Table des matières du tome XCVIII, fascicule 2

Les FUNDAMENTA MATHEMATICAE publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à la *Théorie des Ensembles, Topologie, Fondements de Mathématiques, Fonctions Réelles, Théorie Descriptive des Ensembles, Algèbre Abstraite*

Chaque volume paraît en 3 fascicules

Adresse de la Rédaction:
FUNDAMENTA MATHEMATICAE, Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa (Pologne)

Adresse de l'Échange:
INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa (Pologne)

Tous les volumes sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa (Pologne)

Correspondence concerning editorial work and manuscripts should be addressed to:
FUNDAMENTA MATHEMATICAE, Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa (Poland)

Correspondence concerning exchange should be addressed to:
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES, Exchange
Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa (Poland)

The Fundamenta Mathematicae are available at your bookseller or at
ARS POLONA, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa (Poland)

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLONSKIEGO W KRAKOWIE

Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп

О. В. Белеградек (Кемерово)

Abstract. In this paper we analyze the structure of algebraically closed groups. Our principal result is that there are $2^{\aleph_0}$ $\forall\exists\forall$-types of algebraically closed groups. It solves Macintyre's problem. We prove definability of some interesting infinitary notions for the class of algebraically closed groups. We also prove some theorem on omitting quantifier-free types in generic structures, which is formulated in terms of Q-reducibility. We use this theorem to characterize some embedding properties for algebraically closed groups and semigroups.

В настоящей статье мы продолжаем изучение алгебраически замкнутых групп логическими методами, предпринятое в [7], [8], [1].

Работы А. Макинтайра по алгебраически замкнутым группам и телам [7], [8], [9] показали важность логических методов в этой области. Во-первых, А. Макинтайр продемонстрировал там полезность теоретико-модельного форсинга. Во-вторых, им были выявлены очень интересные связи алгебраически замкнутых систем с теорией алгоритмов. В-третьих, он показал, что некоторые предикаты, которые, вообще говоря, не являются элементарно определимыми, становятся элементарно определимыми в классе алгебраически замкнутых систем.

Статья [7] была посвящена, в основном, доказательству существования элементарно неэквивалентных нетривиальных алгебраически замкнутых групп. Известно, что любые две нетривиальные алгебраически замкнутые группы удовлетворяют одним и тем же $\forall\exists$-предложениям, поэтому вопрос о полноте теории нетривиальных алгебраически замкнутых групп, поставленный Э. Берсом, был вполне оправдан. С этим вопросом связан и вопрос Э. Фишера о совпадении теорий f-генерических и F-генерических групп. А. Макинтайр показал, что теории f-генерических, F-генерических и H-генерических групп, где H — конечно определенная универсальная группа Хигмана, различаются $\forall\exists\forall\exists$-предложениями. Естественно возникают следующие проблемы, сформулированные А. Макинтайром [7].

Существуют ли нетривиальные алгебраически замкнутые группы, различающиеся $\forall\exists\forall$-предложениями? В частности, различаются ли теории f-генерических, F-генерических и H-генерических групп $\forall\exists\forall$-предложениями? Существует ли $2^{\aleph_0}$ элементарных типов алгебраически замкнутых групп?

Все эти проблемы мы решаем здесь положительно. Наш метод отличен от метода А. Макинтайра, и, как нам кажется, значительно проясняет ситуацию. Мы даем более простые доказательства гораздо более сильных фактов. Решающим моментом доказательства является утверждение о том, что тип изоморфизма любой конечно порожденной рекурсивно определенной подгруппы задается в алгебраически замкнутых группах одной формулой. Аналогичное утверждение было доказано ранее В. Я. Беляевым [4] для полугрупп. С помощью этого утверждения, используя методы А. Макинтайра [9], ему удалось построить $2^{\aleph_0}$ элементарных типов алгебраически замкнутых полугрупп. Наш метод позволяет, причем более просто, получить $2^{\aleph_0}$ алгебраически замкнутых полугрупп, попарно различающихся $\forall\exists\forall$-предложениями, чего не давало доказательство В. Я. Беляева.

А. Макинтайр [7] указывал на то, что было бы очень интересно доказать определимость в алгебраически замкнутых группах некоторых естественных предикатов. В настоящей работе нами получено много интересных результатов в этом направлении.

Б. Нейман [11] показал, что конечно порожденная группа с разрешимой проблемой тождества слов вкладывается в любую нетривиальную алгебраически замкнутую группу. А. Макинтайр [8] доказал некоторую теорему об опускании бескванторных типов в генерических системах, из которой следовало, что, если A_1, A_2 — конечно порожденные группы, $\mathfrak{A}(A_2)\subseteq\mathfrak{A}(A_1)$, то $d_T(A_1)\leqslant d_T(A_2)$, где $d_T(A_i)$ — тьюрингова степень неразрешимости проблемы тождества слов группы A_i, $\mathfrak{A}(A_i)$ — класс всех нетривиальных алгебраически замкнутых групп, в которые A_i вкладывается. Эти результаты породили следующий вопрос, сформулированный А. Макинтайром [8]: верно ли, что, если $d_T(A_1)\leqslant d_T(A_2)$, то $\mathfrak{A}(A_2)\subseteq\mathfrak{A}(A_1)$?

Автор решил этот вопрос отрицательно [1], показав, что существует конечно порожденная рекурсивно определенная группа A такая, что $\mathfrak{A}(A) \neq \mathfrak{A}(A * C)$ для любой циклической группы C. В основе этого факта лежит следующая теорема: если A_1, A_2 — конечно порожденные рекурсивно определенные группы, то $\mathfrak{A}(A_2)\subseteq\mathfrak{A}(A_1)$, если и только если $d_Q(A_1)\leqslant d_Q(A_2)$. Здесь $d_Q(A_i)$ — степень неразрешимости проблемы тождества слов A_i относительно Q-сводимости [16], определяемой следующим образом: если B, C — множества натуральных чисел, то $B\leqslant_Q C$ означает, что существует рекурсивная функция f такая, что

$$(\forall x)(x\in B \Leftrightarrow W_{f(x)}\subseteq C).$$

В настоящей статье мы показываем, что, если A_1, A_2 — конечно порожденные подгруппы алгебраически замкнутой группы G, то $A_1\times A_2$ вкладывается в G, то есть $\mathfrak{A}(A_1)\cap\mathfrak{A}(A_2) = \mathfrak{A}(A_1\times A_2)$. Поэтому совокупность классов $\mathfrak{A}(A)$, A — конечно порожденная рекурсивно определенная группа, является нижней полурешеткой относительно $\cap$, которая антиизоморфна верхней полурешетке рекурсивно перечислимых Q-степеней, отличных от Q-степени множества всех натуральных чисел.

Оказывается, Q-сводимость возникает и при изучении других алгебраически замкнутых систем. Мы доказываем некоторый аналог теоремы А. Макинтайра [8], который формулируется в терминах Q-сводимости и в ряде случаев усиливает упомянутую теорему А. Макинтайра. Этот результат мы применяем для доказательства полугруппового аналога нашей теоремы о связи Q-сводимости с алгебраически замкнутыми группами.

Основные результаты данной работы анонсированы в [3].

Я благодарен профессору М. А. Тайцлину за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

§ 1. Определения и обозначения. Группа G называется *алгебраически (экзистенциально) замкнутой*, если любая система уравнений (уравнений и неравенств) с параметрами из G, разрешимая в некоторой группе, содержащей G, разрешима и в G.

Аналогично определяются алгебраически и экзистенциально замкнутые полугруппы.

Б. Нейман [12], [13] показал, что для неединичных групп, полугрупп понятия алгебраической и экзистенциальной замкнутости совпадают.

Мы предполагаем, что читатель знаком с теоретико-модельным форсингом [14], [15].

Системы, генерические относительно конечного форсинга, мы называем *f-генерическими*, относительно бесконечного форсинга — *F-генерическими*.

Пусть K — счетная теория, $\mathfrak{A}$ — система той же сигнатуры, что и K, X порождает $\mathfrak{A}$. Обозначим символом $\Delta_X(\mathfrak{A})$ диаграмму $\mathfrak{A}$ относительно множества порождающих X, то есть $\Delta_X(\mathfrak{A}) = \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})\colon \varphi$ — атомная формула или отрицание атомной формулы, $a_1, \ldots, a_n\in X$, $\mathfrak{A}\models\varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$. Предположим, $K\cup\Delta_X(\mathfrak{A})$ совместно. Мы будем называть $\mathfrak{A}$-генерической (относительно K) редукцию системы, f-генерической относительно $K\cup\Delta_X(\mathfrak{A})$. Нетрудно показать, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора порождающего множества X.

Как известно, f-, F-, $\mathfrak{A}$-генерические группы, полугруппы экзистенциально замкнуты.

Пусть $\mathfrak{A}$ порождается конечным множеством $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (это обстоятельство будет обозначаться так: $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$). Рассмотрим какую-либо гёделевскую нумерацию языка $\Delta_X(\mathfrak{A})$. Q-степенью (T-степенью) системы $\mathfrak{A}$ будем называть Q-степень (T-степень) множества номеров положительных формул из $\Delta_X(\mathfrak{A})$. Легко понять, что это определение фактически не зависит от выбора конечного множества порождающих системы $\mathfrak{A}$. Будем обозначать Q-степень и T-степень $\mathfrak{A}$ символами $d_Q(\mathfrak{A})$ и $d_T(\mathfrak{A})$, соответственно. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ рекурсивно определена, если множество номеров положительных формул из $\Delta_X(\mathfrak{A})$ рекурсивно перечислимо.

Мы закрепим обозначение H за конечно определенной универсальной группой Хигмана [5], заданной порождающими h_0, h_1 и определяющими соотношениями $U_i(h_0, h_1)$, $i<k$.

Далее будут использоваться следующие сокращения:

к.о. — конечно определенная;
к.п. — конечно порожденная;
р.о. — рекурсивно определенная;
р.п. — рекурсивно перечислимое;
а.з. — алгебраически замкнутая;
э.з. — экзистенциально замкнутая.

Мы будем использовать стандартные обозначения:

$$a^b = b^{-1}ab\,, \qquad [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab\,.$$

§ 2. Определимость в экзистенциально замкнутых группах. Пусть P — n-местный предикат на группе G. Мы будем говорить, что P определим в G с помощью формулы (первого порядка) $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$, если для любых $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$

$$(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in P \Leftrightarrow G \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Будем говорить, что предикат P, заданный на любой э.з. группе, определим в классе э.з. групп с помощью формулы φ, если P определим с помощью φ в любой э.з. группе. Фраза „P определим в классе э.з. групп" будет означать, что для некоторой формулы φ предикат P определим в классе э.з. групп с помощью φ.

А. Макинтайр [7] показал, что предикат „$x_0 \in \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$" определим в классе э.з. групп с помощью $\forall$-формулы

$$(\forall v)\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} [v_i, v] = e \rightarrow [v_0, v] = e\Big)\,.$$

Будем обозначать ее через $\varepsilon_n(v_0, \ldots, v_n)$.

Лемма 2.1. *Пусть G-группа, $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in G$. Тогда существует гомоморфизм $\alpha\colon \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \rightarrow G$ такой, что $\alpha(a_i) = b_i$, $i<n$, если и только если существуют группа $G_1 \supseteq G$ и $x, y \in G_1$ такие, что для $i, j<n$*

$$[a_i^x, b_j] = e\,, \tag{1}$$

$$[a_i^x, y] = b_i\,. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, существуют G_1, x, y, удовлетворяющие условиям леммы. Пусть $w \in \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Положим $\alpha(w) = [w^x, y]$. В силу (2) $\alpha(a_i) = b_i$ для $i<n$. Остается показать, что α-гомоморфизм. Достаточно показать, что $\alpha\big(w(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) = w(b_0, \ldots, b_{n-1})$ для любого слова w.

Покажем это индукцией по длине w. Пусть сначала длина w равна 1. Так как $\alpha(a_i) = b_i$, $i<n$, то нужно рассмотреть случай, когда $w(a_0, \ldots, a_{n-1})$ суть a_i^{-1}. Имеем

$$e = [(a_i a_i^{-1})^x, y] = [a_i^x (a_i^{-1})^x, y] = [a_i^x, y]^{(a_i^x)^{-1}}[(a_i^{-1})^x, y] =$$
$$(\text{в силу (2)}) = b_i^{(a_i^x)^{-1}} \cdot [(a_i^{-1})^x, y] = b_i[(a_i^{-1})^x, y]\,.$$

Последнее равенство верно в силу (1). Итак,

$$\alpha(a_i^{-1}) = [(a_i^{-1})^x, y] = b_i^{-1}.$$

Пусть теперь утверждение доказано для длин, меньших длины w, и $w = w_1 w_2$, где w_1, w_2 имеют меньшую, чем w, длину. Имеем

$$\alpha\big(w(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) = [w_1(a_0, \ldots, a_{n-1})^x w_2(a_0, \ldots, a_{n-1})^x, y] =$$
$$= [w_1(a_0, \ldots, a_{n-1})^x, y]^{w_2(a_0, \ldots, a_{n-1})^x} \cdot [w_2(a_0, \ldots, a_{n-1})^x, y] =$$

(в силу предположения индукции)

$$= w_1(b_0, \ldots, b_{n-1})^{w_2(a_0, \ldots, a_{n-1})^x} \cdot w_2(b_0, \ldots, b_{n-1}) =$$

$$(\text{в силу (1)}) = w_1(b_0, \ldots, b_{n-1}) w_2(b_0, \ldots, b_{n-1}) = w(b_0, \ldots, b_{n-1})\,.$$

Итак, α-гомоморфизм.

Пусть теперь существует гомоморфизм $\alpha\colon \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \rightarrow G$ такой, что $\alpha(a_i) = b_i$, $i<n$. Рассмотрим $G \times \langle a_0', \ldots, a_{n-1}'\rangle$, где $\langle a_0', \ldots, a_{n-1}'\rangle$-изоморфная копия $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. В силу [6] существуют $G_0 \supseteq G \times \langle a_0', \ldots, a_{n-1}'\rangle$, $x \in G_0$ такие, что $a_i^x = a_i'$, $i<n$. Ясно, отображение $\beta\colon \langle a_0', \ldots, a_{n-1}'\rangle \rightarrow G$, $\beta(w') = \alpha(xw'x^{-1})$, является гомоморфизмом, $\beta(a_i') = b_i$, $i<n$. Очевидно, отображение $\gamma\colon \langle a_0', \ldots, a_{n-1}'\rangle \rightarrow G_0$, $\gamma(w') = w'\beta(w')$, является мономорфизмом. В силу [6] существуют $G_1 \supseteq G_0$, $y \in G_1$ такие, что для $i<n$ имеем $a_i'^y = a_i'\beta(a_i')$, то есть $[a_i^x, y] = b_i$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Предикат „существует гомоморфизм $\alpha\colon \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \rightarrow \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle$ такой, что $\alpha(a_i) = b_i$ для $i<n$" определим в классе э.з. групп с помощью $\exists$-формулы*

$$(\exists\, xy)\Big(\bigwedge_{\substack{i<n\\ n\leqslant j<2n}} ([v_i^x, v_j] = e \wedge [v_i^x, y] = v_{i+n})\Big)\,.$$

Эту формулу мы обозначим через $\mathrm{Hom}_n(v_0, \ldots, v_{2n-1})$.

Теорема 2.1. *Пусть A — к.п., р.о. группа, $A = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Тогда предикат „существует изоморфизм $\alpha\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \rightarrow A$ такой, что $\alpha(x_i) = a_i$ для $i<n$" определим в классе э.з. групп с помощью $\forall\exists$-формулы.*

Доказательство. Так как A — р.о. группа, то можно считать, что A — подгруппа H. Пусть $a_i = t_i(h_0, h_1)$, $i<n$. Тогда искомой формулой будет

$$(\exists u_0 u_1)\Big(\bigwedge_{j<k} U_j(u_0, u_1) = e \wedge \bigwedge_{i<n} v_i = t_i(u_0, u_1)\Big) \wedge$$
$$\wedge (\forall u_0 u_1)\Big(\bigwedge_{j<k} U_j(u_0, u_1) = e \to \mathrm{Hom}_n\big(v_0, \ldots, v_{n-1}, t_0(u_0, u_1), \ldots, t_{n-1}(u_0, u_1)\big)\Big).$$

Покажем, что эта формула годится для наших целей. Пусть G — э.з. группа, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$.

Предположим сначала, что существует изоморфизм $\alpha\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \to A$ такой, что $\alpha(x_i) = a_i$. Тогда в свободном произведении групп G и H с подгруппой, объединенной согласно изоморфизму α, существуют h_0, h_1 такие, что $U_j(h_0, h_1) = e$, $x_i = t_i(h_0, h_1)$ для $j<k$, $i<n$. Так как G — э.з. группа, то

$$G \models (\exists u_0 u_1)\Big(\bigwedge_{j<k} U_j(u_0, u_1) = e \wedge \bigwedge_{i<n} v_i = t_i(u_0, u_1)\Big).$$

Пусть $g_0, g_1 \in G$, $U_j(g_0, g_1) = e$, $j<k$. Тогда существует гомоморфизм $\beta\colon H \to G$ такой, что $\beta(h_i) = g_i$, $i<2$. Очевидно, $\beta \circ \alpha$ — гомоморфизм, $(\beta \circ \alpha)(x_i) = t_i(g_0, g_1)$ для $i<n$. Отсюда следует, что и вторая часть формулы истинна в G.

Обратно, пусть эта формула истинна в G на элементах $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Тогда существуют $g_0, g_1 \in G$ такие, что $U_j(g_0, g_1) = e$, $x_i = t_i(g_0, g_1)$ для $i<n$. Существует гомоморфизм $\beta\colon H \to G$ такой, что $\beta(h_i) = g_i$, $i<2$. Очевидно, $\beta(a_i) = x_i$ для $i<n$. Мы утверждаем, что β инъективен на A. Действительно, пусть $w(h_0, h_1) \neq e$. Тогда в $G*H$ существуют h_0, h_1 такие, что $U_j(h_0, h_1) = e$ для $j<k$, $w(h_0, h_1) \neq e$. Так как G — э.з.группа, то существуют $b_0, b_1 \in G$ такие, что $U_j(b_0, b_1) = e$ для $j<k$, $w(b_0, b_1) \neq e$. В силу истинности рассматриваемой формулы в G на $x_0, \ldots, x_{n-1}$, существует гомоморфизм $\gamma_w\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \to G$ такой, что $\gamma_w(x_i) = t_i(b_0, b_1)$ для $i<n$. Пусть $w_1(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq e$. Возьмем в качестве $w(h_0, h_1)$ элемент $w_1\big(t_0(h_0, h_1), \ldots, t_{n-1}(h_0, h_1)\big)$. Так как

$$\begin{aligned}(\gamma_w \circ \beta)\big(w_1(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) &= \gamma_w\big(w_1(x_0, \ldots, x_{n-1})\big) = w_1\big(\gamma_w(x_0), \ldots, \gamma_w(x_{n-1})\big) \\ &= w_1\big(t_0(b_0, b_1), \ldots, t_{n-1}(b_0, b_1)\big) = w(b_0, b_1) \neq e,\end{aligned}$$

то $\beta\big(w_1(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) \neq e$. Итак, β изоморфно отображает A на $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$, причем $\beta(a_i) = x_i$ для $i<n$. Теорема доказана.

Обозначим формулу теоремы 2.1 через $\varphi_{A, a_0, \ldots, a_{n-1}}(v_0, \ldots, v_{n-1})$.

Замечание. Если A имеет разрешимую проблему тождества слов, то этот предикат можно определить в классе э.з. групп с помощью $\exists$-формулы. Покажем это. Пусть $\{r_i\colon i<\omega\}$ — множество (групповых) слов от $a_0, \ldots, a_{n-1}$, равных единице в A. Пусть $\{s_i\colon i<\omega\}$ — некоторое рекурсивное множество слов от $a_0, \ldots, a_{n-1}$ такое, что, во-первых, для любых i, i_1, i_2, если $i_1 \neq i_2$, то $s_{i_1}s_{i_2}^{-1} \neq r_i$, и, во-вторых, для любого слова w от $a_0, \ldots, a_{n-1}$ существуют i, j такие, что $w = s_i r_j$. Рекурсивность можно обеспечить за счет разрешимости проблемы тождества слов в A. Рассмотрим группу

$$A_1 = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}, c_0, c_1, c_2 \mid r_i = e,\ c_1^{-j}c_2c_1^{j} = [s_j, c_0]\rangle_{i,\, j<\omega}.$$

Эта группа может быть получена как свободное произведение группы, свободно порожденной c_1, c_2 и группы $A * \langle c_0\rangle$ с подгруппой, объединенной согласно изоморфизму $[s_j, c_0] \to c_1^{-j}c_2c_1^{j}$. Так как A_1 — р.о. группа, то можно считать, что $A_1 \subseteq H$, $a_i = t_i(h_0, h_1)$ для $i<n$, $c_2 = p(h_0, h_1)$. В качестве искомой формулы можно взять

$$(\exists u_0 u_1)\Big(\bigwedge_{j<k} U_j(u_0, u_1) \neq e \wedge p(u_0, u_1) \neq e \wedge \bigwedge_{i<n} v_i = t_i(u_0, u_1)\Big).$$

Нетрудно понять, что эта формула (обозначим её через $\psi_{A, a_0, \ldots, a_{n-1}}(v_0, \ldots, v_{n-1})$ подходит для наших целей. Тем не менее, далее мы заметим (замечание 1 к теореме 3.1), что в случае произвольной к.п., р.о. группы A рассматриваемый предикат нельзя определить в классе э.з. групп даже $\exists\forall$-формулой.

А. Макинтайр [7] показал, что предикат „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ проста" определим к классу э.з. групп с помощью $\forall\exists\forall$-формулы. Фактически им доказано, что для любой э.з. группы G, для любых $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$, $y_0, y_1 \in \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ элемент y_1 принадлежит нормальному замыканию y_0 в $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$, если и только если

$$G \models (\forall v)\Big((\forall u)\big(\varepsilon_n(u, x_0, \ldots, x_{n-1}) \wedge [v, y_0^u] = e\big) \to [v, y_1] = e\Big).$$

Мы дадим более простые доказательства этих фактов, определив эти предикаты с помощью менее сложных формул.

Теорема 2.2. *Для любой э.з. группы G, для любых $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$, $y_0, \ldots, y_{m-1}, y \in \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ элемент y принадлежит нормальному замыканию $\{y_0, \ldots, y_{m-1}\}$ в $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$, если и только если*

$$G \models (\forall u_0, \ldots, u_{n-1}u)\Big(\bigwedge_{\substack{i,j<n\\ s<m}} ([x_i, u_j] = e \wedge [x_i, u] = u_i \wedge [y_s, u] = e) \to [y, u] = e\Big).$$

Доказательство. Пусть y не принадлежит нормальному замыканию $\{y_0, \ldots, y_{m-1}\}$ в $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$. Тогда существует группа $A = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ и гомоморфизм $\alpha\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \to A$ такой, что $\alpha(x_i) = a_i$, $\alpha(y_j) = e$, $\alpha(y) \neq e$ для всех $i<n$, $j<m$. Отображение $\beta\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \to G \times A$ такое, что для любого w верно $\beta(w) = w\alpha(w)$, является мономорфизмом. В силу [6] существуют $G_1 \supseteq G \times A$, $a \in G_1$ такие, что $w^a = w\alpha(w)$ для любого $w \in \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$. Таким образом, в G_1 существуют $a_0, \ldots, a_{n-1}, a$ такие, что $[x_i, a_j] = e$, $[x_i, a] = a_i$, $[y_s, a] = e$, $[y, a] \neq e$ для $i, j<n$, $s<m$. Так как G — э.з. группа, то такие $a_0, \ldots, a_{n-1}, a$ можно выбрать и в G. Следовательно, рассматриваемая формула ложна в G.

Пусть теперь рассматриваемая формула ложна в G. Значит, существуют $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $a \in G$ такие, что $[x_i, a_j] = e$, $[x_i, a] = a_i$, $[y_s, a] = e$, $[y, a] \neq e$ для $i, j<n$, $s<m$. Так же как в лемме 2.1 проверяется, что отображение $\alpha\colon \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \to G$, определенное правилом $\alpha(w) = [w, a]$, является гомоморфизмом. Так как $\alpha(y_s) = e$ при $s<m$, но $\alpha(y) \neq e$, то y не принадлежит нормальному замыканию $\{y_0, \ldots, y_{m-1}\}$ в $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$. Теорема доказана.

Обозначим $\forall$-формулу из теоремы 2.2 через $N_{n,m}(v_0, \ldots, v_{n+m})$. Здесь v_i соответствует x_i при $i \leqslant n$, y_{i-n} при $n \leqslant i < n+m$, y при $i = n+m$.

Следствие 2.2 *Предикат* „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ *проста*" *определим в классе э.з. групп с помощью* $\forall\exists$-*формулы.*

Доказательство. Этот предикат определяется формулой

$$(\forall vw)\big(\varepsilon_n(v, v_0, \ldots, v_{n-1}) \wedge \varepsilon_n(w, v_0, \ldots, v_{n-1}) \wedge v \neq e \rightarrow N_{n,1}(v_0, \ldots, v_{n-1}, v, w)\big).$$

Теорема 2.3. *Предикат* „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ *р.о.*" *определим в классе э.з. групп с помощью* $\exists\forall\exists$-*формулы.*

Доказательство. Пусть F — группа, свободно порождённая элементами a_0, a_1. Искомой формулой будет $R_n(v_0, \ldots, v_{n-1})$:

$$(\exists y_0, \ldots, y_{n-1} z_0 z_1 t)\Big(\psi_{F,a_0,a_1}(z_0, z_1) \wedge \bigwedge_{i,j<n} \big(\varepsilon_2(y_i, z_0, z_1) \wedge [y_i, v_j] = e \wedge [y_i, t] = v_i\big) \wedge$$
$$\wedge (\forall y)\Big(\varepsilon_n(y, y_0, \ldots, y_{n-1}) \rightarrow \big([y, t] = e \leftrightarrow N_{2,k}(z_0, z_1, U_0(z_0, z_1), \ldots$$
$$\ldots, U_{k-1}(z_0, z_1), y)\big)\Big)\Big).$$

Пусть G — э.з. группа, $G \models R_n(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Тогда существуют $b_0, \ldots, b_{n-1}, c_0, c_1, d \in G$ такие, что c_0, c_1 — свободны, $b_i \in \langle c_0, c_1\rangle$, $[b_i, x_j] = e$, $[b_i, d] = x_i$ для $i, j < n$, и для любого $g \in \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle$ элемент g принадлежит N, нормальному замыканию $\{U_i(c_0, c_1)\colon i<k\}$ в $\langle c_0, c_1\rangle$, если и только если $[g, d] = e$. Так же, как в лемме 2.1, показывается, что отображение $\alpha\colon \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \rightarrow G$, определённое правилом $\alpha(g) = [g, d]$, является гомоморфизмом, причём $\alpha(b_i) = x_i$, $\ker(\alpha) = \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \cap N$. Тогда

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \simeq \langle b_0, , \ldots, b_{n-1}\rangle/_{\langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \cap N} \simeq \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle N/_N \subseteq \langle c_0, c_1\rangle/_N.$$

Итак, $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ является подгруппой к.о. группы, и, следовательно, $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ — р.о. группа.

Обратно, пусть $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ — р.о. подгруппа э.з. группы G. Можно считать, что $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \subseteq H$, $x_i = q_i(h_0, h_1)$, $i<n$. Тогда, пользуясь тем, что G — э.з. группа, легко найти $s_0, s_1 \in G$ такие, что $U_j(s_0, s_1) = e$, $x_i = q_i(s_0, s_1)$ для $i<n$, $j<k$. Возьмем в рассуждении замечания к теореме 2.1 F в качестве A. Тогда в $G \times H$ найдутся h_0, h_1 такие, что $U_j(h_0, h_1) = e$, $p(h_0, h_1) \neq e$, $[h_i, s_l] = e$ для $i, l<2$, $j<k$. Так как a_0, a_1 свободны, то существует гомоморфизм $\alpha\colon \langle a_0, a_1\rangle \rightarrow G$ такой, что $\alpha(a_i) = s_i$, $i<2$. Поэтому отображение $\beta\colon \langle a_0, a_1\rangle \rightarrow G \times H$, задаваемое правилом $\beta(w) = w\alpha(w)$, является мономорфизмом. В силу [6] существуют $G_1 \supseteq G \times H$, $f \in G_1$ такие, что $w^f = w\alpha(w)$ для любого $w \in \langle a_0, a_1\rangle$, то есть $[w, f] = \alpha(w)$. Таким образом, существуют $h_0, h_1, f \in G_1$ такие, что $U_j(h_0, h_1) = e$, $p(h_0, h_1) \neq e$, $[h_i, s_l] = e$, $[t_i(h_0, h_1), f] = s_i$ для $i, l<2$, $j<k$. Так как G — э.з. группа, то существуют $r_0, r_1, m \in G$ с такими же свойствами. Так же как в лемме 2.1, проверяется, что существует гомоморфизм $\gamma\colon \langle t_0(r_0, r_1), t_1(r_0, r_1)\rangle \rightarrow G$ такой, что $\gamma\big(t_i(r_0, r_1)\big) = s_i$, $i<2$. Возьмем в качестве значений z_j элементы $t_j(r_0, r_1)$, $j<2$, в качестве значений y_i — элементы $q_i(z_0, z_1)$, $i<n$, в качестве значения t — элемент m.

Ясно, что в G истинны формулы $\psi_{F,a_0,a_1}(z_0, z_1)$; $\varepsilon_2(y_i, z_0, z_1)$, $[y_i, x_j] = e$, $[y_i, t] = x_i$ для $i, j<n$. Остается показать, что для любого $w \in \langle y_0, \ldots, y_{n-1}\rangle$ элемент w принадлежит нормальному замыканию $\{U_j(z_0, z_1)\colon j<k\}$ в $\langle z_0, z_1\rangle$, если и только если $\gamma(w) = e$. Пусть $w = w(y_0, \ldots, y_{n-1})$. Условие $\gamma(w) = e$ равносильно $\gamma\big(w\big(q_0(z_0, z_1), \ldots, q_{n-1}(z_0, z_1)\big)\big) = e$, то есть $w\big(w\big(q_0(\gamma(z_0), \gamma(z_1)\big), \ldots, q_{n-1}\big(\gamma(z_0), \gamma(z_1)\big)\big) = e$, то есть $w\big(q_0(s_0, s_1), \ldots, q_{n-1}(s_0, s_1)\big) = e$. Так как $q_i(s_0, s_1) = x_i$, $i<n$, то имеем, что $\gamma(w) = e$ равносильно $w(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e$. Так как z_0, z_1 свободны, $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ — подгруппа группы H, заданной соотношениями $U_j(h_0, h_1) = e$, $j<k$, $x_i = q_i(h_0, h_1)$, $i<n$, то $w(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e$ равносильно тому, что $w\big(q_0(z_0, z_1), \ldots, q_{n-1}(z_0, z_1)\big)$ принадлежит нормальному замыканию $\{U_j(z_0, z_1) : j = k\}$ в $\langle z_0, z_1\rangle$. Это и есть требуемый результат, так как $q_i(z_0, z_1) = y_i$, $i<n$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Предикат* „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ *имеет разрешимую проблему тождества слов*" *определим в классе э.з. групп с помощью* $\exists\forall\exists\forall$-*формулы.*

Доказательство. Пусть $S_n(v_0, \ldots, v_{n-1})$ обозначает формулу

$$(\exists uvwz)\big(v \neq e \wedge R_{n+4}(v_0, \ldots, v_{n-1}, u, v, w, z) \wedge$$
$$\wedge (\forall y)\big(\varepsilon_n(y, v_0, \ldots, v_{n-1}) \wedge y \neq e \rightarrow (\exists q)\big(\varepsilon_2(q, w, z) \wedge v^q = [y, u]\big)\big)\big).$$

Пусть G — э.з. группа, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in G$. Покажем, что $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ имеет разрешимую проблему тождества слов, если и только если $G \models S_n(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Пусть сначала $G \models S_n(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Тогда существуют $a, b, c, d \in G$ такие, что $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, c, d\rangle$ р.о. и для любого $g \in \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$, $g \neq e$, существует $h \in \langle c, d\rangle$ такой, что $b^h = [g, a]$. Так как $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, c, d\rangle$ — р.о. группа, то множество слов от $x_0, \ldots, x_{n-1}$, равных единице в G, р.п. Ясно, что слово g от $x_0, \ldots, x_{n-1}$ не равно единице в G, если и только если существует слово h от c, d такое, что $b^h = [g, a]$. Но множество таких g р.п. в силу того, что $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, c, d\rangle$ — р.о. группа. Поэтому $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ имеет разрешимую проблему тождества слов.

Пусть $A_0 = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ имеет разрешимую проблему тождества слов. Мы утверждаем, что для доказательства теоремы достаточно доказать следующий факт.

Лемма. *Пусть* $\{r_i\colon i<\omega\}$ — *множество всех слов от* $x_0, \ldots, x_{n-1}$, *равных единице в* A_0, $\{g_i\colon i<\omega\}$ — *множество всех слов от* $x_0, \ldots, x_{n-1}$, *не равных единице в* A_0. *Пусть* $A = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, c, d \mid r_i = e, [g_i, a] = b^{d^{-i}cd^i}\rangle_{i<\omega}$. *Тогда* $A_0 \subseteq A$, A *имеет разрешимую проблему тождества слов.*

Действительно, предположим, что лемма верна. Тогда в силу теоремы Б. Неймана [11], A вложима в G. С помощью сопряжения можно добиться, чтобы A вкладывалось в G над A_0. Легко видеть, что тогда $G \models S_n(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Итак, докажем лемму. Ясно, что A можно задать как

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, c, d, t_i, l_i \mid r_i = e, b = t_i, [g_i, a] = t_i^{l_i}, l_i = d^{-i}cd^i\rangle_{i<\omega}.$$

Пусть $F(c, d)$, $F(a, b)$, $F(t_i, l_i)$ — группы, свободно порождённые $\{c, d\}$,

$\{a, b\}$, $\{t_i, l_i\}$, соответственно, $i<\omega$. Обозначим через A_1 группу

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, l_i, t_i | \ r_i = e, b = t_i, [g_i, a] = t_i^{l_i} \rangle_{i<\omega}.$$

Легко видеть, что $\langle l_i\colon i<\omega\rangle$ свободно порождается множеством $\{l_i\colon i<\omega\}$. Поэтому A можно представить в виде $A_1 \underset{l_i=d^{-i}cd^i\ (i<\omega)}{*} F(c, d)$. Так как в $F(c, d)$ разрешима проблема тождества слов и проблема вхождения в $\langle d^{-i}cd^i\colon i<\omega\rangle$, то достаточно показать, что $A_0 \subseteq A_1$, и в A_1 разрешимы проблемы тождества слов и вхождения в $\langle l_i\colon i<\omega\rangle$. Пусть

$$B_i = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b, t_i, l_i | \ r_i = e, b = t_i, [g_i, a] = t_i^{l_i} \rangle .$$

Так как $b, [g_i, a]$ свободны в $A_0 * F(a, b)$, а $t_i, t_i^{l_i}$ свободны в $F(t_i, l_i)$, то

$$B_i = (A_0 * F(a, b)) \underset{b=t_i, [g_i, a]=t_i^{l_i}}{*} F(t_i, l_i) .$$

Ясно, что $A_1 = * \prod_{\substack{A_0 * F(a,b) \\ i<\omega}} B_i$. В группе B_i разрешима проблема тождества слов и проблема вхождения в $A_0 * F(a, b)$. Действительно, в $F(t_i, l_i)$ разрешима проблема тождества слов и проблема вхождения в $\langle t_i, t_i^{l_i}\rangle$, а в $A_0 * F(a, b)$ — проблема тождества слов и проблема вхождения в $\langle b, [g_i, a]\rangle$, так как в A_0 разрешима проблема тождества слов. В силу этого в A_1 разрешима проблема тождества слов. Используя то, что $l_i \notin A_0 * F(a, b)$ в B_i, теперь нетрудно показать, что в A_1 разрешима проблема вхождения в $\langle l_i\colon i<\omega\rangle$. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказана.

В [2] нами доказана следующая

Теорема. *Пусть K — абстрактный класс групп такой, что существует конструктивизируемая (то есть допускающая представление с разрешимой проблемой тождества слов) группа U, все к.п. подгруппы которой принадлежат K, и в которую вложима любая к.п. группа из K. Тогда предикат „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in K$" определим в классе э.з. групп с помощью $\exists\forall$-формулы.*

Условиям теоремы удовлетворяют, например, классы свободных, нильпотентных, конечных групп.

Теорема 2.5. *Предикат „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ разрешима" определим в классе э.з. групп с помощью $\exists\forall$-формулы.*

Доказательство. Пусть S_m — свободная, m — ступенно разрешимая группа ранга n, $U = \prod_{m<\omega} S_m$. В силу разрешимости проблемы тождества слов в свободных разрешимых группах группа U конструктивизируема. Пусть K — класс всех к.п. групп, вложимых в U. В силу сформулированной выше теоремы предикат „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in K$" определим в классе э.з. групп с помощью некоторой $\exists\forall$-формулы $\Phi_n(v_0, \ldots, v_{n-1})$. Легко понять, что предикат „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ разрешима" определим в классе э.з. групп с помощью

$\exists\forall$-формулы $(\exists u_0 \ldots u_{n-1})(\Phi_n(u_0, \ldots, u_{n-1}) \wedge \mathrm{Hom}_n(u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}))$. Теорема доказана.

Методы, развитые здесь и в [2], позволяют доказывать определимость в классе э.з. групп большого числа естественных, но весьма „сложных" предикатов. Например, используя следствие 2.1 и определимость предиката „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ конечна", легко доказать определимость в классе э.з. групп предиката „$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ финитно аппроксимируема".

Тем не менее, существуют, конечно, предикаты, не определимые в классе э.з. групп, так как формул существует только счётное число, а типов изоморфизма к.п. групп — $2^{\aleph_0}$. Возникает естественный вопрос: какие предикаты определимы в классе э.з. групп? Более конкретный вопрос: какие к.п. группы определимы в классе э.з. групп (в смысле теоремы 2.1)? Автору неизвестны ответы на эти интересные вопросы.

Примечание при корректуре. В. Я. Беляев и М. А. Тайцлин решили эти вопросы (IV Всес. конф. по мат. лог. Кишинев, стр. 11).

§ 3. Генерические группы и их теории. Решая проблемы Э. Берса и Э. Фишера, А. Макинтайр показал, что теории f-генерических, F-генерических и H-генерических групп различаются $\forall\exists\forall\exists$-предложениями. Возник вопрос [7]: различаются ли эти теории $\forall\exists\forall$-предложениями? С другой стороны, естественно спросить, можно ли получать новые элементарные типы э.з. групп, рассматривая теории A-генерических групп и варьируя к.п. группу A. Мы решаем оба эти вопроса.

Пусть $K_{\forall\exists\forall}^{f,A}$, $K_{\forall\exists\forall}^{F}$ — множества $\forall\exists\forall$-предложений, истинных на всех A-генерических и F-генерических группах, соответственно, и $\mathscr{G}(A)$ — класс всех A-генерических групп.

Теорема 3.1. *Пусть A_0, A_1 — к.п., р.о. группы. Тогда*

а) *если $d_Q(A_0) = d_Q(A_1)$, то $\mathscr{G}(A_0) = \mathscr{G}(A_1)$;*

б) *если $d_Q(A_0) \neq d_Q(A_1)$, то $K_{\forall\exists\forall}^{f,A_0} \neq K_{\forall\exists\forall}^{f,A_1}$ (в частности, $\mathscr{G}(A_0) \cap \mathscr{G}(A_1) = \varnothing$).*

Доказательство. Сразу отметим, что любые две A-генерические группы элементарно эквивалентны. Это следует из того, что теория групп обладает амальгамационным свойством [14].

а) было доказано автором в [1].

Докажем б). Пусть $d_Q(A_0) \neq d_Q(A_1)$, например, пусть $d_Q(A_0) \nleq d_Q(A_1)$. Тогда существует A_1-генерическая группа, в которую A_0 не вкладывается. (Этот факт был доказан нами в [1], но мы докажем более общий факт в § 5 этой статьи). Пусть $A_0 = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Тогда $\forall\exists\forall$ — предложение

$$(\forall v_0 \ldots v_{n-1}) \neg \varphi_{A_0, a_0, \ldots, a_{n-1}}(v_0, \ldots, v_{n-1})$$

принадлежит $K_{\forall\exists\forall}^{f,A_1}$, но не принадлежит $K_{\forall\exists\forall}^{f,A_0}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства видно, что роль $\varphi_{A_0, a_0, \ldots, a_{n-1}}$ не могла бы играть $\exists\forall$-формула, так как все э.з. группы $\forall\exists$-эквивалентны.

Замечание 2. Предположение о рекурсивной определимости A_0, A_1 в теореме существенно. Чтобы показать это, достаточно заметить, что существует к.п. группа A такая, что теория A-генерических групп совпадает с теорией генерических групп, но класс A-генерических групп отличен от класса генерических групп. В [7] отмечается, что в любой э.з. группе имеется к.п. подгруппа с неразрешимой проблемой тождества слов. Рассмотрим такую подгруппу A в генерической группе G. Е. А. Палютин обратил внимание на то, что G является B-генерической группой для любой своей подгруппы B. Отсюда следует, что теория A-генерических групп совпадает с теорией генерических групп, и вместе с тем существует генерическая группа, в которую A не вкладывается, так как A имеет неразрешимую проблему тождества слов [8].

Замечание 3. Из доказательства теоремы 3.1 видно, что к.п., р.о. подгруппами f-генерической группы являются к.п. подгруппы с разрешимой проблемой тождества слов и только они. Возникает естественный вопрос: какие группы могут быть вложены в генерическую группу? Автору неизвестен ответ на этот вопрос.

Теорема 3.2. *Пусть A — к.п., р.о. группа. Тогда $K^F_{\forall\exists\forall} \neq K^{f,A}_{\forall\exists\forall}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $d_Q(A) < d_Q(H)$. Тогда в силу результатов [1] (или результатов § 5) существует A-генерическая группа, в которую H не вкладывается. Но H может быть вложена в F-генерическую группу [15]. Поэтому $\forall\exists\forall$-предложение $(\forall v_0 v_1) \neg \varphi_{H,h_0,h_1}(v_0, v_1)$ принадлежит $K^{f,A}_{\forall\exists\forall}$, но не принадлежит $K^F_{\forall\exists\forall}$. Пусть теперь $d_Q(A) \nless d_Q(H)$, а, значит, и $d_Q(A) = d_Q(H)$, так как A вложима в H. Тогда в силу теоремы 3.1 понятия A-генерической и H-генерической группы совпадают. Поэтому нужно показать, что $K^F_{\forall\exists\forall} \neq K^{f,H}_{\forall\exists\forall}$. Пусть G — H-генерическая группа. А. Макинтайр показал, что любая к.п. подгруппа G является р.о. группой. Учитывая, что любой изоморфизм к.п. подгрупп группы G индуцируется внутренним автоморфизмом G, получаем, что

$$G \models (\forall v_0 v_1 v_2 v_3)\big(\varphi_{H_0,h,h_1}(v_0, v_1) \to (\exists v)\big(\varepsilon_2(v_2^v, v_0, v_1) \wedge \varepsilon_2(v_3^v, v_0, v_1)\big)\big).$$

Но эта $\forall\exists\forall$-формула не принадлежит $K^F_{\forall\exists\forall}$. Действительно, рассмотрим F-генерическую группу G_1, в которую вложены H и некоторая 2-порождённая, не р.о. группа $A_0 = \langle a_0, a_1 \rangle$. Так как A_0 не вложима в H, то

$$G_1 \models \varphi_{H,h_0,h_1}(h_0, h_1) \wedge \neg(\exists v)\big(\varepsilon_2(a_0^v, h_0, h_1) \wedge \varepsilon_2(a_1^v, h_0, h_1)\big).$$

Теорема доказана.

В заключение параграфа отметим ещё один открытый вопрос. Будет ли f-генерической любая э.з. группа, элементарно эквивалентная f-генерической группе?

Примечание при корректуре. Автор доказал, что это верно.

§ 4. Число элементарных типов алгебраически замкнутых групп. В этом параграфе мы решаем проблему А. Макинтайра [7] о числе элементарных типов а.з. групп.

Лемма 4.1. *Существует счётное множество 2-порождённых р.о. групп $\{A_i\colon i<\omega\}$ такое, что для любого $I \subseteq \omega$ существует э.з. группа G_I, в которую A_i вкладывается, если и только если $i \in I$.*

Из этой леммы и теоремы 2.1 следует

Теорема 4.1. *Существует счётное множество $\{\varphi_i\colon i<\omega\}$ $\forall\exists\forall$-предложений такое, что для любого $I \subseteq \omega$ существует э.з. группа G_I, в которой φ_i истинно, если и только если $i \notin I$. В частности, существует $2^{\aleph_0}$ э.з. групп, попарно различающихся $\forall\exists\forall$-предложениями.*

Действительно, в качестве φ_i можно взять формулу $(\forall v_0 v_1) \neg \varphi_{A_i,a_i,b_i}(v_0, v_1)$. (Здесь $A_i = \langle a_i, b_i \rangle$.)

Доказательство леммы 4.1. Простым следствием теоремы Сакса [16] о том, что любой счётный частичный порядок может быть вложен в частичный порядок р.п. тьюринговых степеней, является следующий факт. Существует последовательность $\{d_i\colon i<\omega\}$ р.п. тьюринговых степеней такая, что, если $i_0 \neq i_1, \ldots, i_n$, то $d_{i_0} \nleqslant d_{i_1} \cup \ldots \cup d_{i_n}$. Действительно, пусть $P = \omega \cup S_\omega(\omega)$, где $S_\omega(\omega)$ — множество всех конечных подмножеств множества ω всех натуральных чисел, и пусть $x<y$ означает, что $x \in \omega$, $y \in S_\omega(\omega)$, $x \in y$. Пусть α — вложение этого частичного порядка в частичный порядок р.п. тьюринговых степеней. Положим $d_i = \alpha(i)$. Предположим, $i_0 \neq i_1, \ldots, i_n$. Тогда $d_{i_0} = \alpha(i_0) \nleqslant \alpha(\{i_1, \ldots, i_n\})$. Так как для $1 \leqslant j \leqslant n$ верно $\alpha(i_j) \leqslant \alpha(\{i_1, \ldots, i_n\})$, то $d_{i_1} \cup \ldots \cup d_{i_n} \leqslant \alpha(\{i_1, \ldots, i_n\})$. Поэтому $d_{i_0} \nleqslant d_{i_1} \cup \ldots \cup d_{i_n}$ и, значит, последовательность $\{d_i\colon i<\omega\}$ удовлетворяет нужным условиям.

Пусть A_i — 2-порождённая р.о. группа такая, что $d_T(A_i) = d_i$. Мы утверждаем, что $\{A_i\colon i<\omega\}$ обладает требуемыми свойствами. Пусть $I \subseteq \omega$, $A_I = \prod_{i \in I} A_i$. Мы покажем, что для любого $i_0 \notin I$ существует A_I — генерическая группа, в которую A_{i_0} не вкладывается. Так как все A_I — генерические группы элементарно эквивалентны, то в силу теоремы 2.1 в любой A_I-генерической группе для любого $i_0 \notin I$ нет подгруппы, изоморфной A_{i_0}.

Пусть группа A_i порождается элементами a_i, b_i. Тогда $\prod_{i \in I} A_i$ порождается множеством $\{a_i, b_i\colon i \in I\}$. Пусть Δ_I — диаграмма $\prod_{i \in I} A_i$ относительно этого множества порождающих, Δ_i — диаграмма A_i относительно a_i, b_i, причём константу для a_i обозначим через u_i^0, для b_i — через u_i^1.

Мы будем использовать в форсинге счётное множество $\{c_n\colon n<\omega\}$ форсинговых констант.

Покажем, что для любого $K \cup \Delta_I$ — условия p (здесь K — теория групп), для любых групповых слов w^0, w^1 от $\{u_i^0, u_i^1, c_n\colon i \in I, n<\omega\}$ существуют $K \cup \Delta_I$ — условие $q \supseteq p$ и базисная формула $\varphi(u_{i_0}^0, u_{i_0}^1)$ такие, что либо

$\varphi \notin \Delta_{i_0}$, $q \Vdash \varphi(w^0, w^1)$, либо $\varphi \in \Delta_{i_0}$, $q \Vdash \neg\varphi(w^0, w^1)$. Как легко видеть, достаточно показать, что $\Delta_{i_0} \neq \{\varphi(u_{i_0}^0, u_{i_0}^1)$: φ — базисная формула, $K \cup \Delta_I \cup p \vdash \varphi(w^0, w^1)\}$. Предположим, что последнее не верно, то есть

$$K \cup \Delta_I \cup p \vdash \Delta_{i_0}(w^0, w^1)\,.$$

Пусть $J = \{i \in I$: u_i^0 или u_i^1 встречается в p, или в w^0, или в $w^1\}$. Ясно, J — конечное множество. Пусть $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$, Δ_J — диаграмма $\prod_{i \in J} A_i$ относительно $\{a_i, b_i$: $i \in J\}$. Легко видеть, что $K \cup \Delta_J \cup p \vdash \Delta_{i_0}(w^0, w^1)$. Действительно, если это неверно, то существует базисная формула $\varphi(w^0, w^1)$ такая, что $\varphi(w^0, w^1) \notin \Delta_{i_0}(w^0, w^1)$, $K \cup \Delta_J \cup p \cup \{\varphi(w^0, w^1)\}$ имеет модель, которая представляет собой группу G с выделенными элементами для константных символов, встречающихся в p, w^0, w^1. Ясно, что $G \times \prod_{i \in I - J} A_i$ является моделью $K \cup \Delta_I \cup p \cup \{\varphi(w^0, w^1)\}$ если интерпретировать u_i^0 как a_i, u_i^1 как b_i для $i \in I - J$. Это противоречит $K \cup \Delta_I \cup p \vdash \Delta_{i_0}(w^0, w^1)$. Итак, $K \cup \Delta_J \cup p \vdash \Delta_{i_0}(w^0, w^1)$. Но тогда $d_{i_0} = d_T(\Delta_{i_0}) \leqslant d_T(\Delta_J) = d_{i_1} \cup \ldots \cup d_{i_n}$. Это противоречит выбору последовательности $\{d_i$: $i < \omega\}$, так как $i_0 \neq i_1, \ldots, i_n$ в силу $i_0 \notin J$.

Теперь стандартным образом [8], [1] строится полная последовательность $K \cup \Delta_I$ — условий, определяющая нужную нам $\prod_{i \in I} A_i$ — генерическую группу. Теорема доказана.

Замечание. В. Я. Беляев [4] доказал, что существует $2^{\aleph_0}$ элементарных типов а.з. полугрупп. В его доказательстве использовались методы [9]. С помощью этих методов не удавалось построить $2^{\aleph_0}$ а.з. полугрупп, различающихся $\forall\exists\forall$-предложениями. Но В. Я. Беляев показал, что для полугрупп верна теорема, аналогичная нашей теореме 2.1. (Следует отметить, что этот его результат и стимулировал настоящую работу.) Рассуждая как в доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что существует $2^{\aleph_0}$ а.з. полугрупп, различающихся $\forall\exists\forall$-предложениями.

§ 5. Q-сводимость и алгебраически замкнутые системы. В этом параграфе мы продемонстрируем, что обнаруженная нами [1] связь Q-сводимости с алгебраически замкнутыми группами в действительности не обусловлена спецификой групп, а наблюдается для весьма широкого класса теорий. Мы докажем теорему, которая в ряде случаев уточняет результат А. Макинтайра [8]. Эту теорему мы применим для получения полугруппового аналога основного результата [1].

Теорема 5.1. *Пусть K — рекурсивно аксиоматизируемая мультипликативно устойчивая теория счётного языка L, $\mathfrak{A}$ — к.п., р.о. L-система, вложимая в модель K. Пусть $\{\mathfrak{A}_n$: $n < \omega\}$ — счётная последовательность к.п. L-систем такая, что $d_Q(\mathfrak{A}_n) \nleqslant d_Q(\mathfrak{A})$ для любого $n < \omega$. Тогда существует $\mathfrak{A}$-генерическая (относительно K) система, в которую $\mathfrak{A}_n$ не вложима для любого $n < \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, $\mathfrak{A}_n = \langle b_1, \ldots, b_{k_n}\rangle$, Δ-диаграмма $\mathfrak{A}$ относительно $a_1, \ldots, a_k$ в терминах констант $d_1, \ldots, d_k$, Δ_n — диаграмма $\mathfrak{A}_n$ относительно $b_1, \ldots, b_{k_n}$ в терминах констант $u_1, \ldots, u_k$.

Так же как в [8], достаточно доказать, что для любого $n < \omega$, для любого $K \cup \Delta$ — условия p, для любых термов $t_1, \ldots, t_{k_n}$ языка $\bar{L}$, полученного добавлением к L констант $\{d_1, \ldots, d_k, c_i$: $i < \omega\}$, неверно, что

$$(*) \qquad K \cup \Delta \cup p \vdash \Delta_n(t_1, \ldots, t_{k_n})\,.$$

Мы покажем, что если бы $(*)$ было верно, то $\Delta_n^+ \leqslant_Q \Delta^+$ что противоречило бы $d_Q(\mathfrak{A}_n) \nleqslant d_Q(\mathfrak{A})$.

Итак, предположим $(*)$. Построим рекурсивную функцию $g(x, y)$ такую, что x является номером формулы из Δ_n^+, если и только если для любого $y < \omega$ число $g(x, y)$ является номером формулы из Δ^+.

Пусть k_0 не является номером никакой атомной формулы языка $L(d_1, \ldots, d_k)$. Если x не является номером атомной формулы языка $L(u_1, \ldots, u_{k_n})$, то для любого $y < \omega$ положим $g(x, y) = k_0$. Пусть x — номер атомной формулы $\varphi(u_1, \ldots, u_{k_n})$ языка $L(u_1, \ldots, u_{k_n})$. Так как K рекурсивно аксиоматизируема, $\mathfrak{A}$ р.о., то множество $K_\varphi = K \cup \Delta^+ \cup p^+ \cup \{\varphi(t_1, \ldots, t_{k_n})\}$ р.п. Тогда существует эффективная последовательность $\{\alpha_i^\varphi$: $i < \omega\}$ атомных формул языка $\bar{L}$, выводимых из K_φ, и существует эффективная последовательность $\{\beta_i^\varphi$: $i < \omega\}$ атомных формул языка $L(d_1, \ldots, d_k)$, выводимых из K_φ, причем алгоритмы перечисления находятся по φ эффективно. Для $y < \omega$ положим

$$g(x, y) = \begin{cases} k_0, \text{ если существует } i < y \text{ такое, что } \neg\alpha_i^\varphi \in p; \\ \text{номер } \beta_y^\varphi \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, g — рекурсивная функция.

Предположим, x — номер формулы φ из Δ_n^+. Так как $K \cup \Delta \cup p$ непротиворечиво, $K \cup \Delta \cup p \vdash \varphi(t_1, \ldots, t_{k_n})$, то не существуют $i, j < \omega$ такие, что $\neg\alpha_i^\varphi \in p$, $\neg\beta_j^\varphi \in \Delta$. Поэтому для любого $y < \omega$ в этом случае $g(x, y)$ — номер формулы β_y^φ, причем $\beta_y^\varphi \in \Delta^+$.

Пусть теперь x — номер формулы φ, не принадлежащей Δ_n^+. Тогда существует $i < \omega$ такое, что $\neg\alpha_i^\varphi \in \Delta \cup p$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда для любой формулы $\sigma \in \Delta \cup p$ совокупность формул $K \cup \Delta^+ \cup p^+ \cup \{\varphi(t_1, \ldots, t_{k_n}), \sigma\}$ непротиворечива, и, значит, имеет модель $\mathfrak{M}_\sigma$. В силу мультипликативной устойчивости K декартово произведение всех моделей $\mathfrak{M}_\sigma$, $\sigma \in \Delta \cup p$, является моделью для $K \cup \Delta \cup p \cup \{\varphi(t_1, \ldots, t_{k_n})\}$. Так как $\neg\varphi \in \Delta_n$, то $K \cup \Delta \cup p \vdash \neg\varphi(t_1, \ldots, t_{k_n})$, противоречие. Если существует $i < \omega$ такое, что $\neg\alpha_i^\varphi \in p$, то $g(x, i+1) = k_0$. Если же это не так, то, во-первых, $g(x, y)$ является номером β_y^φ для любого $y < \omega$, во-вторых, существует $i < \omega$ такое, что $\neg\alpha_i^\varphi \in \Delta$, и, следовательно, существует $y < \omega$ такое, что $\beta_y^\varphi \in \Delta$. Итак, в любом случае существует $y < \omega$ такое, что $g(x, y)$ не является номером формулы из Δ^+.

Таким образом, функция g обладает свойствами, гарантирующими $\Delta_n^+ \leqslant_Q \Delta$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть A_1, A_2 — к.п., р.о. полугруппы. Тогда A_1 вложима в любую э.з. полугруппу, в которую вложима A_2, если и только если $d_Q(A_1) \leqslant d_Q(A_2)$.*

Доказательство. Если $d_Q(A_1) \nleqslant d_Q(A_2)$, то в силу теоремы 5.1 существует A_2-генерическая полугруппа, в которую A_1 не вкладывается. Так как любая A_2-генерическая полугруппа является э.з. полугруппой, то необходимость доказана.

Пусть теперь $d_Q(A_1) \leqslant d_Q(A_2)$. Сначала пусть A_2 — единичная полугруппа. Тогда A_1 имеет разрешимую проблему тождества слов. Покажем, что A_1 вложима в любую э.з. полугруппу.

Пусть $A_1 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $\{w_i\colon i<\omega\}$ — рекурсивная последовательность слов от $a_1, \ldots, a_n$ такая, что все w_i различны в A_1, и любое слово от $a_1, \ldots, a_n$ равно в A_1 некоторому w_i.

Рассмотрим группу G, заданную порождающими $\{b_i\colon i<\omega\}$ и определяющими соотношениями $b_i^{-1} b_0 b_i = b_0^i$, $i<\omega$. Для любого гомоморфизма α этой группы, для любых $i, j<\omega$, если $\alpha(b_0^i) = \alpha(b_0^j)$, $i \neq j$, то $\alpha(b_0) = \alpha(e)$. Используя [6], легко показать, что $b_0 \neq e$ в G.

Пусть A_3 — свободное произведение полугрупп A_1 и G. Рассмотрим полугруппу A_4, которая задаётся порождающими $\{a_1, \ldots, a_n, \tau, \sigma, b_i\colon i<\omega\}$ и определяющими соотношениями полугруппы A_3 плюс $\{\tau w_i \sigma = b_0^i\colon i<\omega\}$. В силу [13], A_3 естественным образом вложена в A_4. Ясно, A_4 — р.о. полугруппа. Следовательно [10], A_4 вкладывается в некоторую к.о. полугруппу A, порождённую элементами g_0, g_1 и заданную определяющими соотношениями $U_i = V_i$, $i<k$. Пусть $a_i = t_i(g_0, g_1)$, $b_0 = p(g_0, g_1)$, $e = q(g_0, g_1)$, где e — единица группы G, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть B — э.з. полугруппа. Очевидно, в $A * B$ существуют x_0, x_1 такие, что $U_i(x_0, x_1) = V_i(x_0, x_1)$, $p(x_0, x_1) \neq q(x_0, x_1)$, $i<k$. Тогда такие x_0, x_1 можно выбрать и в B. Для этих x_0, x_1 существует гомоморфизм $\alpha\colon A \to B$ такой, что $\alpha(g_i) = x_i$, $i = 0, 1$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что α инъективен на A_1, то есть $\alpha(w_i) \neq \alpha(w_j)$ при $i \neq j$. Действительно, если $\alpha(w_i) = \alpha(w_j)$, то, $\alpha(b_0^i) = \alpha(b_0^j)$, значит, $\alpha(b_0) = \alpha(e)$, а это противоречит $p(x_0, x_1) \neq q(x_0, x_1)$.

Итак, в случае, когда A_2 — единичная полугруппа, всё доказано.

Пусть теперь A_2 имеет более одного элемента, $A_2 = \langle a_1', \ldots, a_m' \rangle$. Рассмотрим группу F_1, порождённую элементами c_u, u — слово от $a_1, \ldots, a_n$, заданную определяющими соотношениями $c_{u_1} = c_{u_2}$ для всех пар u_1, u_2 таких, что $u_1 = u_2$ в A_1. Аналогично для A_2 определяется группа F_2, её порождающими будут c_w', w — слово от $a_1', \ldots, a_m'$, а её определяющими соотношениями $c_{w_1}' = c_{w_2}'$, где $w_1 = w_2$ в A_2. Легко видеть, что $c_{u_1} = c_{u_2}$ в F_1, если и только если $u_1 = u_2$ в A_1, и, аналогично, $c_{w_1}' = c_{w_2}'$ в F_2, если и только если $w_1 = w_2$ в A_2.

Пусть Δ_1 — диаграмма A_1 в терминах порождающих $a_1, \ldots, a_n$, Δ_2 — диаграмма A_2 в терминах порождающих $a_1', \ldots, a_m'$. (Для упрощения обозначений мы не будем различать элемент полугруппы и соответствующий константный символ.) Пусть N_i — множество номеров формул из Δ_i^+, $i = 1, 2$. Так как $d_Q(A_1) \leqslant d_Q(A_2)$, то существует рекурсивная функция $g(x, y)$ такая, что

$$(\forall x)\big(x \in N_1 \Leftrightarrow (\forall y)\, g(x, y) \in N_2\big).$$

Пусть Σ_1 — множество всех слов от $a_1, \ldots, a_n$, Σ_2 — множество всех слов от $a_1', \ldots, a_m'$. Так как A_2 — неединичная полугруппа, то существуют $w_0, v_0 \in \Sigma_2$ такие, что $w_0 \neq v_0$ в A_2. Определим эффективные функции $f_i\colon \Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \omega \to \Sigma_2$, $i = 1, 2$, такие, что $u_1 = u_2$ в A_1, если и только если $f_1(u_1, u_2, y) = f_2(u_1, u_2, y)$ в A_2 для любого $y<\omega$. Пусть $u_1, u_2 \in \Sigma_1$, $y<\omega$, x — номер $u_1 = u_2$. Если $g(x, y)$ — номер формулы вида $w_1 = w_2$, где $w_1, w_2 \in \Sigma_2$, то $f_i(u_1, u_2, y) = w_i$, $i = 1, 2$. Если же это не так, то

$$f_1(u_1, u_2, y) = w_0, \quad f_2(u_1, u_2, y) = v_0.$$

Рассмотрим группу R, заданную порождающими $c_u, c_w', t_{u_1,u_2,y}, q_{u_1,u_2,y}$ ($u_1, u_2, u \in \Sigma_1$, $w \in \Sigma_2$, $y<\omega$) и определяющими соотношениями

(1) $$c_{u_1} = c_{u_2} \quad (u_1, u_2 \in \Sigma_1,\ u_1 = u_2 \text{ в } A_1);$$

(2) $$c_{w_1}' = c_{w_2}' \quad (w_1, w_2 \in \Sigma_2,\ w_1 = w_2 \text{ в } A_2);$$

(3) $$(c_{u_1} c_{u_2}^{-1})^{t_{u_1,u_2,y}} \cdot (c_{u_1} c_{u_2}^{-1})^{q_{u_1,u_2,y}} = c'_{f_1(u_1,u_2,y)} c'^{-1}_{f_2(u_1,u_2,y)} \quad (u_1, u_2 \in \Sigma_1,\ y<\omega).$$

Используя лемму 7 из [7], легко показать, что группа $F_1 * F_2$ естественно вложена в R. Так как A_1, A_2 — р.о. полугруппы, f — эффективная функция, то R — р.о. группа.

Рассмотрим р.о. полугруппу $A_1 * A_2 * R$. Добавим к порождающим этой полугруппы буквы τ, σ и к её определяющим соотношениям добавим соотношения

(4) $$\tau u \sigma = c_u \quad (u \in \Sigma_1);$$

(5) $$\tau c_w' \sigma = w \quad (w \in \Sigma_2).$$

В силу [13] $A_1 * A_2 * R$ естественным образом вложена в полученную р.о. полугруппу A_3. В силу [10] A_3 вкладывается в некоторую к.о. полугруппу A, порождённую элементами g_0, g_1 и заданную определяющими соотношениями $U_i = V_i$, $i<k$. Пусть $a_i = p_i(g_0, g_1)$, $a_j' = r_j(g_0, g_1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

В. Я. Беляев [4] доказал, что для любого $m \geqslant 1$ существует $\exists$-формула языка теории полугрупп $\varphi_m(v_0, \ldots, v_{2m-1})$ такая, что для любой полугруппы S, для любых $b_1, \ldots, b_m, b_1', \ldots, b_m' \in S$ существует гомоморфизм $\alpha\colon \langle b_1, \ldots, b_m \rangle \to \langle b_1', \ldots, b_m' \rangle$ такой, что $\alpha(b_i) = b_i'$, если и только если существует полугруппа $S_1 \supseteq S$ такая, что $S_1 \models \varphi_m(b_1, \ldots, b_m, b_1', \ldots, b_m')$.

Пусть A_2 — подполугруппа э.з. группы B. Возьмём в качестве S полугруппу $B * A$. Так как существует изоморфизм $\alpha\colon \langle r_1(g_0, g_1), \ldots, r_m(g_0, g_1)\rangle \to B$ такой, что $\alpha(r_i(g_0, g_1)) = a'_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то существует $S_1 \supseteq B * A$ такая, что

$$S_1 \models (\exists v_0 v_1)\Big(\bigwedge_{i<k} U_i(v_0, v_1) = V_i(v_0, v_1) \wedge \varphi_m(r_1(v_0, v_1), \ldots, r_m(v_0, v_1), a'_1, \ldots, a'_m)\Big).$$

Так как B — э.з. полугруппа, то эта формула истинна и в B. Пусть $x_0, x_1 \in B$, $U_i(x_0, x_1) = V_i(x_0, x_1)$ для $i<k$, и существует гомоморфизм

$$\beta\colon \langle r_1(x_0, x_1), \ldots, r_m(x_0, x_1)\rangle \to B$$

такой, что $\beta(r_i(x_0, x_1)) = a'_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Существует гомоморфизм $\gamma\colon A \to B$ такой, что $\gamma(g_i) = x_i$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что γ инъективен на подполугруппе A_2 полугруппы A. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что γ инъективен на A_1. Действительно, пусть $u_1, u_2 \in \Sigma_1$, $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$. Тогда $\gamma(c_{u_1}) = \gamma(c_{u_2})$ в силу соотношений (4). В силу соотношений (3) для любого $y<\omega$ имеем $\gamma(c'_{f_1(u_1,u_2,y)}) = \gamma(c'_{f_2(u_1,u_2,y)})$. Тогда в силу соотношений (5) $\gamma(f_1(u_1, u_2, y)) = \gamma(f_2(u_1, u_2, y))$ для любого $y<\omega$, и, значит, в силу инъективности γ на A_2 имеем $f_1(u_1, u_2, y) = f_2(u_1, u_2, y)$ для любого $y<\omega$. По выбору f_1, f_2, имеем $u_1 = u_2$ в A_1. Теорема доказана.

Напомним, что для к.п. группы A мы обозначаем через $\mathfrak{A}(A)$ класс всех э.з. групп, в которые A вложима. Совокупность классов $\mathfrak{A}(A)$ частично упорядочена по включению. Результаты [1] показывают, что для к.п., р.о. групп A этот частичный порядок антиизоморфен частичному порядку р.п. Q-степеней, отличных от Q-степени множества всех натуральных чисел. Как известно, этот частичный порядок является верхней полурешеткой. Легко понять, что наименьшей верхней гранью $d_Q(A_1)$, $d_Q(A_2)$ является степень $d_Q(A_1 \times A_2)$. При упомянутом антиизоморфизме этим степеням сопоставляются $\mathfrak{A}(A_1)$, $\mathfrak{A}(A_2)$, $\mathfrak{A}(A_1 \times A_2)$, соответственно. Мы покажем сейчас, что $\mathfrak{A}(A_1) \cap \mathfrak{A}(A_2) = \mathfrak{A}(A_1 \times A_2)$. Это означает, что совокупность классов $\mathfrak{A}(A)$, A — к.п., р.о. группа, образует нижнюю полурешетку относительно операции пересечения, которая антиизоморфна верхней полурешетке р.п. Q-степеней, отличных от Q-степени множества всех натуральных чисел.

Теорема 5.3. *Пусть G — а.з. группа, A_1, A_2 — к.п. подгруппы G. Тогда $A_1 \times A_2$ вкладывается в G.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$, $A_2 = \langle b_0, \ldots, b_{m-1}\rangle$. Мы утверждаем, что достаточно найти $x, y, z \in G$ такие, что

(1) $$[b_i^z, b_j] = e, \quad i, j<m;$$

(2) $$[b_i, y] = b_i^z, \quad i<m;$$

(3) $$[a_i^x, b_j] = e, \quad i<n,\ j<m;$$

(4) $$[a_i^x, y] = e, \quad i<n.$$

Оказывается, в этом случае $\langle a_0^x, \ldots, a_{n-1}^x, b_0, \ldots, b_{m-1}\rangle$ разлагается в прямое произведение подгрупп $\langle a_0^x, \ldots, a_{n-1}^x\rangle$, $\langle b_0, \ldots, b_{m-1}\rangle$. Действительно, эти

подгруппы поэлементно перестановочны в силу (3). Покажем, что их пересечение тривиально. Пусть $v = v(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in \langle a_0^x, \ldots, a_{n-1}^x\rangle$. Тогда в силу (4) $[v, y] = e$. Но так же как в лемме 2.1, используя (1), (2), нетрудно показать, что $[v, y] = v^z$. Итак, $v^z = e$, поэтому $v = e$.

Чтобы найти в G такие x, y, z, достаточно найти такие x, y, z в некотором расширении G, так как G — а.з. группа. Пусть $\langle b'_0, \ldots, b'_{m-1}\rangle$ — изоморфная копия A_2. В силу [6] существуют группа $G_1 \supseteq G \times \langle b'_0, \ldots, b'_{m-1}\rangle$ и $z \in G_1$ такие, что $b_i^z = b'_i$, $i<m$. Отображение $\alpha\colon A_2 \to G_1$, $\alpha(v(b_0, \ldots, b_{m-1})) = v(b_0, \ldots, b_{m-1})v(b'_0, \ldots, b'_{m-1})$ является мономорфизмом. Поэтому в силу [6] существуют $G_2 \supseteq G_1$, $y \in G_2$ такие, что для любого $v = v(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in A_2$ имеем $v^y = v \cdot v(b'_0, \ldots, b'_{m-1})$, то есть $[v, y] = v^z$. Рассмотрим изоморфную копию $\langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}\rangle$ группы A_1. В силу [6] существуют группа $G_3 \supseteq G_2 \times \langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}\rangle$ и $x \in G_3$ такие, что $a_i^x = a'_i$, $i<n$. Очевидно, элементы x, y, z группы G_3, содержащей G, удовлетворяют (1)–(4). Теорема доказана.

Литература

[1] О. В. Белеградек, *Об алгебраически замкнутых группах*, Алгебра и логика 13 (3) (1974), стр. 239–255.

[2] — *Об определимости в алгебраически замкнутых группах*, Мат. заметки 16 (3) (1974), стр. 375–380.

[3] — *Об алгебраически замкнутых группах*, III Всесоюзная конференция по математической логике, Новосибирск 1974, стр. 12–14.

[4] В. Я. Беляев, *Элементарные типы алгебраически замкнутых полугрупп*, III Всесоюзная конференция по математической логике, Новосибирск 1974, стр. 18–19.

[5] G. Higman, *Subgroups of finitely presented groups*, Proc. Roy. Soc. London (A) 262 (1961), pp. 455–475.

[6] — B. H. Neumann and H. Neumann, *Embedding theorems for groups*, J. London Math. Soc. 24 (1949), pp. 247–254.

[7] A. Macintyre, *On algebraically closed groups*, Ann. of Math. 96 (1972), pp. 53–97.

[8] — *Omitting quantifier-free types in generic structures*, J. Symb. Logic 37 (1972), pp. 512–520.

[9] — *On algebraically closed division rings*, preprint.

[10] В. Л. Мурский, *Изоморфная вложимость полугруппы с перечислимым множеством определяющих соотношений в конечно определённую полугруппу*, Мат. заметки 1 (2) (1967), стр. 217–224.

[11] B. H. Neumann, *The isomorphism problem for algebraically closed groups*, in: *Word problems*, Amsterdam–London 1973, pp. 553–562.

[12] — *A note on algebraically closed groups*, J. London Math. Soc. 27 (1952), pp. 247–249.

[13] — *Algebraically closed semigroups*, Studies in Pure Math., New York (1971), pp. 185–194.

[14] A. Robinson and J. Barwise, *Completing theories by forcing*, Ann. of Math. Logic 2 (1970), pp. 119–142.

[15] — *Infinite forcing in model theory*, Proc. of the Second Scand. Logic Symp. 1970, pp. 317–340.

[16] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, New York 1967.

Accepté par la Rédaction le 15. 1. 1975