$ (type elliptique) ou sur une partie de cette courbe (type hyperbolique, parabolique) ou les valeurs de la dérivée sur les normales à la courbe $C$ etc.

Supposons encore que, $t$ désignant le paramètre qui parcourt $C$, l'équation (7) admette pour toute fonction $\xi(t)$ continue avec ses dérivées p. ex. jusqu'à l'ordre $r$ une solution $x(u, v)$ se réduisant sur $C$ à la fonction $\xi(t)$.

Ceci posé, nous allons démontrer que

*Si la suite* $\{\xi_n(t)\}$ *remplit les conditions* (imposées à $\xi(t)$) *et si l'on a uniformément* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{(i)}(t) = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, r$, *alors,* $\{x_n(u, v)\}$ *désignant la suite des solutions correspondantes de l'équation* $F(x) = 0$, *on a uniformément dans* $\overline{G}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ *et uniformément dans toute région fermée située dans* $G$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0, \ldots$ *etc.* (pour toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7)).

Pour la démonstration, désignons par $E$ l'ensemble de toutes les fonctions $x(u, v)$ satisfaisant à (7), continues dans $\overline{G}$ et ayant les dérivées partielles des deux premiers ordres (celles qui figurent dans (7)) continues dans $G$. Soit $\{\bar{G}_n\}$ une suite de régions fermées situées dans $G$ et telles que $G = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$. Posons pour tout couple $x(u,v) \subset E$ et $y(u,v) \subset E$:

$$(x,y) = \max_{u,v \subset \bar{G}} |x(u,v) - y(u,v)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{u,v \subset \bar{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots}{1 + \max\limits_{u,v \subset \bar{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots},$$

en y faisant entrer les différences de toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7).

Ainsi métrisé, $E$ constitue un espace du type $(F)$ et la relation $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ (suivant la distance définie de la sorte) signifie que $x_n$ tend uniformément vers $x$ dans $\bar{G}$ en même temps que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2}, \ldots$ (figurant dans (7)) tendent uniformément vers les dérivées partielles correspondantes de la fonction $x$ dans toute région fermée $\bar{G}_k$ où $k = 1, 2, \ldots$

Soit $E_1$ l'ensemble des fonctions $\xi(t)$, où $t$ parcourt $C$, continues avec leurs $r$ premières dérivées. Posons pour tout couple $\xi(t) \subset E_1$ et $\eta(t) \subset E_1$:

$$(\xi, \eta) = \max_{t \subset C} |\xi(t) - \eta(t)| + \sum_{i=1}^{r} \max_{t \subset C} |\xi^{(i)}(t) - \eta^{(i)}(t)|.$$

Désignons maintenant par $\xi = U(x)$ l'opération qui fait correspondre à toute fonction $x = x(u,v) \subset E$ la fonction $\xi = \xi(t)$ à laquelle $x(u,v)$ se réduit sur la frontière $C$ de $G$. Ainsi définie, l'opération $U(x)$ est manifestement additive et continue.

Or, le contredomaine de l'opération $U(x)$ étant un espace du type $(F)$, l'opération inverse $x = U^{-1}(\xi)$, qui existe par l'hypothèse, est en vertu du th. 5, p. 41, continue, ce qui implique la proposition à démontrer.

*Remarque.* Si nous faisions tomber l'hypothèse de l'univocité de la solution de l'équation (7), nous serions restreints à ne conclure (en vertu du th. 4, p. 40) que ceci: $\{\xi_n(t)\}$ ayant la signification précédente, *il existe* une suite de fonctions $\{x_n(u, v)\}$ satisfaisant à (7), se réduisant sur $C$ à $\xi_n(t)$ et telles qu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ uniformément dans $\overline{G}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0, \ldots$ uniformément dans toute région fermée contenue dans $G$.

## § 6. *Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.*

Soient $(a_{ik})$ où $i = 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, \ldots$ un tableau (suite double) arbitraire de nombres réels et $E_1$ un espace du type $(F)$ dont les éléments sont des suites de nombres.

**Théorème 10.** *Si pour toute suite $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ le système d'équations*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \eta_i \quad \textit{où} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

*admet toujours une seule solution $\{\xi_k\}$, il existe des fonctionnelles linéaires $\xi_k = f_k(y)$ où $k = 1, 2, \ldots$, définies dans $E_1$ et telles que l'on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \quad \textit{pour tout} \quad y \subset E_1 \quad \textit{et} \quad i = 1, 2, \ldots$$

*Démonstration.* Désignons par $E$ l'ensemble de toutes les suites $x = \{\xi_k\}$ qui remplissent les conditions

*a)* *la série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k$ *est convergente pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

*b)* *la suite* $\{\eta_i\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k\right\}$ *appartient à* $E_1$.

Posons pour tout couple $x' = \{\xi_k'\}$ et $x'' = \{\xi_k''\}$ d'éléments de $E$:

$$(x', x'')_i = \operatorname*{borne\ sup}_{1 \leqslant n < \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi'_k - \xi''_k) \right|,$$

$$(x', x'')_0 = \textit{distance des suites} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi'_k\right\} \text{ et } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi''_k\right\} \textit{ dans } E_1$$

et définissons la distance $(x', x'')$ dans $E$ par la formule

$$(x', x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{(x', x'')_i}{1 + (x', x'')_i}.$$

Remarquons que

(9) *Pour tout* $k = 1, 2, \ldots$ *si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ *où* $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \subset E$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$.

En effet, par suite de l'univocité des solutions du système d'équations (8) la $k$-ième colonne contient au moins un terme $a_{ik} \neq 0$. Admettons donc que

$$a_{i_k k} \neq 0 \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, on a $\lim_{n\to\infty} (x_n, \Theta)_{i_1} = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$, car (10) donne $a_{i_1 1} \neq 0$, et il est facile à présent de prouver par induction que l'on a d'une façon générale $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ pour tout $k$ naturel.

Ainsi établie, la proposition (9) permet de montrer que $E$ est un espace vectoriel complet.

Admettons à ce but que la suite $\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ remplit la condition $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (x_p, x_q) = 0$. Par conséquent $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (x_p - x_q) = 0$, d'où en vertu de (9), $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, de sorte qu'il existe un $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$ pour tout $k$ naturel. Soit $x = \{\xi_k\}$. On vérifie aisément que $x \subset E$ et que $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_i = 0$ pour tout $i = 0, 1, \ldots$, d'où $\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$; l'espace $E$ est donc, en effet, complet.

Il en résulte que $E$ est un espace du type $(F)$.

Ceci établi, posons

$$y = U(x)$$

pour toutes deux suites $x = \{\xi_k\} \subset E$ et $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ qui satisfont au système d'équations (8).

On voit aussitôt que

$$(y, \Theta) = (x, \Theta)_0 \leqslant (x, \Theta), \tag{11}$$

où $(y, \Theta)$ désigne, bien entendu, la distance dans $E_1$ et $(x, \Theta)$ celle dans $E$.

En vertu de (11), $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ entraîne $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. L'opération $y = U(x)$ est donc linéaire et comme elle transforme $E$ en $E_1$ d'une façon univoque, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est d'après le th. 5, p. 40, également linéaire. Par conséquent, si l'on pose pour $k = 1, 2, \ldots$: $\xi_k = f_k(y)$ où $x = U^{-1}(y) = \{\xi_k\}$, on voit que $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$, où $x_n = U^{-1}(y_n) = \{\xi_k^{(n)}\}$, entraîne $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, donc $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$; ainsi les fonctionnelles additives $f_k(y)$ sont des fonctionnelles linéaires dans $E_1$, c. q. f. d.

Ce théorème implique, comme nous allons voir, le théorème suivant [1]):

*Si le système d'équations* (8) *admet exactement une solution pour toute suite* $\{\eta_i\}$ *appartenant*

1⁰ *à l'espace des suites convergentes vers* 0,
2⁰ *à l'espace (s),*
3⁰ *à l'espace (l),*
4⁰ *à l'espace* $(l^{(p)})$ où $p > 1$,

*il existe un tableau* $\{b_{ki}\}$ *tel que*

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*où les suites* $\{\xi_k\}$ *et* $\{\eta_i\}$ *satisfont au système d'équations* (8) *et qui remplit respectivement les conditions*:

1⁰ $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}| < \infty$ *pour* $k = 1, 2, \ldots,$

2⁰ *il n'a que des lignes finies* (c. à. d. qu'il existe une suite numérique $n_k$ telle que l'on a $b_{ki} = 0$ pour tout $i > n_k$),

3⁰ $|b_{ki}| < m_k$ *pour une suite de nombres* $\{m_k\}$,

4⁰ $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$

---

[1]) dont le cas 4⁰ a été connu (cf. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913).

*Remarque.* Si l'on suppose que le système d'équations (8) admet exactement une solution *pour toute suite convergente* $\{\eta_i\}$ (pas nécessairement convergente vers 0), il existe, en dehors du tableau $\{b_{ki}\}$ assujetti à 1°, une suite bornée $\{c_k\}$ telle que

$$\xi_k = c_k \lim_{i\to\infty} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tous ces théorèmes s'obtiennent du th. général établi au début (th. 10, p. 47) par une représentation convenable de la fonctionnelle linéaire dans chaque espace particulier (voir théorèmes p. 50, et 66—68).

§ 7. *Applications de l'espace (s).*

Nous allons établir la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $(s)$ des suites de nombres (voir Introduction § 7, 2, p. 10).

**Théorème 11.** *Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace $(s)$ est de la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\,\xi_i, \tag{12}$$

*où $N$ est un nombre naturel dépendant de $f$.*

*Démonstration.* Soit $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ où $\xi_i^{(n)} = 0$ pour $i \neq n$ et $\xi_n^{(n)} = 1$. Posons $f(x_n) = a_n$. Pour toute suite $x = \{\xi_n\}$, on a $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, d'où $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n f(x_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\xi_n$. Or, cette série étant convergente pour toute suite $\{\xi_n\}$, il existe un $N$ naturel tel que l'on a $a_n = 0$ pour tout $n > N$, d'où la forme (12) de $f(x)$.

M. O. Toeplitz[1]) a établi le théorème suivant:

---

[1]) O. Toeplitz, *Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten,* Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXVIII (1909), p. 88—96.

**Théorème 12.** *Pour qu'il existe une suite de nombres* $\{\xi_k\}$ *satisfaisant au système d'équations* (8), *il faut et il suffit que, pour toute suite finie de nombres* $h_1, h_2, \ldots, h_r$, *la condition* $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = 0$ *où* $k = 1, 2, \ldots$ *entraîne l'égalité* $\sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i = 0$.

*En particulier, si la condition* $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = 0$ *où* $k = 1, 2, \ldots$ *entraîne* $h_1 = h_2 = \ldots = h_r = 0$, *le système d'équations* (8) *admet une solution pour toute suite* $\{\eta_i\}$.

Nous allons démontrer le

**Théorème 13.** *Si le système d'équations* (8) *admet pour toute suite* $y = \{\eta_i\}$ *exactement une solution, il existe pour tout* $i$ *naturel un* $N_i$ *naturel tel qu'on a* $a_{ik} = 0$ *pour tout* $k > N_i$.

*Démonstration.* Posons $\xi_k = f_k(y)$ pour $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i$ où $i = 1, 2, \ldots$ En vertu du th. 10, p. 47, $f_k(y)$ est une fonctionnelle linéaire définie dans l'espace $(s)$ des suites de nombres réels, (cf. p. 10). Il existe donc pour tout $k$ naturel une suite finie de nombres $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{N_k k}$ telle que

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_{ik} \eta_i = \xi_k. \tag{13}$$

Or, *les équations du système* (8) *sont linéairement indépendantes.*

En effet, supposons par contre qu'il existe une suite finie de nombres $h_1, h_2, \ldots, h_r$ telle que $\sum_{k=1}^{r} h_k a_{ik} = 0$ où $i = 1, 2, \ldots$ On aurait donc selon (13)

$$\sum_{k=1}^{r} h_k \xi_k = \sum_{k=1}^{r} h_k f_k(y) = 0 \quad \textit{pour toute suite} \quad y = \{\eta_i\}. \tag{14}$$

En posant $\eta_i^0 = a_{ij}$ pour un $j \leqslant r$ naturel arbitrairement fixé, on constate aussitôt que l'on a pour la solution correspondante $\{\xi_k^0\}$ du système d'équations (8): $\xi_j^0 = 1$ et $\xi_k^0 = 0$ pour tout $k \neq j$. Ces valeurs mises dans (14) donnent $h_j = 0$; en conséquence, tous les coefficients $h_k$ s'annulent, ce qui prouve l'indépendance linéaire des équations (8).

Il en résulte en vertu du th. 12 l'existence pour toute suite $\{\xi_k\}$ d'une suite de nombres $\{\eta_i\}$ satisfaisant aux équations (13). La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k$ est par conséquent convergente pour toute suite $\{\xi_k\}$ d'où l'existence pour tout $i = 1, 2, \ldots$ d'un $N_i$ conforme à la thèse du théorème.

*Remarque.* En faisant tomber l'hypothèse d'après laquelle il n'existe qu'une seule solution, le théorème cesse d'être vrai.

En effet, $\{\eta_j\}$ étant une suite arbitraire, il existe une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k\, z^k$ à coefficients réels $\xi_k$ telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k\, j^k = \eta_j \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Or, ce système d'équations admet donc une solution pour toute suite $\{\eta_i\}$; évidemment cette solution n'est pas unique, car il existe une série entière distincte de 0 et telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k\, j^k = 0 \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \ldots$$