О независимости точек метрического пространства

M. Lassak (Bydgoszcz)

Abstract. Let X be a metric space with metric d. A set $A \subset X$ is called *d-convex* if for any $x, z \in A$, $y \in X$ from the condition $d(x, y)+d(y, z) = d(x, z)$ it follows that $y \in A$. d-convex hull $d\text{-conv}\, B$ of the set $B \subset X$ is the intersection of all d-convex sets containing B.

We call the set $T \neq \emptyset$ him-*independent* if $\bigcap_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\}) \neq \emptyset$, cim-*independent* if $d\text{-conv}\, T \neq \bigcup_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$, and rim-*independent* if from $T = P \cup S$ and $P \cap S = \emptyset$ it follows that $d\text{-conv}\, P \cap d\text{-conv}\, S = \emptyset$.

Helly's (*Caratheodory's*, *Radon's*) *number* $\operatorname{him} X$ ($\operatorname{cim} X$, $\operatorname{rim} X$) of X is the minimum number for which an analog of classical Helly's (Caratheodory's, Radon's) theorem in which the convexity is changed into d-convexity is satisfied.

The following and a few other results have been proved in this paper. $\operatorname{him} X$ ($\operatorname{cim} X$, $\operatorname{rim} X$) is equal to the maximum number t for which a set of $t+1$ him(cim, rim)-independent points exists. Each him-independent set of X is rim-independent and $\operatorname{him} X \leqslant \operatorname{rim} X$. The subset of him (rim)-independent set is him(rim)-independent.

As is pointed out at the end of this paper, the majority of results, among them results mentioned above, can be transferred (without esential changes of their proofs) also onto the general case when X is an axiomatic convexity structure. In Euclidean space, him-, cim-, rim-, and linear independence of points are equivalent.

Аналогично понятию аффинной независимости точек линейного пространства вводится и исследуется в этой работе три вида независимости точек метрического пространства. Роль аналога размерности линейного пространства играют здесь (см. теоремы 7, 8, 9) размерности Хелли, Каратеодори и Радона (см. определения 2, 3, 4) метрического пространства. Соответствующие им виды независимости называем him-*независимостью*, cim-*независимостью* и rim-*независимостью* (см. определение 6). Оказывается, что для случая евклидого и вообще конечномерного вещественного строго нормированного пространства все эти три вида независимости, а также афинная независимость точек эквивалентны (см. теорему 14).

В конце работы приведены обобщения некоторых результатов для аксиоматических структур выпуклости, а также для изотонных операций.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой d.

Определение 1. Множество $A \subset X$ называется *d-выпуклым*, если для любых точек $x, z \in A$, $y \in X$, из условия $d(x, y)+d(y, z) = d(x, z)$ следует, что $y \in A$ [8].

Понятие d-выпуклости является основным для определении и результатов этой работы. Напомним, что d-выпуклость исследуется в ряде публикации, как для конечномерных нормированных пространств (по поводу некоторых свойств см. [3]), так и для произвольных метрических пространств [5].

В произвольном метрическом пространстве X пустое множество, каждое одноточечное множество и все пространство X являются d-выпуклыми.

Для любого множества $K \subset X$ определяется его d-выпуклая оболочка как наименьшее d-выпуклое множество, содержащее K и обозначается через $d\text{-conv}K$. Из легко проверяемого факта, что пересечение любой совокупности d-выпуклых множеств является d-выпуклым, вытекает существование d-выпуклой оболочки $d\text{-conv}K$ для произвольного $K \subset X$.

Следуя обзору [1] для d-выпуклости также рассматривается размерности (числа) Хелли, Каратеодори и Радона.

Определение 2. *Размерностью Хелли* $\operatorname{him} X$ непустого метрического пространства X называется такое минимальное неотрицательное целое число h, что любое конечное семейство, содержащее не менее чем $h+2$ d-выпуклых множеств из X, имеет непустое пересечение как только в нем имеет непустое пересечение каждое подсемейство с $h+1$ множествами. Если для X такого числа не существует, то полагается $\operatorname{him} X = \infty$. Будем считать, что пустое пространство имеет размерность Хелли, равную -1.

Определение 3. *Размерностью Каратеодори* $\operatorname{cim} X$ метрического пространства X называем такое минимальное целое число $k \geqslant -1$, что для любого $S \subset X$ и любой точки $x \in d\text{-conv}S$ существует $k+1$ точек (не обязательно различных) множества S, d-выпуклой оболочке которых принадлежит x. Если для X такого числа не существует, то полагаем $\operatorname{cim} X = \infty$.

Определение 4. *Размерностью Радона* $\operatorname{rim} X$ метрического пространства X назовем такое минимальное целое число r, что всякое множество $T \subset X$ с не менее чем $r+2$ точками можно разбить на два непересекающихся подмножества S, P, для которых $d\text{-conv}S \cap d\text{-conv}P \neq \varnothing$. Если для X такого числа не существует, то положим $\operatorname{rim} X = \infty$. Множества S и P будем называть *частями Радона множества* T.

Непосредственно из указанных определений следуют неравенства

$$-1 \leqslant \operatorname{him} X \leqslant \infty, \quad -1 \leqslant \operatorname{cim} X \leqslant \infty \quad \text{и} \quad -1 \leqslant \operatorname{rim} X \leqslant \infty .$$

Заметим, что эти размерности достигают значения -1 тогда и только тогда, когда $X = \varnothing$. Нетрудно проверить, что $\operatorname{him} X = 0$ ($\operatorname{rim} X = 0$) только в случае, когда X состоит из одной точки, а $\operatorname{cim} X = 0$ — тогда и только тогда, когда пространство X непустое и каждое его подмножество является d-выпуклым.

В n-мерном евклидовом пространстве E_n d-выпуклость совпадает с выпуклостью [8]. Классические теоремы Хелли, Каратеодори и Радона (см. [1] и литература к ней) можно, при введенных выше обозначениях, записать в форме неравенств, соответственно $\operatorname{him} E_n \leqslant n$, $\operatorname{cim} E_n \leqslant n$, $\operatorname{rim} E_n \leqslant n$. Легко проверить, что фактически выполняются равенства (см. также следствие 6).

Определение 5. *Семейство* $\mathscr{B}$ d-выпуклых множеств метрического пространства X назовем d-*базисом* пространства X, если каждое d-выпуклое множество из X является пересечением некоторого набора множеств семейства $\mathscr{B}$.

Очевидно, семейство $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X)$ всех d-выпуклых множеств пространства X является d-базисом максимальным по включению среди всех d-базисов пространства X.

Лемма 1. *Семейство $\mathscr{B} \subset 2^X$ является d-базисом метрического пространства X тогда и только тогда, когда оно состоит из d-выпуклых множеств, X является элементом $\mathscr{B}$ и для произвольного d-выпуклого множества $A \subset X$ и точки $p \notin A$ существует $B \in \mathscr{B}$, для которого $p \notin B$ и $A \subset B$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ d-базис пространства X. Очевидно, $X \in \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}$ состоит из d-выпуклых множеств. Пусть $A \subset X$ d-выпуклое множество и $p \notin A$. Так как A является пересечением некоторого набора базисных множеств, то точка p не принадлежит некоторому множеству B этого набора. Очевидно, $A \subset B \in \mathscr{B}$.

Проверим лемму в обратную сторону, т.е. покажем, что произвольное d-выпуклое множество $A \subset X$ является пересечением некоторого семейства множеств из $\mathscr{B}$. Для $A = X$ это тривиально. Пусть $A \neq X$. Тогда для каждого $p \notin A$ существует такое множество $A_p \in \mathscr{B}$, что $p \notin A_p \supset A$ и, следовательно, $A = \bigcap_{p \notin A} A_p$.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{A}_p$ — семейство всех максимальных d-выпуклых, не содержащих данной точки $p \in X$, множеств метрического пространства X. Семейство $\mathscr{A} = \{X\} \cup \bigcup_{p \in X} \mathscr{A}_p$ является d-базисом, минимальным по включению среди всех d-базисов пространства X.*

Доказательство. Используя лемму 1, покажем сначала, что $\mathscr{A}$ является d-базисом. Очевидно $\mathscr{A}$ состоит из d-выпуклых множеств и $X \in \mathscr{A}$. Пусть $A \subset X$ произвольное собственное d-выпуклое множество и $p \notin A$. Через $\mathscr{A}'_p$ обозначим семейство всех d-выпуклых множеств пространства X, не содержащих точки p. $\mathscr{A}'_p$ непусто, ибо $A \in \mathscr{A}'_p$. Пусть $\mathscr{K} = \{K_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ произвольное, упорядоченное по включению подсемейство семейства $\mathscr{A}'_p$. Из того, что $\mathscr{K}$ является линейно упорядоченным семейством d-выпуклых множеств вытекает d-выпуклость множества $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$. (Действительно, пусть $x, z \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, $y \in X$ и $d(x,y)+d(y,z) = d(x,z)$. В силу упорядоченности $\mathscr{K}$ существует такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $x, z \in K_{\lambda_0}$. На основе d-выпуклости множества K_{λ_0} имеем $y \in K_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$). Так как $p \notin K_\lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$, то $p \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$. Следовательно, множество $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \in \mathscr{A}'_p$ является верхней границей для семейства $\mathscr{K}$. В силу леммы Цорна-Куратовского из того, что $A \in \mathscr{A}'_p$ вытекает существование такого максимального элемента B семейства $\mathscr{A}'_p$, для которого $A \subset B$. Таким образом, $B \in \mathscr{A}_p$ и $p \notin B \supset A$. Из леммы 1 получаем, что $\mathscr{A}$ является d-базисом пространства X.

Теперь покажем, что d-базис $\mathscr{A}$ является минимальным по включению среди всех d-базисов пространства X. Пусть $\mathscr{B}$ произвольный d-базис пространства X. Пусть $A \in \mathscr{A}\setminus\{X\}$, в силу определения семейства $\mathscr{A}$ существует такая точка $p \in X$, что A является максимальным d-выпуклым множеством, не содержащим p. Так как $p \notin A$, то на основе леммы 1 найдется такое множество $B \in \mathscr{B}$, что $p \notin B \supset A$. Из максимальности множества A вытекает равенство $B = A$ и, следовательно, $A \in \mathscr{B}$. Таким образом, справедливо включение $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. Теорема 1 доказана.

Семейство $\mathscr{A} = \mathscr{A}(X)$ будем называть *минимальным d-базисом метрического пространства X*.

Определение 6. Множество T метрического пространства X назовем him-*независимым*, если $T = \emptyset$ или

$$\bigcap_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\}) = \emptyset \tag{1}$$

cim-*независимым*, если $T = \emptyset$ или

$$d\text{-conv}\,T \neq \bigcup_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\}) \tag{2}$$

rim-*независимым*, если T не разлагается на части Радона.

Если $T = \{x_0, \ldots, x_t\} \subset X$, то будем просто говорить, что точки $x_0, \ldots, x_t$ соответственно him-, cim-, rim-*независимы*. Множество, которое не является him- (аналогично cim-, rim-) независимым назовем him- (аналогично cim-, rim-) *зависимым*.

Пусть $\mathscr{B}$ — некоторый d-базис метрического пространства X.

Теорема 2. *Множество $T \subset X$ является* him-*независимым тогда и только тогда, когда для любого $p \in X$ существует множество d-базиса $\mathscr{B}$, не содержащее p и содержащее все кроме, быть может, одной точки множества T.*

Доказательство. Для $T = \emptyset$ теорема очевидна. Пусть $T \subset X$ — непустое him-независимое множество и пусть $p \in X$. В силу (1) существует такое $a \in T$, что $p \notin d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$. Из леммы 1 вытекает существование базисного множества, содержащего $d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$ и не содержащего точки p.

Докажем теперь теорему в обратную сторону. Пусть для любого $p \in X$ существует множество d-базиса $\mathscr{B}$, не содержащее точки p и содержащее все, быть может кроме одной, точки из T. Допустим, что T является him-зависимым множеством, т.е. допустим, что $\bigcap_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\}) \neq \emptyset$. Пусть p_0 — точка этого множества. Тогда существует такое $B \in \mathscr{B}$ и такая точка $a_0 \in T$, что $p_0 \notin B$ и $B \supset T\setminus\{a_0\}$. Следовательно, в силу d-выпуклости B, имеем $p_0 \notin d\text{-conv}(T\setminus\{a_0\}) \supset \bigcap_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$. А это противоречит выбору точки p_0, и таким образом, множество T является him-независимым.

Теорема 3. *Непустое множество $T \subset X$ является* cim-*независимым тогда и только тогда, когда существует такая точка $p \in d\text{-conv}\,T$, что каждое собственное подмножество множества T содержится в некотором, несодержащем точки p, множестве d-базиса $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Пусть $T \subset X$ является cim-независимым множеством. В силу (2) существует такая точка $p \in d\text{-conv}\,T$, что $p \notin \bigcup_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$. Следовательно, для собственного подмножества T' множества T имеем соотношение $p \notin d\text{-conv}\,T'$. На основе леммы 1 существует такое $B \in \mathscr{B}$, что $B \supset d\text{-conv}\,T' \supset T'$ и $p \notin B$.

Покажем теперь обратную импликацию. Пусть $p \in d\text{-conv}\,T$ и пусть каждое собственное подмножество множества T есть подмножеством некоторого, не содержащего точки p множества d-базиса $\mathscr{B}$. Допустим, что T является cim-зависимым. Тогда $\bigcup_{a\in T} d\text{-conv}(T\setminus\{a\}) = d\text{-conv}\,T$ и, следовательно, существует такая точка a_0, что $p \in d\text{-conv}(T\setminus\{a_0\})$. Если в качестве собственного подмножества множества T взять $T' = d\text{-conv}(T\setminus\{a_0\})$ то получаем противоречие с предположением. Следовательно, T является cim-независимым множеством.

Теорема 4. *Множество $T \subset X$ является* rim-*независимым тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in X$ и для произвольного разложения T на два непересекающиеся подмножества существует множество d-базиса $\mathscr{B}$, содержащее одно из них и не содержащее точки p.*

Доказательство. Пусть $p \in X$. Если множество T rim-независимое, то по определению 6 для такого разложения $T = T_1 \cup T_2$, что $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ имеем $d\text{-conv}\,T_1 \cap d\text{-conv}\,T_2 = \emptyset$ и, следовательно, p не принадлежит одному из множеств $d\text{-conv}\,T_1$, $d\text{-conv}\,T_2$. Пусть, например, $p \notin d\text{-conv}\,T_1$. Тогда, в силу леммы 1, существует такое $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \supset d\text{-conv}\,T_1 \supset T_1$ и $p \notin B$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что из rim-зависимости множества T следует существование такого $p \in X$ и такого разложения $T = T_1 \cup T_2$ ($T_1 \cap T_2 = \emptyset$) что всякое базисное множество, содержащее одно из множеств T_1, T_2 содержит и точку p. Это действительно так, ибо в качестве T_1 и T_2 достаточно взять (существующие в силу rim-зависимости T) части Радона множества T и в качестве p — любую точку из (непустого по определению 4) множества $d\text{-conv}\,T_1 \cap d\text{-conv}\,T_2$. Теперь если базисное множество B содержит одно из множеств T_1, T_2, то, в силу d-выпуклости B, оно содержит и одно из множеств $d\text{-conv}\,T_1$, $d\text{-conv}\,T_2$, а значит, и точку p.

Теорема 5. *Каждое подмножество* him-*независимого* (rim-*независимого*) *множества метрического пространства* X *является* him-*независимым* (rim-*независимым*).

Доказательство. Пусть T является him-независимым и $T'\subset T$. Воспользуемся теоремой 2, которая имеет вид эквивалентности двух условий. Так как T удовлетворяет первому из этих условий, то удовлетворяет и второму. Из второго условия вытекает, что ему, вместе с T, удовлетворяет и подмножество T'. Следовательно, для T' верно первое условие, т.е. T' является him-независимым множеством.

Второе утверждение теоремы 5 вытекает непосредственно из определения rim-независимости.

Замечание 1. Подмножество cim-независимого множества может и не быть cim-независимым. Для примера рассмотрим подмножество $M=\{(-1,1),(1,1),(-1,-2),(1,-2),(-1,0),(1,0),(0,0)\}$ евклидовой плоскости. Очевидно M с естественным расстоянием является метрическим пространством. Заметим, что точки $(-1,1),(1,1),(-1,-2),(1,-2)$ пространства M cim-независимые, но каждые три из них cim-зависимые.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

Лемма 2. *Пусть* $A\subset X$. *Для всякой точки* $x\in d\text{-conv}A$ *существует конечное множество точек из* A, d-*выпуклой оболочке которых принадлежит точка* x.

Доказательство. Через A' обозначим множество тех точек пространства X, каждая из которых принадлежит d-выпуклой оболочке конечного множества точек из A. Покажем сначала, что A' является d-выпуклым. Пусть $x,z\in A'$ и пусть $y\in X$ такая точка, для которой

$$d(x,y)+d(y,z)=d(x,z)\,. \tag{3}$$

Существуют такие точки $x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_n\in A$, что

$$x\in d\text{-conv}\{x_1,\ldots,x_m\} \quad \text{и} \quad z\in d\text{-conv}\{z_1,\ldots,z_n\}\,.$$

В силу (3) $y\in d\text{-conv}\{x,z\}$ и, следовательно,

$$y\in d\text{-conv}(d\text{-conv}\{x_1,\ldots,x_m\}\cup d\text{-conv}\{z_1,\ldots,z_n\})=$$
$$=d\text{-conv}\{x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_n\}\subset A'\,.$$

Таким образом, A' является d-выпуклым. Так как $d\text{-conv}A$ есть наименьшее d-выпуклое множество, содержащее A, то из очевидного включения $A\subset A'\subset d\text{-conv}A$ и d-выпуклости множества A' вытекает, что $A'=d\text{-conv}A$. Следовательно, лемма 2 доказана.

Теорема 6. *Каждое* cim-*независимое множество метрического пространства* X *является конечным*.

Доказательство. Допустим, что в пространстве X существует бесконечное cim-независимое множество T. Покажем, что это предположение приводит к равенству

$$d\text{-conv}T=\bigcup_{a\in T}d\text{-conv}(T\setminus\{a\})\,,$$

т.е. противоречит с (2). Включение

$$d\text{-conv}T\supset\bigcup_{a\in T}d\text{-conv}(T\setminus\{a\})$$

очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x\in d\text{-conv}T$. В силу леммы 2, существуют такие точки $x_1,\ldots,x_s\in T$, что $x\in d\text{-conv}\{x_1,\ldots,x_s\}$ а в силу бесконечности T существует точка $a_0\in T$, отличная от всех x_i, $i=1,\ldots,s$. Следовательно,

$$x\in d\text{-conv}\{x_1,\ldots,x_s\}\subset d\text{-conv}\{T\setminus\{a_0\}\}\subset\bigcup_{a\in T}d\text{-conv}(T\setminus\{a\})\,.$$

Таким образом, каждое cim-независимое множество пространства X имеет конечное количество точек.

Замечание 2. Теорема 6 не имеет аналога для him- и rim-независимости. Действительно, множество произвольной мощности с расстоянием между любыми двумя различными точками, равным 1, образует метрическое пространство, в этом пространстве всякое множество является him-независимым и rim-независимым.

Теорема 7. *Пусть* X — *метрическое пространство и* $h\geqslant -1$ — *целое число. Тогда ниже указанные условия* (a) *и* (в) *эквивалентны*:

(a) $\text{him}X=h$.

(в) *существует в* X *набор из* $h+1$ him-*независимых точек и каждое множество из более чем* $h+1$ *точек пространства* X him-*зависимое*.

Для $h\geqslant 1$ *этим условиям эквивалентно и следующее*:

(c) *существует в* X *такое семейство из* $h+1$ (*но не существует семейства из более чем* $h+1$) d-*выпуклых множеств без общей точки, что если отбросить любое из них, то остальные имеют непустое пересечение*.

Доказательство. Так как равенство $\text{him}X=-1$ происходит только для $X=\emptyset$ и $\text{him}X=0$ — только для пространства X, состоящего из одной точки, то для $h=-1$ и $h=0$ эквивалентность условий (a) и (в) проверяется непосредственно на основе определения him-независимости. Пусть $h\geqslant 1$.

(a) $\Rightarrow$ (c). Из определения 2 следует существование конечной, не обладающей общей точкой, совокупности $\mathcal{K}$ d-выпуклых множеств пространства X, каждые h элемента которой имеют непустое пересечение. Если предположить, что и каждые $h+1$ множеств из $\mathcal{K}$ пересекаются, то, в силу определения размерности Хелли, общую точку имеют и все множества из $\mathcal{K}$, что противоречит выбору $\mathcal{K}$. Следовательно, в $\mathcal{K}$ можно найти $h+1$ d-выпуклых множеств $M_0,\ldots,M_h$, для которых верно соотношение.

$$(4) \qquad M_0 \cap \ldots \cap M_h = \varnothing .$$

Так как каждые h множеств из $\mathscr{K}$ обладают непустым пересечением, имеем

$$(5) \qquad M_0 \cap \ldots \cap M_{i-1} \cap M_{i+1} \cap \ldots \cap M_h \neq \varnothing, \quad i = 0, \ldots, h .$$

Таким образом, мы показали одну часть условия (с). Остается заметить, что не существует в X совокупности таких $h'+1$ $(h'>h)$, d-выпуклых множеств без общей точки, из которых каждые $h'+1$ имели бы непустое пересечение. Действительно, существование такой совокупности привело бы, по определению 2, к неравенству $\operatorname{him} X \geqslant h' \geqslant h+1$, т.е. к противоречию с предположением (a).

(c) ⇒ (в). В силу (5) существует точка

$$x_i \in M_0 \cap \ldots \cap M_{i-1} \cap M_{i+1} \cap \ldots \cap M_h, \quad i = 0, \ldots, h .$$

Из (4) и включения $d\text{-conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_h\} \subset M_i$, $i = 0, \ldots, h$ получаем

$$\bigcap_{i=0}^{h} d\text{-conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_h\} \subset \bigcap_{i=0}^{h} M_i = \varnothing ,$$

что означает him-независимость $h+1$ точек $x_0, \ldots, x_h$. Допустим теперь, что в X существуют $h'+1>h+1$ him-независимых точек $y_0, \ldots, y_{h'}$. Тогда существование совокупности $h'+1$ d-выпуклых множеств $Y_i = d\text{-conv}\{y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h'}\}$, $i = 0, \ldots, h'$ противоречит предположению (c).

(в) ⇒ (a). Неравенство $\operatorname{him} X \geqslant h$ вытекает непосредственно из существования в X $h+1$ him-независимых точек, (1) и определения размерности Хелли. Допустим, что $\operatorname{him} X = h' > h$. Тогда, в силу показанных раньше импликаций (a) ⇒ (c) ⇒ (в) существует множество C' $h'+1$ him-независимых точек пространства X. Но это противоречит предположению (в). Следовательно, $\operatorname{him} X = h$.

Теорема 8. *Пусть X — метрическое пространство и $c \geqslant -1$ — целое число. Следующие условия эквивалентны*:

(a) $\operatorname{cim} X = c$,

(в) *существует в X набор из $c+1$ cim-независимых точек и всякое множество из более чем $c+1$ точек пространства X является cim-зависимым.*

Доказательство. Для $c = -1$ теорема очевидна. Пусть $c \geqslant 0$.

(a) ⇒ (в). Из определения размерности Каратеодори вытекает существование такого множества $A \subset X$ и такой точки $a \in d\text{-conv} A$, что a не принадлежит d-выпуклой оболочке никаких c точек из A. Одновременно, в силу этого же определения, существуют такие точки $a_0, \ldots, a_c \in A$, для которых $a \in d\text{-conv}\{a_0, \ldots, a_c\}$. Очевидно, из сказанного раньше имеем: $a \in d\text{-conv}\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_c\}$, $i = 0, \ldots, c$. Таким образом, $a_0, \ldots, a_c$ являются cim-независимыми точками. Допустим теперь, что в X существует множество $G = \{g_0, \ldots, g_k\}$ из $k+1$ cim-независимых точек, где $k > c$. Из определения cim-независимости вытекает, что существует такое $g \in d\text{-conv} G$, которое не принадлежит множеству $\bigcup_{i=0}^{k} d\text{-conv}\{g_0, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_k\}$. Последнее означает, что g не принадлежит d-выпуклой оболочке никаких k точек из G. Тем более g не принадлежит d-выпуклой оболочке никаких $\operatorname{cim} X+1 = c+1 \leqslant k$ точек из G, что, согласно определению размерности Каратеодори, противоречит предположению (a).

(в) ⇒ (a). Так как в X существует набор из $c+1$ cim-независимых точек, то, в силу определений размерности Каратеодори и cim-независимости, верно неравенство $\operatorname{cim} X \geqslant c$. Допустим, что $\operatorname{cim} X > c$. Тогда, на основе первой части доказательства, существует в X $\operatorname{cim} X+1$ cim-независимые точки, т.е. более чем $c+1$, как допускает условие (в). Следовательно, $\operatorname{cim} X = c$. Теорема доказана.

Из определения размерности Радона вытекает справедливость теоремы, аналогичной теоремам 7 и 8.

Теорема 9. *Пусть X — метрическое пространство и $r \geqslant -1$ целое число. Следующие условия эквивалентны*:

(a) $\operatorname{rim} X = r$,

(в) *существует в X набор из $r+1$ rim-независимых точек и всякое множество из более чем $r+1$ точек пространства X является rim-зависимым.*

Из теорем 5, 7, 8 и 9 вытекают предложения.

Следствие 1. *Неравенство $\operatorname{him} X \geqslant t$ $(\operatorname{rim} X \geqslant t)$ верно тогда и только тогда, когда в X существует набор из $t+1$ him-(rim)-независимых точек.*

Как показывает замечание 1 из неравенства $\operatorname{cim} X \geqslant t$ не всегда вытекает существование набора из $t+1$ cim-независимых точек. Обратная импликация очевидно справедлива.

Следствие 2. *Равенство $\operatorname{him} X = \infty$ $(\operatorname{cim} X = \infty$, $\operatorname{rim} X = \infty)$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного натурального числа N в X существует him-(cim-, rim-) независимое множество мощности высшей чем N.*

Теперь перейдем к исследованию отношений между рассматриваемыми тремя видами метрической независимости точек, а также их связи с аффинной независимостью.

Теорема 10. *Всякое him-независимое множество метрического пространства X является rim-независимым.*

Доказательство. Пусть $T \subset X$ является him-независимым множеством. Пусть $\mathscr{B}$ — произвольный d-базис пространства X и $p \in X$ некоторая точка. В силу теоремы 2 существует такое $B \in \mathscr{B}$ и такая точка $a \in T$, что $p \notin B$ и $B \supset T \setminus \{a\}$. При любом разложении T на два непересекающихся подмножества, одно из них является одновременно подмножеством множества $T \setminus \{a\}$, а следовательно, содержится в B. На основе теоремы 4 T является rim-независимым.

Следствие 3 (см. также [7]). *Для произвольного метрического пространства X выполняется неравенство*

$$\operatorname{him} X \leqslant \operatorname{rim} X .$$

Для доказательства заметим, что благодаря следствию 2 достаточно рассмотреть случай $\operatorname{him} X = h < \infty$. В силу теоремы 7 существуют $h+1$ him-независимых точек, а из теоремы 10 следует, что эти точки rim-независимы и на основе следствия 1 получаем неравенство $\operatorname{rim} X \geqslant h = \operatorname{him} X$.

Теорема 11. *В конечномерном, вещественном, нормированном пространстве R_n всякое* rim-*независимое множество точек является аффинно независимым.*

Доказательство. Пусть $T \subset R_n$ rim-независимое множество. Тогда при всяком таком разложении $T = S \cup P$, что $S \cap P = \emptyset$, имеем: $d\text{-}\operatorname{conv} S \cap d\text{-}\operatorname{conv} P = \emptyset$. Так как для $A \subset R_n$ $d\text{-}\operatorname{conv} A \supset \operatorname{conv} A$, то для T справедлива формула

$$T = S \cup P \wedge S \cap P = \emptyset \Rightarrow \operatorname{conv} S \cap \operatorname{conv} P = \emptyset . \tag{6}$$

В силу (6) и теоремы Радона множество T имеет не больше, чем $n+1$ элемента $a_0, \ldots, a_t$, $t \leqslant n$. Допустим, что точки $a_0, \ldots, a_t$ аффинно зависимы. Тогда например $a_0 \in \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_t\}$. Так как $\dim \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_t\} \leqslant t-1$ то, применяя для плоскости $\operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_t\}$, теорему Радона, получаем, что существуют такие множества S' и P', для которых $T = S' \cup P'$, $S' \cap P' = \emptyset$ и $\operatorname{conv} S' \cap \operatorname{conv} P' \neq \emptyset$. Это противоречит (6), а следовательно, $T = \{a_0, \ldots, a_t\}$ аффинно независимо.

Следствие 4. *Для конечномерного вещественного нормированного пространства R_n справедливы неравенства*

$$1 \leqslant \operatorname{him} R_n \leqslant \operatorname{rim} R_n \leqslant n . \tag{7}$$

Замечание 3. В неравенстве (7) не участвует $\operatorname{cim} R_n$. Как показывают примеры, существуют такие конечномерные вещественные пространства, для которых размерность Каратеодори меньше размерности Хелли [6] и такие, в которых она больше n (см. пример ниже). В работе [6] доказано следующее: если конечномерное вещественное пространство R_n обладает тем свойством, что d-выпуклая оболочка каждого конечного множества замкнута, то $\operatorname{cim} R_n \geqslant \operatorname{him} R_n$. Если учесть определения, введенные в настоящей работе, то нетрудно заметить, что попутно доказан там следующий факт.

Теорема 12. *Если T является* him-*независимым множеством конечномерного вещественного нормированного пространства R_n и d-*$\operatorname{conv}(T \setminus \{a\})$ *— замкнуто при каждом $a \in T$, то множество T является* cim-*независимым.*

В произвольном конечномерном вещественном нормированном пространстве R_n всякие $n+2$ точки аффинно зависимы и, как следует из теорем 10 и 11 him-зависимы и rim-зависимы. Следующий пример показывает, что для cim-зависимости аналогичное свойство не имеет места.

Пример. Пусть $\mathcal{S}$ — шар трехмерного евклидова пространства E_3, а Γ большая окружность шара $\mathcal{S}$. Разделим Γ на 24 равные части упорядоченными точками $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \ldots, d_6$. Через каждые две точки a_i, c_i, $i = 1, \ldots, 6$ проведем плоскость, перпендикулярную несущей плоскости окружности Γ. На $\mathcal{S}$ получаем шесть окружностей $O_1, \ldots, O_6$. „Отбросим" от $\mathcal{S}$ шесть соответствующих им сегментов. Теперь через пары точек $d_1 d_4$, $d_2 d_5$, $d_3 d_6$ проведем по две опорные к соседним окружностям O_i большие окружности и обозначим их через $Q_1, \ldots, Q_6$. В силу симметрии этого построения, можно провести на $\mathcal{S}$ две окружности Γ_1, Γ_2 каждая из которых опорна ко всем окружностям $Q_1, \ldots, Q_6$. „Отбросим" от S два сегмента, соответствующие Γ_1 и Γ_2. Полученное центрально-симметрическое тело Σ (см. рис. 1) определяет некоторую норму, а тем самым и соответствующую метрику d.

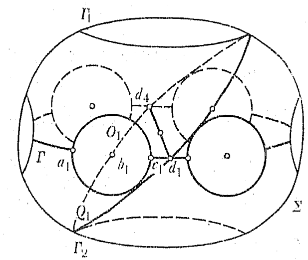

Рис. 1

Таким образом, имеем нормированное пространство R_3. Из формы шара Σ и работы [3] следует, что единственными d-выпуклыми двумерными подпространствами R_3 являются несущие плоскости окружностей $Q_1, \ldots, Q_6$. Из результатов работы [3] вытекает, что

$$d\text{-}\operatorname{conv}\{b_1, \ldots, b_6\} \neq \bigcup_{i=1}^{6} d\text{-}\operatorname{conv}\{b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_6\} .$$

Следовательно, $b_1, \ldots, b_6$ являются cim-независимыми точками R_3 и $\operatorname{cim} R_3 \geqslant 5$.

Теорема 13. *Для произвольного двумерного вещественного нормированного пространства R_2 верный ряд импликаций $(T \subset R_2)$: (T —* him*-независимо) $\Rightarrow$ (T —* cim*-независимо) $\Rightarrow$ (T —* rim*-независимо) $\Rightarrow$ (T — аффинно-независимо) и справедливы соотношения*

$$1 \leqslant \operatorname{him} R_2 \leqslant \operatorname{cim} R_2 \leqslant \operatorname{rim} R_2 = 2 . \tag{8}$$

Доказательство. Из результатов работы [5] следует, что в пространстве R_2 d-выпуклая оболочка компактного множества компактна. Поэтому, в силу теоремы 12, из him-независимости множества T вытекает его cim-независимость. Верность последней импликации следует непосредственно из теоремы 11. Вторую импликацию покажем методом инверсии. Пусть T — rim-зависимо. Очевидно, T содержит не менее трех точек. Если T состоит из трех точек, то по определению rim-зависимости одна из них принадлежит d-выпуклой оболочке двух остальных и, следовательно, не выполняется (2), т.е. T является cim-зависимым. Допустим, что T состоит из более чем трех точек. В теореме 12 работы [5] попутно доказано, что если $A \subset R_2$ и $a \in d\text{-conv}A$, то найдутся в A три точки, d-выпуклой оболочке которых принадлежит точка a. Следовательно,

$$d\text{-conv}T = \bigcup_{a \in T} d\text{-conv}(T \setminus \{a\}) .$$

Таким образом, T является cim-зависимым.

Проверим теперь соотношения (8). Неравенство $1 \leqslant \text{him}R_2$ очевидно, а неравенства $\text{him}R_2 \leqslant \text{cim}R_2 \leqslant \text{rim}R_2 \leqslant 2$ вытекают из выше доказанных импликаций, следствий 1, 3 и теорем 7, 8. В силу следствия 1, для доказательства неравенства $\text{rim}R_2 \geqslant 2$ достаточно заметить, что в R_2 существуют три rim-независимые точки. Действительно, в R_2 существуют два одномерные d-выпуклые подпространства l_1, l_2 [3]. Пусть $x_1 \in l_1, x_2 \in l_2$ точки, отличные от 0, и пусть $x_3 = -x_1 - x_2$. В силу результатов работы [3] ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не принадлежит d-выпуклой оболочке двух остальных, т.е. x_1, x_2, x_3 rim-независимые точки пространства R_2.

Теорема 14. *В строго нормированном конечномерном вещественном пространстве R_n условия аффинной независимости,* him-*независимости,* cim-*независимости и* rim-*независимости точек эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно в строго нормированном пространстве R_n d-выпуклость совпадает с выпуклостью. Следовательно, в силу теорем 10, 11 и 12, достаточно показать, что:

I. Если точки $x_0, \ldots, x_k$ аффинно независимы, то они him-независимы;

II. Если точки $x_0, \ldots, x_k$ cim-независимы, то они аффинно-независимы.

Пусть $x_0, \ldots, x_k$ — аффинно-независимые точки. Они являются вершинами невырожденного k-мерного симплекса $\mathscr{S}^k$. Так как не существует точка, принадлежащая всем $(k-1)$-мерным граням $\mathscr{S}^k$, то

$$\bigcap_{i=0}^{k} \text{conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\} = \emptyset .$$

Следовательно, точки $x_0, \ldots, x_k$ him-независимы.

Для доказательства II заметим, что если точки $x_0, \ldots, x_k$ аффинно зависимы, то они и cim-зависимы. Действительно, из аффинной зависимости точек $x_0, \ldots, x_k$ вытекает, что они лежат в некоторой $(k-1)$-мерной плоскости L. Пусть $x \in \text{conv}\{x_0, \ldots, x_k\}$. В силу теоремы Каратеодори и равенства $\dim L = k-1$, в множестве $\{x_0, \ldots, x_k\}$ существует k точек, d-выпуклой оболочке которых принадлежит x. Таким образом,

$$x \in \bigcup_{i=0}^{k} \text{conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\} .$$

Следовательно,

$$\text{conv}\{x_0, \ldots, x_k\} \subset \bigcup_{i=0}^{k} \text{conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$$

и, с учетом очевидного обратного включения, выполняется равенство

$$\text{conv}\{x_0, \ldots, x_k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \text{conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\} ,$$

что означает cim-зависимость точек $x_0, \ldots, x_k$.

Следствие 5. *В конечномерном строго нормированном пространстве R_n справедливы равенства*

(9) $$\text{him}R_n = \text{cim}R_n = \text{rim}R_n = \dim R_n = n .$$

Следствие 6. *В евклидовом n-мерном пространстве* him-, cim-, rim-, *и аффинная-независимости эквивалентны и выполняются равенства* (9).

Обобщения

1. Для структур выпуклости. Пусть X — множество и $\mathscr{C} \subset 2^X$. Если выполняются аксиомы

(a1) $\bigcap \mathscr{C}' \in \mathscr{C}$ для произвольного $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$,

(a2) $\emptyset, X \in \mathscr{C}$,

то пару $(X, \mathscr{C})$ называем *структурой выпуклости* (развитие этого понятия можно проследить в работах [1], [2], [4]). Множества семейства $\mathscr{C}$ называем *$\mathscr{C}$-выпуклыми*. Для каждого $A \subset X$ определяется его $\mathscr{C}$-оболочка как пересечение всех $\mathscr{C}$-выпуклых множеств, содержащих A. Для структур выпуклости рассматривались [1] числа Хелли, Каратеодори и Радона (определения 2, 3, 4 являются их случаем, ибо метрическое пространство, снабженное d-выпуклыми множествами является структурой выпуклости). Если „d-выпуклость" заменить „$\mathscr{C}$-выпуклостью", то из определения 6 получаем понятия трех видов независимостей точек для структуры выпуклости. Соответственно понятие d-базиса заменяется понятием $\mathscr{C}$-базиса. Одновременно обобщаются (вместе с приведенными доказательствами) лемма 1, теоремы 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 и следствия 1, 2, 3. Если кроме (a1) и (a2) выполняется аксиома

(a3) $\bigcup \mathscr{K} \in \mathscr{C}$ для каждого упорядоченного по включению $\mathscr{K} \subset \mathscr{C}$, то обобщается и теорема 1.

Если рассмотреть структуру выпуклости с леммой 2 в качестве аксиомы, то для нее обобщается лемма 1 и все теоремы от 1 до 10 вместе со следствиями.

2. Для изотонных операций. Пусть X, Y произвольные множества и Φ: $2^X \to 2^Y$ функция, удовлетворяющая условию изотонности

$$A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B).$$

Для Φ можно рассматривать числа Хелли $h(\Phi)$, Каратеодори $c(\Phi)$ и Радона $r(\Phi)$, а также соответствующие им три вида независимостей точек. Например,

$c(\Phi)$ — это минимальное k, при котором для любого $A \subset X$ и $a \in \Phi(A)$ существуют $x_0, \ldots, x_k \in A$, что $a \in \Phi(\{x_0, \ldots, x_k\})$,

T — h-независимое относительно Φ, если $\bigcap_{a \in T} \Phi(T \setminus \{a\}) = \Phi(\emptyset)$.

Нетрудно заметить, что при этом обобщаются теоремы 7, 8, 9 и следствия 1, 2.

Литература

[1] L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee, *Helly's theorem and its relatives*, Amer. Math. Soc., Procedings of Symposia in Pure Matematics 7 (1963), стр. 101–180 (русский перевод: *Теорема Хелли*, Мир, 1968).

[2] J. Eckhof, *Der Satz von Radon in Konvexen Produktstrukturen*, Monatsh. Math. 72 (1968), стр. 303–314.

[3] Л. Ф. Герман, В. П. Солтан, *О некоторых свойствах, d-выпуклых множеств*, Прикл. Мат. и Программир. 10 (1973), стр. 47–61.

[4] D. Kay and E. Womble, *Axiomatic convexity theory and relationships between the Carathèodory, Helly and Radon Numbers*, Pacific J. Math. 38, (1971), стр. 472–485.

[5] М. Лассак, В. П. Солтан, *Об одной классификации метрических пространств с точки зрения d-выпуклости*, Мат. Исслед. 3 (37) (1975), стр. 90–106.

[6] М. Лассак, *О размерностях Хелли и Каратеодори для конечномерных нормированных пространств*, Мат. Исслед. 3 (37) (1975), стр. 107–114.

[7] F. W. Levi, *On Helly's theorem and the axioms of convexity*, J. Indian Math. Soc. 15 (1951), стр. 65–76.

[8] П. С. Солтан, К. Ф. Присакару, *Задача Штейнера на графах*, ДАН СССР, 205 (3) (1972), стр. 517–519.

Accepté par la Rédaction le 12. 5. 1975

Boolean valued rings

by

E. Ellentuck * (New Brunswick, N. J.)

Abstract. We study Kaplansky rings from the viewpoint that it is sometimes more insightful to understand them in terms of truth values taken from their idempotent algebra rather than in terms of ordinary truth values. The connection between these notions of truth is given exactly by Feferman-Vaught. An illustration of these ideas is taken from the arithmetic isolic integers. We show that they form an idempotent valued model of arithmetic and use this to derive the Nerode metatheorems.

0. Introduction. Why is Nerode's decision theorem for the arithmetic isolic integers (cf. [3]) so similar to the Feferman–Vaught decision theorem for reduced direct powers (cf. [1])? This question was asked (to us) by L. Hay in 1972. Our approach to this question was keyed by a fact that we had known for some time that the arithmetic isolic integers could be thought of as a Boolean valued model of classical arithmetic. We were thus led to take a careful look at Boolean valued models, and in particular, of Boolean valued rings.

In Section 1 we examine a model $\mathfrak{A}$ which assumes values in a Boolean algebra A. Let B be a complete subalgebra of A. How can we give a B-valued interpretation to $\mathfrak{A}$? If you like, how can we approximate A-truth by a coarser B-truth? Let $\mathfrak{B}$ be a model with the same universe as $\mathfrak{A}$, but whose truth values on atomic formula is defined by

$$[\![a = b]\!]_{\mathfrak{B}} = \sum^B \{x \in B \mid x \leqslant [\![a = b]\!]_{\mathfrak{A}}\}.$$

What could be a more natural approximation? In Section 2 we determine $[\![\cdot]\!]_{\mathfrak{B}}$ in terms of $[\![\cdot]\!]_{\mathfrak{A}}$. The connection is exactly Nerode, is exactly Feferman–Vaught!

Section 3 gathers together some fairly well-known results. We define reduced Boolean power generalizing Mansfield's Boolean ultrapowers (cf. [2]). Finally a connection is made between Boolean valuations and forcing.

In Section 4 we begin our study of rings. A special kind of ring due to Kaplansky is singled out for study and it is shown how they can be considered to be Boolean

* At various times supported by: The Institute for Advanced Study, The New Jersey Research Council, and The Rutgers Faculty Academic Study Program.