CHAPITRE I.

Groupes.

§ **1.** *Définition des espaces du type (G).*

Etant donné un espace (D) complet E, admettons qu'à tout couple ordonné d'éléments x, y de l'espace E vienne correspondre d'une façon univoque un élément z de cet espace appelé *somme de x et y* et que nous désignerons par le symbole $x+y$.

Admettons en outre que E soit un *groupe* par rapport à cette somme, c'est-à-dire que:

I_1. $$(x+y)+z=x+(y+z),$$

I_2. *il existe dans E un élément-zéro Θ tel que l'on a*

$$\Theta+x=x+\Theta=x \text{ pour tout } x \subset E,$$

I_3. *à tout élément x de E correspond un élément* (que nous désignerons par $-x$) *et qui satisfait à l'équation*

$$x+(-x)=\Theta.$$

Il résulte facilement de ces axiomes que:

a) *il n'existe dans E qu'un seul élément-zéro Θ,*
a) *on a $(-x)+x=\Theta$ pour tout $x \subset E$,*
c) *$x+y=x+z$ entraîne $y=z$.*

Admettons encore que les axiomes suivants soient remplis:

II_1. $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{entraîne} \quad \lim_{n\to\infty}(-x_n) = -x,$$

II_2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *entraînent* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Les espaces (D) complets satisfaisant à ces axiomes seront nommés *espaces du type* (G).

Remarque. Nous écrirons $x - y$ au lieu de $x + (-y)$ et $-x + y$ au lieu de $(-x) + y$.

§ 2. *Propriétés des sous-groupes.*

Soit E un espace du type (G). Etant donné un élément $x \subset E$ et un ensemble $H \subset E$, nous désignerons par xH, resp. par Hx, l'ensemble de tous les éléments $y \subset E$ tels que $y = x + z$, resp. que $y = z + x$, où $z \subset H$.

Evidemment, on a toujours les identités

$$x(H_1 + H_2) = xH_1 + xH_2,$$

$$x(H_1 - H_2) = xH_1 - xH_2,$$

$$x(H_1 \cdot H_2) = (xH_1) \cdot (xH_2),$$

et les identités analogues pour $H_1 x$ et $H_2 x$.

On montre facilement que, suivant que H est un ensemble fermé, ouvert, non dense, de I-e, resp. de II-e catégorie, ou mesurable (B), l'ensemble xH est également fermé, ouvert, non dense, etc. Si z est un point intérieur de H, $x + z$ est un point intérieur de xH.

Un ensemble non vide $H \subset E$ porte le nom de *sous-groupe* de E, lorsque les conditions $x \subset H$ et $y \subset H$ entraînent $x + y \subset H$ et $-x \subset H$. On a alors évidemment aussi $\Theta \subset H$.

Un ensemble est dit *connexe*, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles non vides disjoints et fermés dans lui. Si E est un ensemble connexe et H en est un sous-ensemble à la fois fermé et ouvert, on a $H = E$, car autrement l'ensemble $E - H$ serait aussi non vide et fermé.

Théorème 1. *Tout sous-groupe $H \subset E$ qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire, est à la fois fermé et ouvert dans E.*

Démonstration. En vertu du th. 1, p. 13, il existe une sphère ouverte K dans laquelle H est partout de II-e catégorie. On peut évidemment admettre que le centre y_0 de K appartient à H. Comme H remplit la condition de B a i r e, l'ensemble $K - H$ est de I-e catégorie. Or, y_0 étant un point intérieur de K, le point $\Theta = -y_0 + y_0$ est un point intérieur de $(-y_0)K$. Il existe donc une sphère ouverte $K_1 \subset (-y_0) K$ de centre Θ. On a $(-y_0)[K - H] = (y_0) K - (-y_0) H$ et comme $(-y_0) H = H$, puisque H est un sous-groupe, il vient $(-y_0)[K - H] = (-y_0) K - H \supset K_1 - H$, de sorte que, $K - H$ et par conséquent $(-y_0)[K - H]$, étant de I-e catégorie, $K_1 - H$ est aussi de I-e catégorie.

D'autre part, pour tout $x \subset K_1$ on a $x \subset x K_1$, puisque $\Theta \subset K_1$ et $x + \Theta = x$. Par conséquent $K_1 \cdot x K_1 \neq 0$. Il existe donc une sphère ouverte $K_2 \subset K_1 \cdot x K_1$ de centre x. On a $K_2 - H \subset K_1 - H$ et $K_2 - x H \subset x K_1 - x H = x [K_1 - H]$, de sorte que les ensembles $K_2 - H$ et $K_2 - x H$ sont également de I-e catégorie.

Il en résulte que $H \cdot xH \neq 0$; il existe donc un y tel que $y \subset H$ et $y \subset xH$, d'où $-x + y \subset H$ et par conséquent, H étant un sous-groupe, $-x = -x + y - y \subset H$, donc $x \subset H$.

Il est ainsi démontré que $K_1 \subset H$ et, par suite, que Θ est un point intérieur de H. Comme pour tout $y \subset H$ on a $yH = H$ et $y = y + \Theta$, chaque point y de H en est également un point intérieur. H est donc un ensemble *ouvert*.

Pour prouver qu'il est à la fois *fermé*, posons $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ où $y_n \subset H$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ Or, comme $\lim_{n \to \infty} (y - y_n) = \Theta \subset K_1 \subset H$, il existe un n tel que $y - y_n \subset K_1 \subset H$, d'où $y = y - y_n + y_n \subset H$, c. q. f. d.

Ce théorème implique le suivant

Théorème 2. *L'espace E étant connexe, tout sous-groupe $H \subset E$ qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire est identique à E.*

Remarque. Comme tout ensemble mesurable (B) remplit la condition de Baire, les théorèmes 1 et 2 subsistent en particulier, lorsque H est un ensemble mesurable (B).

§ 3. *Opérations additives et linéaires.*

Soient E et E_1 des espaces du type (G) et $U(x)$ une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans E_1.

L'opération $U(x)$ s'appelle *additive*, lorsque

$$U(x+y) = U(x) + U(y) \quad \textit{pour tous} \quad x \subset E \textit{ et } y \subset E.$$

On a alors $U(x) = U(x+\Theta) = U(x) + U(\Theta)$, d'où

$$U(\Theta) = \Theta,$$

et comme $\Theta = U(\Theta) = U(x-x) = U(x) + U(-x)$, on a

$$U(-x) = -U(x).$$

L'opération additive et continue s'appelle *linéaire.*

Théorème 3. *Toute opération additive et continue dans un point est une opération linéaire.*

Démonstration. Soit x_0 un point de continuité de l'opération additive $U(x)$. Soient $x_n \subset E$, $x \subset E$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. On a $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}[U(x_n) - U(x) + U(x_0)] = U(x_0)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$, de sorte que l'opération en question est continue aussi dans le point x arbitraire, c. à. d. qu'elle est linéaire.

Théorème 4. *Toute opération additive mesurable (B) est une opération linéaire.*

Démonstration. En vertu du théorème 4, p. 17, l'opération $U(x)$ considérée remplit la condition de Baire. Elle est donc continue sur un certain ensemble H où $E-H$ est de I-e catégorie. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$. L'ensemble $x_n[E-H] = E - x_n H$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ de I-e catégorie, il en est de-même de l'ensemble

$$(E-H)+\sum_{n=1}^{\infty} x_n [E-H] = E - H + \sum_{n=1}^{\infty} (E - x_n H) \supset E - H \cdot \prod_{n=1}^{\infty} x_n H,$$

qui par conséquent (en vertu du théorème 2, p. 14) n'épuise pas l'espace E. Il existe donc un point x tel que l'on a

$$x \subset H \quad et \quad x \subset x_n H \quad pour\ tout \quad n = 1, 2, \ldots,$$

d'où $(-x_n + x) \subset H$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty} (-x_n + x) = x$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} U(-x_n + x) = U(x)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} [U(-x_n) + U(x)] = U(x)$ et finalement $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. L'opération $U(x)$ est donc continue au point Θ de E et par conséquent elle est linéaire d'après le théorème 3 qui vient d'être démontré.

Remarque. Comme on le voit de la marche du raisonnement, le théorème reste vrai pour les opérations additives qui remplissent la condition de Baire.

Théorème 5. *L'espace E étant connexe, si $\{U_n(x)\}$ est une suite d'opérations linéaires, l'ensemble des points x pour lesquels il existe la limite $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$ est soit de I-e catégorie, soit identique à E.*

La démonstration résulte facilement du théorème 2, p. 22, l'ensemble des points x où la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente étant selon le théorème 9, p. 18, mesurable (B), donc selon le théorème 3, p. 15, remplissant la condition de Baire et, en outre, tout ensemble des points de convergence constituant un groupe.

§ 4. *Un théorème sur la condensation des singularités.*

Théorème 6. *Etant donnés un espace E connexe et une suite double d'opérations linéaires $\{U_{p,q}(x)\}$, si pour une suite de points $\{x_p\}$ la limite $\lim\limits_{q\to\infty} U_{p,q}(x_p)$ n'existe pour aucun $p = 1, 2, \ldots,$ alors l'ensemble H des points x tels que la limite $\lim\limits_{q\to\infty} U_{p,q}(x)$ n'existe* *pour aucun* $x \subset H$ *quel que soit* $p = 1, 2, \ldots,$ *est de II-e catégorie et son complément* $E - H$ *est de I-e catégorie.*

Démonstration. Soit pour tout $p = 1, 2, \ldots$ H_p l'ensemble des points de convergence de la suite $\{U_{p,q}(x)\}$. On a $H_p \neq E$, puisque par hypothèse $x_p \subset E - H_p$. En vertu du théorème 5, p. 24, l'ensemble H_p est de I-e catégorie. Il en est donc de-même de l'ensemble $\sum_{p=1}^{\infty} H_p$, ce qui achève la démonstration, car on a

$$H = E - \sum_{p=1}^{\infty} H_p.$$