CHAPITRE II.

Espaces vectoriels généraux.

§ 1. *Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels.*

Etant donné un ensemble non vide E, admettons qu'à tout couple ordonné x, y d'éléments de E vienne correspondre un élément $x+y$ de E (dit *somme* de x et y) et que pour tout nombre t et pour tout $x \subset E$ un élément tx de E (dit *produit* du nombre t par l'élément x) soit défini de façon que ces opérations, à savoir *l'addition des éléments* et la *multiplication des nombres par les éléments* remplissent les conditions suivantes (où x, y et z désignent des éléments arbitraires de E et a, b des nombres):

1) $x+y=y+x$,

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3) $x+y=x+z$ *entraîne* $y=z$,

4) $a(x+y)=ax+ay$,

5) $(a+b)x=ax+bx$,

6) $a(bx)=(ab)x$,

7) $1 \cdot x=x$.

Dans ces hypothèses, nous disons que l'ensemble E constitue un espace *vectoriel* ou *linéaire*. Il est facile de voir qu'il existe alors un et un seul élément — désignons-le par Θ — tel que l'on a toujours $x+\Theta=x$ et que l'égalité $ax=bx$ où

$x \neq \Theta$ donne $a = b$; de plus, que l'égalité $ax = ay$ où $a \neq 0$ implique $x = y$.

Posons, en outre, par définition:

$$-x = (-1)\,x \qquad et \qquad x - y = x + (-y).$$

Les exemples 1—10 des espaces (D), décrits p. 9—12 sont à la fois autant d'exemples des espaces vectoriels, en y admettant les définitions habituelles de l'addition des éléments et de la multiplication des nombres par eux.

Lorsque $x \neq y$, nous entendons par le *segment* unissant x et y l'ensemble de tous les éléments de la forme $tx + (1-t)\,y$ où t est un nombre quelconque de l'intervalle [0,1].

Un ensemble $G \subset E$ est dit *convexe*, lorsqu'il contient tout segment qui en unit les éléments arbitraires.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments d'un espace vectoriel, l'expression

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels arbitraires, s'appelle une *combinaison linéaire* des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 2. *Extension des fonctionnelles additives et homogènes.*

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels et $f(x)$ une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans E_1.

L'opération $f(x)$ s'appelle *additive*, lorsqu'on a pour tout couple d'éléments x, y:

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

elle est dite *homogène*, lorsqu'on a pour tout élément x et tout nombre t:

$$f(t\,x) = t\,f(x).$$

Théorème 1 [1]. *Etant données*

---

[1] Cf. S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Studia mathematica I (Lwów 1929), p. 223—239, en particulier p. 226.

1° *une fonctionnelle* $p(x)$ *définie dans* E *et telle que l'on ait pour tous* x *et* y *de* E

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad te \quad p(tx) = t\,p(x) \quad pour \quad t \geqslant 0,$$

2° *une fonctionnelle additive et homogène* $f(x)$ *définie dans un espace vectoriel* $G \subset E$ (bien entendu, avec les mêmes définitions des opérations fondamentales) *et telle que l'on ait pour tout* $x \subset G$

$$f(x) \leqslant p(x),$$

il existe toujours une fonctionnelle additive et homogène $F(x)$ *définie dans* E *et telle que l'on a*

$$F(x) \leqslant p(x) \quad pour \ tout \quad x \subset E \quad et \quad F(x) = f(x) \quad pour \ tout \quad x \subset G$$

Démonstration. Nous pouvons admettre que $G \neq E$; soit $x_0 \subset E - G$. On a selon 2° pour $x' \subset G$ et $x'' \subset G$:

$$f(x'') - f(x') = f(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') = p[(x'' + x_0) + (-x' - x_0)] \leqslant$$
$$\leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0),$$

d'où

$$-p(-x' - x_0) - f(x') \leqslant p(x'' + x_0) - f(x'').$$

Les nombres

$$m = \operatorname*{borne\,sup}_{x \subset G}[-p(-x - x_0) - f(x)] \; et \; M = \operatorname*{borne\,inf}_{x \subset G}[p(x + x_0) - f(x)]$$

sont donc finis et $m \leqslant M$. Etant donné un r_0 tel que $m \leqslant r_0 \leqslant M$, on a pour tout $x \subset G$

$$(1) \qquad -p(-x - x_0) - f(x) \leqslant r_0 \leqslant p(x + x_0) - f(x).$$

Considérons l'ensemble G_0 de tous les éléments y de la forme

$$(2) \qquad y = x + t\,x_0 \quad où \quad x \subset G \ et \ t \ est \ un \ nombre.$$

Evidemment G_0 constitue un espace vectoriel. Posons

$$(3) \qquad \varphi(y) = f(x) + t\,r_0,$$

où l'élément y est défini par (2); comme $x_0 \subset E - G$, tout $y \subset G_0$ admet exactement *une* représentation de la forme (2), de sorte que la fonctionnelle $\varphi(y)$ se trouve définie dans G_0 d'une manière univoque. On voit aussi qu'elle y est additive et homogène et qu'elle coïncide dans G_0 avec $f(x)$. Nous allons montrer que l'on a

(4) $$\varphi(y) \leqslant p(y) \textit{ pour tout } y \subset G_0.$$

En effet, si l'on écrit y dans la forme (2), on peut admettre que $t \neq 0$. En mettant dans l'inégalité (1) $\frac{x}{t}$ au lieu de x et en multipliant par t son membre droit ou gauche, suivant que $t > 0$ ou $t < 0$, on obtient $t\,r_0 \leqslant p(x + t\,x_0) - f(x)$, ce qui entraîne d'après (3) l'inégalité (4).

Ceci établi, on voit qu'il suffit de bien ordonner l'ensemble $E - G$, pour arriver par des extensions successives de $f(x)$, selon le procédé décrit tout à l'heure, à la fonctionnelle $F(x)$ satisfaisant à la thèse du théorème.

Corollaire. *Etant donnée une fonctionnelle $p(x)$ définie dans E et telle que l'on ait pour tout $x \subset E$ et $y \subset E$*

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \textit{et} \quad p(t\,x) = t\,p(x) \textit{ pour } t \geqslant 0,$$

il existe une fonctionnelle additive et homogène $F(x)$ définie dans E et telle que l'on a pour tout $x \subset E$

$$F(x) \leqslant p(x).$$

Considérons, en effet, un $x_0 \subset E$ et désignons par G l'ensemble de tous les éléments de la forme tx_0 où t est un nombre arbitraire. G constitue alors un espace vectoriel. En y posant $f(t\,x_0) = t\,p(x_0)$, on aura $f(t\,x_0) \leqslant p(t\,x_0)$ quel que soit t, car $t \geqslant 0$ entraîne $t\,p(x_0) = p(t\,x_0)$ et $t < 0$ entraîne $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$, d'où $p(x_0) \geqslant -p(-x_0)$ et finalement $t\,p(x_0) \leqslant -t\,p(-x_0) = p(t\,x_0)$; on n'a donc qu'à appliquer le théorème 1, qui précède.

§ 3. *Applications: généralisation des notions d'intégrale, de mesure et de limite.*

Nous allons envisager maintenant quelques applications intéressantes du théorème 1 et du corollaire.

1. Soit E l'ensemble des fonctions réelles bornées $x(s)$ définies sur une circonférence de longueur 1 et où s en désigne des arcs comptés à partir d'un point fixe dans un même sens de parcours. En admettant les définitions habituelles des opérations, E constitue un espace vectoriel.

Or, pour tout élément $x = x(s)$ de E, convenons d'entendre par $p(x)$ la *borne inférieure* de tous les nombres $M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de la forme

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \underset{-\infty < s < +\infty}{\text{borne sup}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s + \alpha_k),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est une suite arbitraire de nombres. La fonctionnelle $p(x)$ remplit alors toutes les hypothèses du corollaire. Il est, en effet, évident que l'on a en premier lieu toujours $p(tx) = t\,p(x)$ pour $t \geqslant 0$.

En second lieu, étant donnés deux éléments $x = x(s)$ et $y = y(s)$ de E et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe des suites finies de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v$ telles que

$$(5) \quad M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u) \leqslant p(x) + \varepsilon \quad \textit{et} \quad M(y; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v) \leqslant p(y) + \varepsilon.$$

En rangeant tous les nombres $\alpha_i + \beta_j$ où $i = 1, 2, \ldots, u$ et $j = 1, 2, \ldots, v$ d'une manière quelconque en une suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv}$, on a

$$(6) \qquad p(x+y) \leqslant M(x+y; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv})$$

et on vérifie facilement que

$$(7) \quad M(x+y; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv}) \leqslant M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u) + M(y; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v).$$

Les rélations (5)—(7) entraînent $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, ce qui prouve, le nombre ε étant supposé arbitraire, que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Ceci établi, considérons donc la fonctionnelle $F(x)$ qui existe en vertu du corollaire.

Or, si $x(s) = 1$, on a $p(x) = 1$ et $p(-x) = -1$ et comme $F(x) \leqslant p(x)$ et $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, on obtient $F(x) = 1$.

Si $x(s) \geqslant 0$, on a $p(-x) \leqslant 0$ et d'autre part $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, donc aussi $F(x) \geqslant 0$.

En outre, la fonctionnelle $F(x)$ possède la propriété de remplir pour tout nombre s_0 l'égalité $F[x(s+s_0)] = F[x(s)]$. Si l'on pose, en effet, $y(s) = x(s+s_0) - x(s)$ et $\alpha_k = (k-1)\, s_0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, on a pour tout n:

$$p(y) \leqslant M(y; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \underset{-\infty < s < +\infty}{\text{borne sup}} [x(s + n s_0) - x(s)],$$

donc $p(y) \leqslant 0$; on obtient d'une façon analogue que $p(-y) \leqslant 0$. Mais $F(y) \leqslant p(y)$ et $F(y) = -F(-y) \geqslant -p(-y)$, d'où $F(y) = 0$.

Ainsi, en désignant par le symbole $\int x(s)\, ds$ la fonctionnelle $\frac{1}{2}\{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$, on a le théorème:

A toute fonction $x(s)$ de la classe E on peut faire correspondre un nombre $\int x(s)\, ds$ de façon que les conditions suivantes (où $x(s)$ et $y(s)$ sont des fonctions arbitraires de la classe E et a, b, s_0 des nombres) *soient remplies*:

$$1) \quad \int [a\, x(s) + b\, y(s)]\, ds = a \int x(s)\, ds + b \int y(s)\, ds,$$

$$2) \quad \int x(s)\, ds \geqslant 0, \textit{ lorsque } x(s) \geqslant 0,$$

$$3) \quad \int x(s+s_0)\, ds = \int x(s)\, ds,$$

$$4) \quad \int x(1-s)\, ds = \int x(s)\, ds,$$

$$5) \quad \int 1\, ds = 1.$$

Il est facile de vérifier que la fonctionnelle $\int x(s)\, ds$, remplissant les conditions 1)—5), reste toujours comprise entre les intégrales riemanniennes inférieure et supérieure de la fonction $x(s)$.

Par conséquent, pour toute fonction intégrable (R) cette fonctionnelle coïncide avec l'intégrale de la fonction.

Pour les fonctions sommables (L) la fonctionnelle en question ne coïncide pas toujours avec leur intégrale (L). Cependant, en partant de l'espace vectoriel G que constitue précisément la classe de ces fonctions et en y définissant la fonctionnelle $f(x)$ comme l'intégrale (L) de la fonction $x(s) \subset G$, le théorème 1 nous fournit une fonctionnelle $F(x)$ définie dans l'espace E et telle que la fonctionnelle $\int ds = \frac{1}{2}\{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$ remplit évidemment toutes les conditions 1) — 5) et coïncide en outre, pour toute fonction sommable (L), avec l'intégrale de cette fonction.

2. Considérons à présent la classe K de tous les ensembles situés sur la circonférence en question et désignons par A_0 la circonférence-même. En posant pour tout ensemble A de cette classe $\mu(A) = \int x(s)\,ds$ où $x(s)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A, donc une fonction de l'espace E envisagé dans **1**, on obtient le théorème:

A tout ensemble A de la classe K on peut attribuer un nombre $\mu(A)$ de façon que les conditions suivantes (où A et B sont des ensembles arbitraires de la classe K) *soient remplies:*

1) $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$, *lorsque* $AB = 0$,

2) $\mu(A) \geqslant 0$,

3) $\mu(A) = \mu(B)$ *pour* $A \cong B$,

4) $\mu(A_0) = 1$.

La fonctionnelle $\mu(A)$, qui remplit les conditions 1) — 4), est comprise entre la mesure jordanienne intérieure et extérieure de l'ensemble A. Par conséquent, pour tout ensemble mesurable (J) cette fonctionnelle coïncide avec la mesure de l'ensemble.

Pour des ensembles mesurables (L) quelconques la fonctionnelle en question ne coïncide pas toujours avec leur mesure (L), mais, tout comme précédemment, on peut s'arranger de façon que cette propriété soit également remplie [1]).

3. Soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées $x(s)$ définies dans $[0, +\infty]$; avec les définitions habituelles des opérations c'est un espace vectoriel.

Pour tout élément $x = x(s)$ de E désignons par $p(x)$ la borne inférieure de tous les nombres $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x(s+\alpha_k)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est une suite finie arbitraire de nombres positifs. On vérifie sans peine que la fonctionnelle $p(x)$, définie ainsi dans l'espace E, satisfait aux hypothèses du corollaire. En désignant par le symbole $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$ [2]) la fonctionnelle $F(x)$, qui existe en vertu de ce corollaire, on a donc le théorème:

A toute fonction $x(s) \subset E$ on peut faire correspondre un nombre $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$ de façon que les conditions suivantes (où $x(s)$ et $y(s)$ sont des fonctions quelconques de E et a, b et $s_0 \geqslant 0$ sont des nombres) *soient remplies:*

1) $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} [a\,x(s) + b\,y(s)] = a \operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s) + b \operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} y(s)$,

2) $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s) \geqslant 0$, *lorsque* $x(s) \geqslant 0$,

3) $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s+s_0) = \operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$,

4) $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} 1 = 1$.

La fonctionnelle $\operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$, remplissant les conditions 1) — 4), est comprise constamment entre $\underline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, x(s)$ et $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, x(s)$. Elle coïncide

---

[1]) Cf. S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae IV (1923), p. 7 — 33.

[2]) le signe Lim désigne ici une certaine „limite" généralisée, le signe lim étant par contre reservé exclusivement pour la limite dans le sens ordinaire.

par conséquent avec $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ toutes les fois que cette limite au sens ordinaire existe.

4. Soit $\{\xi_n\}$ une suite bornée quelconque. Definissons dans l'intervalle $(0, +\infty)$ la fonction $x(s)$ par la convention: $x(s) = \xi_n$ pour $n-1 < s \leqslant n$ et $n = 1, 2, \ldots$ La fonction $x(s)$ appartient donc à l'ensemble E, envisagé dans **3.** En posant $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$, où $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} x(s)$ conserve le sens adopté dans **3**, on a le théorème:

A toute suite bornée $\{\xi_n\}$ *on peut faire correspondre un nombre* $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$ *de façon que les conditions suivantes* (où $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont des suites bornées arbitraires et a et b sont des nombres) *soient remplies:*

1) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} (a\,\xi_n + b\,\eta_n) = a \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n + b \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \eta_n$,

2) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$, *si* $\xi_n \geqslant 0$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$,

3) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$,

4) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Les conditions 1)—4) impliquent que la fonctionnelle $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$ ainsi définie est comprise toujours entre $\varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$ et $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Par conséquent, pour toute suite convergente cette fonctionnelle coïncide avec la limite (au sens ordinaire) de la suite [1]).

---

[1]) Cf. S. Mazur, *O metodach sumowalności*, Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego (en polonais), Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. (1929), p. 102—107, voir p. 103.