intervals contiguous to P', it follows that $\varphi \in \overline{N}$. If $u \in P'$ and $g^{-1}(u) = x \in P$, then $(\psi+\varphi)(u) = g^{-1}(u)+f(g^{-1}(u)) = x+f(x)$. But then the image of $\psi+\varphi$ on the set P' is the same as the image of $f(x)+x$ on the set P. Since P' is of measure 0 and $f(x)+x$ fails to satisfy condition (N) on P, it follows that $(\psi+\varphi)(P')$ is a set of positive measure, $\psi+\varphi$ does not satisfy condition (N), and thus $\psi+\varphi \notin \overline{N}$.

References

[1] R. O. Davies, *Subsets of finite measure in analytic sets*, Indag. Math. 14 (1952), pp. 488–489.
[2] K. Kuratowski, *Topology*, New York–London–Warszawa 1966.
[3] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions qui satisfont à la condition* (N), Fund. Math. 16 (1930), pp. 348–352.
[4] S. Saks, *Theory of the Integral*, second revised edition, New York 1937.

UNIVERSITY OF WISCONSIN-MILWAUKEE
Milwaukee, Wisconsin

Accepté par la Rédaction le 5. 5. 1975

Demi-groupes, espaces affines et categories gauches

par

André Batbedat (Montpellier)

Résumé. On étudie la structure déterminée sur un ensemble par une loi de composition binaire: $(a, b) \to ab$, qui vérifie: $(ab)c = b(ac)$ pour tous a, b, c.
Propriétés duales pour: $(ab)c = a(cb)$.
Application aux notions d'espace affine gauche et de catégorie gauche.

Introduction. On sait qu'une loi de composition binaire est associative si elle vérifie pour tous a, b, c:

(A): $(ab)c = a(bc)$.

Dans [7], V. G. Lemlein a considéré le cas:

(AM): $(ab)c = c(ba)$.

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse d'associativité gauche:

(AG): $(ab)c = b(ac)$.

Les résultats se transposent dualement pour l'associativité droite:

(AD): $(ab)c = a(cb)$.

Mathématiquement une telle étude présente un grand intérêt car (A), (AG) et (AD) sont les seuls cas où les applications qui à un élément associent ses translations intérieures au sens de [4] sont chacune un morphisme ou un antimorphisme.

En pratique nous verrons que bien souvent l'associativité gauche implique l'associativité.

Dans ce contexte nous précisons les concepts d'espace affine gauche et de catégorie gauche.

I. Généralités. Nous présentons succinctement dans ce chapitre quelques définitions et propriétés dont nous aurons besoin par la suite (pour plus de détails, consulter [1], [2], [3], [4] ou [8]).

I.1. Un *binaire* ([1] ou [2]) est un ensemble muni d'une loi de composition binaire: $(a, b) \to ab$. On note sans parenthèses le composé dans l'ordre écrit de gauche à droite (c'est ainsi que: $(ab)c$ est simplement noté: abc).

Un *demi-groupe* est un binaire associatif (introduction).

Soit D un binaire. φ est l'application de D dans le demi-groupe $(D)\mathscr{A}$ des applications de D dans D qui à $a \in D$ associe:

$$(a)\varphi\colon x \in D \to ax \in D .$$

On note ${}^{\varphi}D$ l'image de D par φ.

Lorsque ${}^{\varphi}D$ se réduit à l'application identique, la loi binaire sur D est: $ab = b$: il s'agit d'un *demi-groupe zéro à droite* [4].

I.2. Un binaire D est *réductif à droite* [4] si $ax = bx$ *pour tout* $x \in D$ implique $a = b$.

L'application φ (I.1) est injective si et seulement si D est réductif à droite.

I.3. Les éléments a et b d'un binaire D *g-commutent* lorsque $(a)\varphi$ et $(b)\varphi$ commutent. D est *g-commutatif* si pour tous a, b, c, de D: $a(bc) = b(ac)$.

I.4. Soit D un binaire et $a \in D$: a est *simplifiable* [resp: *dominant*] *à gauche* ([1] ou [2]) si $(a)\varphi$ est injective [resp: surjective].

Notions duales (à droite, au lieu de: à gauche)...

I.5. Soit D un binaire et $a \in D$: a est *g-inversible à gauche* (resp: à droite) s'il existe $b \in D$ tel que pour tout $x \in D$: $x = b(ax)$ (resp: $x = a(bx)$). g-inversible à gauche (resp: à droite) implique simplifiable (resp: dominant) à gauche.

Notions duales...

Une étude générale de la notion d'élément inversible dans un binaire est faite dans [1] et certains aspects sont développés dans [2] (indiquons par exemple que les groupoïdes avec l'inverse propriété au sens de R. H. Bruck [3] sont pour nous les binaires dans lesquels tout élément est inversible).

a est *partiellement g-inversible* s'il existe $b \in D$ tel que pour tout $x \in D$: $ax = a(b(ax))$.

Aux chapitres IV et V nous utiliserons la définition suivante: a est *relativement g* (resp: *m*; resp: *d*) *-inversible* s'il existe $b \in D$ tel que: $a = baa$ (resp: $a = aba$; resp: $a = aab$); b est un g (resp: m; resp: d) -inverse relatif pour a. a est *relativement inversible* s'il est à la fois relativement g, m et d-inversible; b est pour a un inverse relatif s'il est à la fois g, m et d-inverse relatif pour a.

La notion d'inversibilité relative a été étudiée par de nombreux auteurs (voir [4], [6], [8] et [9]) mais généralement dans le cas associatif; certains utilisent le qualificatif: régulier.

I.6. Un morphisme θ de binaires respecte la loi binaire. Un *g-morphisme* θ de binaires de D dans D' est un morphisme vérifiant:

$ax = bx$ pour tout $x \in D$ implique $(a)\theta x' = (b)\theta x'$ pour tout $x' \in D'$.

Dans cette hypothèse on note ${}^{\varphi}\theta$ l'application de ${}^{\varphi}D$ dans ${}^{\varphi}D'$ définie par: $(a)\varphi\, {}^{\varphi}\theta = (a)\theta\varphi'$.

L'identité est un g-morphisme; le composé de deux g-morphismes est un g-morphisme.

II. Les demi-groupes gauches. Rappelons (I.1) que le composé de a_1, puis $a_2, \ldots$ puis a_n dans un binaire est noté sans parenthèses, c'est-à-dire simplement: $a_1 a_2 \ldots a_n$.

II.1.

Définition. D est un *demi-groupe* si c'est un binaire tel que pour tous a, b, c, de D:

$abc = b(ac)$ (associativité gauche).

Nous référant à I.1:

Proposition 1. *Soit D un binaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *${}^{\varphi}D$ est un demi-groupe et φ est un morphisme.*

ii) *D est un demi-groupe gauche.*

Preuve. i) implique ii): ${}^{\varphi}D$ étant un demi-groupe, quels que soient a, b, de D, il existe $c \in D$ tel que pour tout $x \in D$: $b(ax) = cx$. φ étant un morphisme: $(ab)\varphi = (a)\varphi(b)\varphi = (c)\varphi$ et par conséquent: $b(ax) = abx$.

ii) implique i): $(a)\varphi(b)\varphi = (ab)\varphi$.

Proposition 2. *Deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième:*

i) *demi-groupe gauche,*

ii) *demi-groupe,*

iii) *binaire g-commutatif* (I.3).

Ainsi un demi-groupe zéro à droite (I.1) vérifie les trois propriétés précédentes.

Corollaire (des propositions 1 et 2). *Soit D un demi-groupe gauche:*

i) *${}^{\varphi}D$ est un demi-groupe g-commutatif.*

ii) *D est un demi-groupe si et seulement si ${}^{\varphi}D$ est commutatif.*

Preuve. i) Si θ est un morphisme d'un demi-groupe gauche dans un binaire D' alors $(D)\theta$ est un demi-groupe gauche...

II.2.

Théorème 1. *Soit D un demi-groupe gauche. Quels que soient $a_1, \ldots, a_p$, de D avec $p>2$:*

$$a_1 \ldots a_{p-2} a_{p-1} a_p = a_{(1)\sigma} \ldots a_{(p-2)\sigma} a_{p-1} a_p ,$$

pour toute permutation σ sur $\{1, \ldots, p-2\}$.

Preuve. φ étant un morphisme et ${}^{\varphi}D$ un demi-groupe g-commutatif (II.1, proposition 1 et corollaire):

$$(a_1 \ldots a_{p-2} a_{p-1})\varphi = (a_{(1)\sigma} \ldots a_{(p-2)\sigma} a_{p-1})\varphi .$$

Soit E un ensemble à plus d'un élément et D le binaire des triplets (a_1, a_2, a_3), d'éléments de E, pour la loi: $(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (b_1, a_1, b_2)$; l'égalité du théorème 1 est vérifiée mais D n'est pas un demi-groupe gauche.

Lemme. *Pour tous a, b, c, d, d'un demi-groupe gauche*: $abcd = ac(bd)$.

Preuve. $abcd = b(ac)d = ac(bd)$.

Il résulte de ce lemme que tous a, x, y, d'un demi-groupe gauche D: $xa(ya) = ya(xa)$: par suite Da muni de la loi induite est un demi-groupe commutatif.

THÉORÈME 2. *Soit D un demi-groupe gauche. Quels que soient $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_q$, de D:*

$$a_1 \dots a_p(b_1 \dots b_q) = a_1 \dots a_{p-1} b_1 \dots b_{q-1} a_p b_q .$$

Preuve. C'est vrai si $q = 1$.

Supposons $q>1$:

si $p = 1$, c'est l'associativité gauche.

si $p>1$, on applique le lemme avec: $a = a_1 \dots a_{p-1}$; $b = b_1 \dots b_{q-1}$; $c = a_p$; $d = b_q$, puis le théorème 1.

Le théorème 2 est caractéristique des demi-groupes gauches.

II.3.

NOTATION. $\mathscr{K}$ est la catégorie des demi-groupes gauches avec les g-morphismes (I.6).

$\mathscr{L}$ est la catégorie des demi-groupes g-commutatifs avec les morphismes.

$\varnothing$ est la paire de fonctions qui à un objet D de $\mathscr{K}$ associe ${}^{\varphi}D$ et à un g-morphisme θ de demi-groupes gauches de D dans D' associe l'application ${}^{\varphi}\theta$ de ${}^{\varphi}D$ dans ${}^{\varphi}D'$ (I.6).

PROPOSITION. *$\varnothing$ est un foncteur de $\mathscr{K}$ dans $\mathscr{L}$.*

Preuve. Par: $((a)\varphi(b)\varphi){}^{\varphi}\theta = (ab)\theta\varphi' = (a)\theta\varphi'\cdot(b)\theta\varphi' = (a)\varphi{}^{\varphi}\theta\cdot(b)\varphi{}^{\varphi}\theta$, ${}^{\varphi}\theta$ est un morphisme de $\mathscr{L}$. D'autre part ${}^{\varphi}(\theta'\theta'') = {}^{\varphi}\theta'\,{}^{\varphi}\theta''$ et, si $\mathscr{I}$ est l'identité sur D alors ${}^{\varphi}\mathscr{I}$ est l'identité sur ${}^{\varphi}D$.

La catégorie $\mathscr{K}$ n'est pas subordonnée à $\mathscr{L}$ [5] puisque $(a)\theta x' = (a)\theta' x'$ pour tout $x' \in D'$ n'implique pas $(a)\theta = (a)\theta'$.

LEMME 1. *Demi-groupe gauche réductif à droite* (I.2) *implique demi-groupe commutatif.*

Preuve. I.2 et II.1 corollaire.

LEMME 2. *Soit D un demi-groupe gauche et D' un demi-groupe commutatif réductif*:

i) *Si θ est un morphisme de D dans D' (donc un g-morphisme) alors ${}^{\varphi}\theta$ est un morphisme de ${}^{\varphi}D$ dans D' et $\theta = \varphi{}^{\varphi}\theta$.*

ii) *Si ϱ est un morphisme de ${}^{\varphi}D$ dans D', $\theta = \varphi\varrho$ est un morphisme de D dans D' et ${}^{\varphi}\theta = \varrho$.*

Preuve. i) On identifie D' à ${}^{\varphi'}D'$ par l'isomorphisme φ'.

ii) Si $\theta = \varphi\varrho$ alors: $(a)\varphi{}^{\varphi}\theta = (a)\theta = (a)\varphi\varrho$.

On note $\mathscr{G}$ une structure particulière de demi-groupe commutatif réductif (par exemple la structure de groupe commutatif) et on appelle $\mathscr{G}$-demi-groupe un demi-groupe qui a la structure $\mathscr{G}$. Par le lemme 2:

THÉORÈME. *Pour tout demi-groupe gauche D, D et ${}^{\varphi}D$ ont même $\mathscr{G}$-demi-groupe universel.*

II.4. On appelle *semi-groupe à gauche* (resp: semi-groupe) un demi-groupe dans lequel tout élément est simplifiable à gauche (I.4) (resp: à gauche et à droite).

Si H est un semi-groupe commutatif alors il se plonge de façon classique dans $H^2/\mathscr{S}$ ou $\mathscr{S}$ est la congruence: $(a, b)\mathscr{S}(c, d)$ si et seulement si: $ad = bc$; de plus $H^2/\mathscr{S}$ est le groupe commutatif universel pour H.

Soit D un semi-groupe à gauche g-commutatif: c'est un demi-groupe gauche et par II.1 proposition 1 et corollaire, ${}^{\varphi}D$ est un semi-groupe commutatif. On montre facilement que $({}^{\varphi}D)^2$ et ${}^{\varphi}(D^2)$ sont canoniquement isomorphes d'où il résulte:

PROPOSITION. *Soit D un semi-groupe à gauche g-commutatif*:

i) *La relation $(a, b)\mathscr{S}'(c, d)$, si et seulement si: $adx = bcx$ pour tout $x \in D$, est une congruence sur D^2.*

ii) *$D^2/\mathscr{S}'$ est le groupe commutatif universel pour D.*

III. Des objets universels. Nous allons construire le demi-groupe gauche (resp: demi-groupe g-commutatif) libre pour un ensemble E.

III.1.

NOTATION. Soit E un ensemble. On note $(E)S$ l'ensemble des suites finies d'éléments de E: $u = [u_1, \dots, u_p]$. $(E)S$ est un binaire pour la loi:

$$uw = [u_1, \dots, u_{p-1}, w_1, \dots, w_{q-1}, u_p, w_q] .$$

On considère sur $(E)S$ la relation $\mathscr{C}$: $u\mathscr{C}w$ si et seulement si il existe une permutation σ sur $\{1, \dots, p-2\}$ pour laquelle:

$$[u_{(1)\sigma}, \dots, u_{(p-2)\sigma}, u_{p-1}, u_p] = [w_1, \dots, w_q]$$

lorsque $p>2$ et $u = w$ autrement.

LEMME 1. *E engendre le binaire $(E)S$.*

Preuve. On identifie $a \in E$ et $[a] \in (E)S$: le composé de $u_1, \dots, u_p$ dans cet ordre est $u = [u_1, \dots, u_p]$. Cette décomposition est unique.

LEMME 2. *$\mathscr{C}$ est une congruence sur le binaire $(E)S$.*

Preuve. C'est une relation d'équivalence: $u\mathscr{C}u'$ et $w\mathscr{C}w'$ impliquent $uw\mathscr{C}u'w'$.

On note $(E)\mathfrak{C}$ le binaire quotient de $(E)S$ par $\mathscr{C}$.

LEMME 3. *$(E)\mathfrak{C}$ est un demi-groupe gauche. E s'injecte dans $(E)\mathfrak{C}$. Tout élément de $(E)\mathfrak{C}$ s'écrit comme un produit d'éléments de E et ceci de façon unique à une permutation près sur les $p-2$ premiers facteurs.*

Preuve. On voit que $uwt\,\mathscr{C}w(ut)$ dans $(E)S$. L'unicité de la décomposition dans $(E)S$ (preuve du lemme 1) justifie la dernière assertion.

Si θ est une application de l'ensemble E dans un binaire D, on note $(\theta)S$ l'application de $(E)S$ dans D définie par: $(u)(\theta)S = (u_1)\theta \dots (u_p)\theta$ (preuve du lemme 1).

LEMME 4. *Soit θ une application de E dans un demi-groupe gauche D*:

i) *$(\theta)S$ est un morphisme.*

ii) *$u\mathscr{C}w$ implique $(u)(\theta)S = (w)(\theta)S$.*

Preuve. II.2 Théorèmes 1 et 2.

LEMME 5. *Pour toute application θ de E dans un demi-groupe gauche D il existe un unique morphisme $(\theta)\mathfrak{C}$ de $(E)\mathfrak{C}$ dans D dont la restriction à E est θ.*

Preuve. Nécessairement $(u)(\theta)\mathfrak{C} = (u_1)\theta \dots (u_p)\theta = (u)(\theta)S$. L'existence résulte du lemme 4.

THÉORÈME. *Avec les notations précédents $(E)\mathfrak{C}$ est le demi-groupe gauche libre pour l'ensemble E.*

III.2. Soit L un demi-groupe g-commutatif (objet de $\mathscr{L}$: II.3 notation) et $(L)\mathfrak{C}$ le demi-groupe gauche libre pour l'ensemble L (III.1). A l'application identique $\mathscr{I}$ sur L correspond le morphisme $(\mathscr{I})\mathfrak{C}$ de $(L)\mathfrak{C}$ dans L qui détermine sur $(L)\mathfrak{C}$ la congruence $\mathscr{E}$:

$$u\mathscr{E}w \text{ si et seulement si: } u_1 \dots u_p = w_1 \dots w_q \text{ dans } L.$$

LEMME 1. *La relation $\mathscr{R}$ sur $(L)\mathfrak{C}$ qui est l'identité sur L et qui seulement lorsque $p>1$ et $q>1$ vérifie:*

$u_1 \dots u_{p-1} = w_1 \dots w_{q-1}$ dans L et $u_p = w_q$, est une congruence.

Preuve. C'est une relation d'équivalence. L étant g-commutatif, on voit que $u\mathscr{R}u'$ et $w\mathscr{R}w'$ impliquent $uw\mathscr{R}u'w'$.

Soit K le demi-groupe gauche quotient de $(L)\mathfrak{C}$ par $\mathscr{R}$.

LEMME 2. *L et ${}^{\varphi}K$ sont isomorphes.*

Preuve. Si les éléments u et w de $(L)\mathfrak{C}$ vérifient $ux = wx$ dans K pour tout $x \in K$, alors en particulier $ut\mathscr{R}wt$ pour $t \in L$ et donc $u\mathscr{E}w$.

Si maintenant $u\mathscr{E}w$ alors, dans L, qui est g-commutatif:

$$u_1 \dots u_{p-1}x_1 \dots x_{n-1}u_p = w_1 \dots w_{q-1}x_1 \dots x_{n-1}w_q,$$

quels que soient $x_1, \dots, x_{n-1}$, de L (symbole vide pour $n = 1$) ce qui implique $ux\mathscr{R}wx$ pour tout $x \in (L)\mathfrak{C}$ et donc $ux = wx$ dans K pour tout $x \in K$.

Exemple. Si L est un demi-groupe zéro à droite (I.1), K est l'ensemble des couples (a_1, a_2) avec $a_2 \in L$ et $a_1 \in L$ ou bien a_1 est le symbole vide, muni de la loi binaire: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_2, b_2)$.

Ainsi:

THÉORÈME 1. *Pour tout demi-groupe g-commutatif L il existe un demi-groupe gauche K avec ${}^{\varphi}K$ isomorphe à L.*

THÉORÈME 2. *Pour tout morphisme Ψ de $\mathscr{L}$ il existe un g-morphisme θ de $\mathscr{K}$ dont l'image par $\varnothing$ (II.3) est Ψ.*

Preuve. Soit Ψ un morphisme de demi-groupes g-commutatifs de L dans L'. On définit le morphisme λ de $(L)\mathfrak{C}$ dans $(L')\mathfrak{C}$ par:

$$(u_1 \dots u_p)\lambda = (u_1)\Psi \dots (u_p)\Psi$$

(III.1 lemme 3) produit dans $(L')\mathfrak{C}$. Comme $u\mathscr{R}w$ (lemme 1) implique $(u)\lambda\mathscr{R}(w)\lambda$, l'application définie par $(u_1 \dots u_p)\theta = (u_1)\Psi \dots (u_p)\Psi$, produit dans K', est un morphisme de K dans K'. De $\varphi\Psi = \theta\varphi'$ on déduit que θ est un g-morphisme et ${}^{\varphi}\theta = \Psi$.

III.3. Soit E un ensemble, $F = (E)\mathfrak{C}$ son demi-groupe gauche libre (III.1 théorème), φ le morphisme canonique (II.1 proposition 1) de F dans ${}^{\varphi}F$ et $\mathscr{D}$ la congruence sur $(E)S$ (III.1 notation) pour laquelle ${}^{\varphi}F$ est le quotient de $(E)S$ par $\mathscr{D}$.

LEMME. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *$u\mathscr{D}w$ dans $(E)S$.*

ii) *$ux = wx$ dans F pour tout $x \in F$.*

iii) *Il existe une permutation σ sur $\{1, \dots, p-1\}$ pour laquelle dans $(E)S$, $[u_{(1)\sigma}, \dots, u_{(p-1)\sigma}, u_p] = [w_1, \dots, w_q]$ avec $p>1$, et $u = w$ autrement.*

THÉORÈME. *Soit E un ensemble et F le demi-groupe gauche libre pour E: le demi-groupe g-commutatif libre pour E est isomorphe à ${}^{\varphi}F$ et à $(E)S/\mathscr{D}$.*

Preuve. E s'injecte dans ${}^{\varphi}F$; un élément de ${}^{\varphi}F$ s'écrit: $u_1 \dots u_p$, produit dans ${}^{\varphi}F$, d'éléments de E, de façon unique, à une permutation près sur les $p-1$ premiers facteurs.

Si θ est une application de E dans un demi-groupe g-commutatif L, on cherche un morphisme Ψ de ${}^{\varphi}F$ dans L qui vérifie nécessairement: $(u_1 \dots u_p)\Psi = (u_1)\theta \dots (u_p)\theta$, d'où l'unicité. L'existence résulte de ce que $u\mathscr{D}w$ dans $(E)S$ implique $(u)(\theta)S = (w)(\theta)S$; u étant dans F on peut poser $(u)\varphi\Psi = (u)(\theta)\mathfrak{C}$.

COROLLAIRE. *Tout morphisme d'un demi-groupe gauche libre dans un demi-groupe gauche est un g-morphisme.*

Preuve. Un morphisme de F dans un demi-groupe gauche K' s'écrit $(\theta)\mathfrak{C}$, où θ est sa restriction à l'ensemble E. L'application $\theta\varphi'$ de E dans ${}^{\varphi}K'$ détermine un morphisme de ${}^{\varphi}F$ dans ${}^{\varphi}K'$ pour lequel le diagramme commute.

IV. Quelques cas particuliers. Dans ce chapitre on considère un demi-groupe gauche D, vérifiant une hypothèse supplémentaire; nous verrons que très souvent ceci implique: "D est un demi-groupe".

IV.1. Il est immédiat que: D est commutatif (resp: possède un neutre à droite), est équivalent à: D est un demi-groupe commutatif (resp: unitaire).

THÉORÈME. *Si un demi-groupe gauche D possède un élément simplifiable à droite (resp: à gauche) alors D est un demi-groupe commutatif (resp: g-commutatif).*

Preuve. S'il possède un élément simplifiable à droite, D est réductif à droite (I.2) et on applique II.3 lemme 1.

Si $u \in D$ est simplifiable à gauche, alors $(u)\varphi$ est simplifiable à droite dans ${}^{\varphi}D$ qui par conséquent est commutatif et on applique II.1 corollaire.

Ce théorème peut encore être démontré en utilisant les égalités:

$$abuu = bauu \quad \text{et} \quad u(abx) = u(bax) \ \dots$$

COROLLAIRE 1. *Si l'élément a du demi-groupe gauche D est d-inversible à droite (I.5) alors D est un demi-groupe commutatif.*

Preuve. a est simplifiable à droite.

COROLLAIRE 2. *Si un demi-groupe gauche possède un neutre à gauche alors c'est un demi-groupe.*

COROLLAIRE 3. *Si le demi-groupe gauche D possède un élément g-inversible à gauche ou à droite alors D est un demi-groupe.*

Preuve. Si pour tout $x \in D$: $b(ax) = x$, alors ab est neutre à gauche; on applique le corollaire 2.

PROPOSITION. *Soit D un demi-groupe gauche et $a \in D$:*

i) *Si a est dominant à gauche alors D est un demi-groupe.*

ii) *Si a est dominant à droite alors D est un demi-groupe commutatif.*

Preuve. i) $(a)\varphi$ est surjective, donc inversible à droite dans $(D)\mathscr{A}$ (I.1) alors ${}^{\varphi}D$ est dans le centre de $(D)\mathscr{A}$ et D est un demi-groupe;

ii) $D = Da$ est commutatif (II.2 lemme).

COROLLAIRE 4. *Si un demi-groupe gauche possède un élément d-inversible à gauche alors c'est un demi-groupe commutatif.*

On montre encore que sous l'hypothèse $\operatorname{Card} D = 2$ (resp: D est monogène) un demi-groupe gauche D est un demi-groupe.

Les propriétés précédentes permettent d'alléger certains systèmes d'axiomes. Considérons par exemple le système suivant:

$$abc = b(ac)\,,$$
$$\forall a, \exists b, \forall x\colon\ xab = x\,.$$

La première égalité signifie: "demi-groupe gauche", et la seconde: "tout élément est d-inversible à droite": *ces axiomes caractérisent les groupes commutatifs.*

IV.2.

LEMME. *Quels que soient les éléments a et b d'un demi-groupe gauche, b et ab commutent.*

PROPOSITION 1. *La relation $a = ab$ sur un demi-groupe gauche est antisymétrique et transitive.*

En particulier on retrouve l'ordre Booléen: $\alpha = \alpha\beta$ sur l'ensemble des idempotents (et ceci sans supposer qu'ils commutent).

Proposition 2. *Demi-groupe gauche idempotent implique demi-groupe.*

Preuve. $\alpha\beta\beta = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta(\alpha\beta) = \alpha\beta$. Ceci étant:

$$\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma(\alpha\beta\gamma) = \alpha(\beta\gamma)(\beta\gamma) = \alpha(\beta\gamma)\,.$$

En particulier si l'ensemble des idempotents d'un demi-groupe gauche est stable pour la loi induite, alors c'est un demi-groupe.

Nous allons étudier la relation d'ordre: $\alpha = \alpha\beta$ sur un demi-groupe gauche idempotent c'est-à-dire sur un demi-groupe idempotent g-commutatif.

Soit E un binaire pour la loi: $(\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta$. Dans le théorème qui suit $\alpha \wedge \beta$ et $\beta \wedge \alpha$ sont appelés *composés de* α, β: un composé de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, est composé de $\alpha_{(1)\sigma}$

et d'un composé de $\alpha_{(2)\sigma}, \alpha_{(3)\sigma}$ ou d'un composé de $\alpha_{(1)\sigma}, \alpha_{(2)\sigma}$ et de $\alpha_{(3)\sigma}$, σ étant une permutation sur: $\{1, 2, 3\}$.

THÉORÈME. *Soit E un ensemble ordonné muni de la loi binaire: $\alpha \wedge \beta$ vérifiant:*

T_1: $\alpha \wedge \beta \leqslant \beta$.

T_2: $\{\alpha, \beta\}$ *et* $\{\beta \wedge \alpha, \alpha \wedge \beta\}$ *ont les mêmes minorants.*

T_3: *Si deux composés de α, β ou de α, β, γ, ont un même majorant, ils sont égaux.*

Alors E muni de la loi binaire: $\alpha \wedge \beta$, est un demi-groupe g-commutatif idempotent.

Réciproquement si D est un demi-groupe g-commutatif idempotent, il est ordonné par la relation $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si $\alpha = \alpha\beta$ et, muni de la loi binaire: $\alpha\beta$, il vérifie T_1, T_2 *et* T_3.

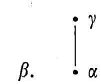
Preuve. Directe: Par T_1, $\alpha = \alpha \wedge \beta$ implique $\alpha \leqslant \beta$. Maintenant si $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$ par T_3; par T_2, $\alpha \leqslant \alpha \wedge \beta$ puisque α minore $\{\alpha, \beta\}$ et par T_1: $\alpha = \alpha \wedge \beta$. En particulier tout élément est idempotent. Par T_3, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et $\beta \wedge (\alpha \wedge \gamma)$ qui sont majorés par γ, sont égaux donc E est un demi-groupe gauche et on applique la proposition 2.

Réciproque:

T_2: D'après T_1, tout minorant de $\{\beta\alpha, \alpha\beta\}$ minore $\{\alpha, \beta\}$. Soit μ un minorant de $\{\alpha, \beta\}$: $\mu\alpha = \mu$ et $\mu\beta = \mu$ impliquent $\mu\beta\alpha = \mu$ et $\mu\alpha\beta = \mu$.

T_3: Soit ε un majorant de $\{\beta\alpha, \alpha\beta\}$: $\beta\alpha = \beta\alpha\mu = \alpha\beta\mu = \alpha\beta$. De même si deux composés de α, β, γ, ont un majorant commun alors ils sont égaux.

Dans le contre-exemple suivant T_1 et T_2 sont vérifiés mais $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, qui sont majorés par γ, sont distincts: $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ est ordonné par $\alpha < \gamma$ et β non comparable aux deux autres; représentation:



E est muni de la loi binaire: $a \wedge b$, définie par:

$a \wedge b = b$ si a et b ne sont pas comparables.

$a \wedge b = \operatorname{Inf}(a, b)$, si a et b sont comparables.

IV.3. Dans le cas d'un demi-groupe, R. Croisot a montré [6] que si deux des trois propriétés: relativement g, m ou d-inversible (I.5) sont vérifiées par tout élément alors le demi-groupe est une réunion de groupes disjoints.

Nous montrons ici qu'à un élément relativement g ou d-inversible on peut associer une unité relative et un inverse relatif particuliers; par contre il n'en est généralement pas ainsi sous la seule hypothèse: relativement m-inversible.

PROPOSITION 1. *Soit D un demi-groupe gauche et $a \in D$:*

i) *Si a est relativement d-inversible, alors tout d-inverse relatif pour a est inverse relatif* (I.5) *pour a.*

ii) *Si a est relativement g-inversible, alors a est relativement inversible.*

Preuve. i) $a = aab$ implique: $aba = ab(aab) = aab(ab) = a(ab) = a$ et $baa = ba(aab) = aabab = aab = a$.

ii) Si $a = baa$ alors $t = bba$ est d-inverse relatif pour a et on applique i).

Corollaire. *Soit D un demi-groupe gauche et $a \in D$: si a est relativement inversible, les inverses relatifs pour a sont ses d-inverses relatifs.*

Dans un demi-groupe zéro à droite, quels que soient α et β, $\alpha = \beta\alpha\alpha = \alpha\beta\alpha$: tout β est g ou m-inverse relatif pour α; mais α est son seul inverse relatif.

On montre que dans un demi-groupe gauche si a est relativement inversible, tout m-inverse relatif pour a est aussi g-inverse relatif pour a.

Soit D un demi-groupe gauche et a, b, dans D: a et b sont *inverses relatifs associés* s'ils sont inverses relatifs l'un pour l'autre. Ainsi b est inverse relatif associé à a si et seulement si (corollaire):

$$a = aab \quad \text{et} \quad b = bba .$$

Ces égalités impliquent:

$$a = baa = aba \quad \text{et} \quad b = abb = bab .$$

Lemme 1. *Soit D un demi-groupe gauche, $a \in D$ et $b \in D$ inverse relatif pour a: a et b commutent, $\alpha = ab = ba$ est idempotent et c'est le plus petit des idempotents ε tels que $a = \varepsilon a = a\varepsilon$.*

Proposition 2. *Soit D un demi-groupe gauche et $a \in D$, relativement inversible*:

i) *Il existe un unique $\bar{a}$ inverse relatif associé à a.*

ii) *Il existe un plus petit idempotent α vérifiant: $a = \varepsilon a = a\varepsilon$, avec ε idempotent.*

iii) $a\bar{a} = \bar{a}a = \alpha$.

iv) $\bar{a} = \alpha\bar{a} = \bar{a}\alpha$.

Preuve. i) Unicité: Si b et c sont inverses relatifs associés pour a:

$$b = bba = bb(aac) = aabbc = abc = aacbc = aab(cc) = a(cc) = cac = c .$$

Existence: Avec les notations du lemme 1 et compte tenu de:

$$b\alpha = b(ab) = abb = \alpha b ,$$

on voit que $b\alpha$ est inverse relatif associé à a.

α est appelé *l'unité relative pour a.*

Lemme 2. *Soit D un demi-groupe gauche et α, β, des idempotents de D: s'il existe un idempotent ε tel que $\alpha\beta = \alpha\beta\varepsilon$ alors $\alpha\beta$ est idempotent.*

Preuve. $\alpha\beta(\alpha\beta) = \alpha\beta(\alpha\beta\varepsilon) = \alpha\alpha(\beta\beta)\varepsilon = \alpha\beta\varepsilon = \alpha\beta$.

Ainsi dans un demi-groupe gauche où tout élément est relativement inversible, l'ensemble des idempotents est un demi-groupe g-commutatif pour la loi induite (IV.2 proposition 2).

Lemme 3. *Soit D un demi-groupe gauche dans lequel tout élément est relativement inversible et a (resp: b) dans D, d'unité relative α (resp: β): $\alpha\beta$ est l'unité relative pour ab.*

Preuve. Si ε est l'unité relative pour ab on voit $\bar{a}\bar{b}\varepsilon$ est inverse relatif pour ab; par suite (lemme 1):

$$\varepsilon = ab(\bar{a}\bar{b}\varepsilon) = \bar{a}a(\bar{b}b)\varepsilon = \alpha\beta\varepsilon .$$

Ainsi $\varepsilon = \beta\alpha\varepsilon$ (lemme 2 et commentaires) c'est-à-dire:

$$\varepsilon = \beta\alpha\varepsilon = (b\bar{b})(a\bar{a})\varepsilon = \bar{b}\bar{a}(ab\varepsilon) = \bar{b}\bar{a}(ab) = (a\bar{a})(\bar{b}b) = \alpha\beta .$$

Proposition 3. *Un demi-groupe gauche dans lequel tout élément est relativement inversible est un demi-groupe.*

Preuve. Par le lemme 3:

$$abc = abc(\alpha\beta\gamma) = bac(\beta\alpha\gamma) = bac .$$

Par contre un demi-groupe gauche dans lequel tout élément est relativement m-inversible n'est pas nécessairement un demi-groupe (chapitre suivant).

Proposition 4. *Soit D un demi-groupe gauche, $a \in D$ et $b \in D$, m-inverse relatif pour a*:

i) *$b' = bab$ est m-inverse relatif pour a et a est m-inverse relatif pour b'.*

ii) *$b'' = abb$ est m-inverse relatif pour a et a est g-inverse relatif pour b''. b'' est (donc) relativement inversible.*

iii) *$\alpha = aabb$ est idempotent (c'est l'unité relative pour b'') et $a = \alpha a$.*

Soit D un demi-groupe gauche et $a \in D$; a est partiellement g-inversible (I.5) s'il existe $b \in D$ tel que pour tout $x \in D$:

$$abax = baax = ax .$$

Proposition 4. *Soit D un demi-groupe gauche et a, b dans D*:

i) *Si b est m-inverse relatif pour a alors b est g-inverse partiel pour a.*

ii) *Si b est g-inverse partiel pour a alors $b' = bab$ et $b'' = abb$ sont aussi g-inverses partiels pour a.*

a est m-inverse relatif pour b' et g-inverse relatif pour b''.

$\alpha = aabb$ est idempotent et: $ax = \alpha ax$ pour tout $x \in D$.

V. Exemples. Dans les exemples qui suivent, D est un demi-groupe gauche et n'est pas, en général, un demi-groupe.

V.1. Soit E un ensemble. $D = E^2$ muni de la loi:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_2, b_2) .$$

Tout élément est relativement m-inversible. Quel que soit $b_1 \in E$, $b = (b_1, a_1)$ est m-inverse relatif pour $a = (a_1, a_2)$; $b' = (a_2, a_1)$ et $b'' = \alpha = (a_1, a_1)$ (notations de IV.3 proposition 4).

V.2. Soit E un demi-groupe g-commutatif. $D = E^3$ muni de la loi:

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_3, b_3) .$$

i) Si e est inverse relatif pour d dans E alors quels que soient a_2 et b_2, (e, b_2, a_2) est inverse relatif pour (d, a_2, a_2) dans D. De plus si d n'est pas idempotent dans E, alors (d, a_2, a_2) n'est pas idempotent dans D.

ii) (a_1, a_2, a_3) est partiellement g-inversible dans D si et seulement si a_1 est partiellement g-inversible dans E.

V.3. Soit D un ensemble et Δ une partition de D. Notant δ_a l'élément de Δ qui contient $a \in D$, on considère sur D une loi binaire vérifiant:

i) $ab \in \delta_b$,

ii) $a' \in \delta_a$ et $b' \in \delta_b$ impliquent $a'b' = ab$.

Alors par $ab \in \delta_b$ et $ac \in \delta_c$: $(ab)c = b(ac)$, donc D est un demi-groupe gauche.

Tout élément est partiellement g-inversible ($aba \in \delta_a$). Dans le cas général, il existe des éléments qui ne sont pas relativement m-inversibles.

V.4. Soit E un ensemble. D est l'ensemble des éléments: $a = (a_1, a_2, A)$ où A est une partie de E et a_1, a_2 sont dans E, muni de la loi binaire:

$$(a_1, a_2, A)(b_1, b_2, B) = (a_2, b_2, A \cup B \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\}).$$

La relation sur D:

$$(b_1 = a_1 \text{ ou } b_1 = a_2) \quad \text{et} \quad b_2 = a_2 \quad \text{et} \quad B \subset A,$$

est une relation d'ordre notée $a \leqslant b$. Sa restriction à l'ensemble des idempotents est l'ordre pour la relation: $\alpha = \alpha\beta$ (IV.2 proposition 1).

Pour tout $d \in D$, $a \leqslant b$ implique: $ad \leqslant bd$ et $da \leqslant db$ (*demi-groupe gauche ordonné*).

VI. Espaces affines gauches.

VI.1.

DEFINITION. Un ensemble E est un *espace affine gauche* si E^2 est muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ vérifiant:

A_1: $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ implique $(c, b)\mathscr{R}(a, d)$.

A_2: Pour tous a, b, c, il existe x tel que $(a, b)\mathscr{R}(c, x)$.

A_3: $(a, x)\mathscr{R}(b, x')$ et $(a, y)\mathscr{R}(b, y')$ impliquent $(x, y)\mathscr{R}(x'y')$.

EXEMPLES.

i) Tout ensemble E est un espace affine gauche pour la relation $\mathscr{R}$ sur E^2:

$$(a, b)\mathscr{R}(c, d) \quad \text{si et seulement si} \quad b = d.$$

ii) Soit E un anneau booléen; c'est un espace affine gauche pour:

$$(a, b)\mathscr{R}(c, d) \quad \text{si et seulement si } a+b+c = d.$$

Cas particulier du précédent: E est un ensemble de parties et $+$ la différence symétrique.

VI.2. Soit E un espace affine gauche pour la relation $\mathscr{R}$ sur E^2. On note $D = E^2/\mathscr{R}$ et $(a, b)_*$ la classe de (a, b).

LEMME 1. *Etant donné a, b, c, d, de E il existe un unique élément $(y, z)_*$ de D vérifiant*:

$$(a, b)_* = (x, y)_* \quad \text{et} \quad (c, d)_* = (x, z)_* \quad \text{avec} \quad x \in E.$$

Preuve. Existence: A_2.

Unicité: $(x, y)\mathscr{R}(x', y')$ et $(x, z)\mathscr{R}(x'z')$ impliquent $(y, z)\mathscr{R}(y', z')$ par A_3.

On munit D la loi binaire:

A_4: $(a, b)_* (c, d)_* = (y, z)_*$ (lemme 1).

En particulier: $(a, b)_* (a, d)_* = (b, d)_*$.

Par A_2 on peut toujours se ramener à ce cas.

LEMME 2. *D muni de la loi binaire A_4 est un demi-groupe gauche.*

Preuve. On fera une démonstration générale en considérant: $(a, b)_*$, $(a, c)_*$, $(b, d)_*$:

$$(a, b)_* (a, c)_* (b, d)_* = (b, c)_* (b, d)_* = (c, d)_*,$$

d'autre part:

$$(a, c)_* [(a, b)_* (b, d)_*] = (a, c)_* (b, d')_* \quad \text{avec} \quad (a, d')_* = (b, d)_*,$$
$$\text{soit } (c', d')_* \quad \text{avec} \quad (a, c)_* = (b, c')_*,$$

ce qui, par A_3, implique: $(c', d)_* = (c, d')_*$ c'est-à-dire: $(c', d')_* = (c, d)_*$ par A_1.

Soit B un binaire pour la loi: $(a, b) \to ab \cdot a \in B$ est *g-inverse pour lui-même* si: $a(ax) = x$ pour tout $x \in B$. Si B est un demi-groupe, cette propriété équivaut à: aa est neutre à gauche; de plus: $ababx = aax$ implique: $abx = bax$ pour tous a, b, x, donc un demi-groupe dans lequel tout élément est g-inverse pour lui-même est g-commutatif. En particulier tout groupe d'ordre 2 est commutatif.

On sait ([1], [2] ou [4]) qu'un demi-groupe dans lequel tout élément est g-inverse pour lui-même est le produit d'un demi-groupe zéro à droite par un groupe d'ordre 2.

LEMME 3. *Si $(E, \mathscr{R})$ est un espace affine gauche, tout élément du demi-groupe gauche $D = E^2/\mathscr{R}$ est g-inverse pour lui-même.*

Preuve. $(a, b)_* (a, b)_* (b, x)_* = (b, x)_*$ pour tout $x \in E$ donc pour tout élément de D.

Alors (IV.1 corollaire 3) D est un demi-groupe. On en déduit:

THÉORÈME. *Soit $(E, \mathscr{R})$ un espace affine gauche. $D = E^2/\mathscr{R}$, muni de la loi binaire A_4 est le produit d'un demi-groupe zéro à droite par un groupe (commutatif) d'ordre 2.*

VI.3.

THÉORÈME. *Soit D un demi-groupe dans lequel tout élément est g-inverse pour lui-même*:

i) *D muni de la relation $\mathscr{R}$ sur D^2: $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ si et seulement si: $acd = bdd$, est un espace affine gauche.*

ii) *$\mathscr{R}$ est une congruence pour le binaire produit D^2 et la loi induite dans $D^2/\mathscr{R}$ est la loi A_4.*

iii) *$D^2/\mathscr{R}$ est isomorphe à ${}^{\varphi}D$.*

Preuve. i) Réflexivité: $aab = b = bbb$.

Symétrie: $acd = bdd$ implique $caddb = cab = dbb$.

Transitivité: $acd = bdd$ et $cef = dff$ impliquent: $aef = accef = acdff = bff$.

A_1: D est g-commutatif.

A_2: $x = cab$.

A_3: $abx' = xx'x'$ et $aby' = yy'y'$ impliquent: $xx'y' = abx'x'y' = aby' = yy'y'$.

ii) $aa'b' = bb'b'$ et $cc'd' = dd'd'$ impliquent $(ac, bd)\mathcal{R}(a'c', b'd')$. D'autre part: $(a, b)_* (a, c)_* = (b, c)_*$ et $(b, c)\mathcal{R}(aa, bc)$ puisque $baabc = c = cbcbc$.

iii) Soit $\varepsilon \in D$, neutre à gauche: on lui associe le morphisme de D dans D^2: $a \to (a, \varepsilon)$, puis on compose avec la surjection canonique vers $D^2/\mathcal{R}$ ce qui donne le morphisme θ de D dans $D^2/\mathcal{R}$: $(a)\theta = (a, \varepsilon)_*$. Par A_2, θ est surjectif. $(a)\theta = (b)\theta$ si et seulement si $a\varepsilon = b\varepsilon$ soit $ax = bx$ pour tout $x \in D$: c'est la congruence déterminée par le morphisme φ de D dans ${}^{\varphi}D$ (II.1).

VII. Categories gauches.

VII.1.

DÉFINITION. L'ensemble D est un *binaire partiel* s'il est muni d'une fonction de $D \times D$ dans D.

D est un *demi-groupe gauche partiel* si c'est un binaire partiel vérifiant: K_1: abc est défini si et seulement si $b(ac)$ est défini; alors ils sont égaux.

Soit D un binaire partiel et $0 \notin D$: $D_0 = D \cup \{0\}$, est un binaire pour la loi:

$$(a, b) \to \begin{cases} ab, & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont dans } D \text{ et } ab \text{ est défini,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

0 est appelé zéro ou élément nul.

PROPOSITION. *D_0 est un demi-groupe gauche si et seulement si D est un demi-groupe gauche partiel.*

Preuve. Si D_0 est un demi-groupe gauche: $abc = b(ac)$ sont nuls ou non en même temps.

Si D est un demi-groupe gauche partiel: Lorsque l'un des u, w, t, est zéro alors $uwt = 0 = w(ut)$.

Soit a, b, c, non nuls: quand abc et $b(ac)$ sont définis ils sont égaux; sinon ils valent zéro.

α est *neutre à gauche dans un binaire partiel* si αa défini implique $\alpha a = a$.

VII.2.

DÉFINITION. Une *catégorie gauche* est un binaire partiel vérifiant:

K_1: (VII.1 définition).

K_2: Si ab et ac sont définis alors abc est défini.

K_3: Pour tout a il existe un neutre à gauche α pour lequel αa est défini.

Soit D une catégorie gauche et D_0 le demi-groupe gauche associé (VII.1).

On note N l'ensemble des neutres à gauche de D et $(a)N$ l'ensemble des $\alpha \in N$ pour lesquels $\alpha a \neq 0$ (c'est-à-dire $\alpha a = a$).

LEMME 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *ab est défini,*

ii) *$(a)N = (b)N$,*

iii) *ab et ba sont définis.*

Preuve. i) implique ii): Si $\alpha \in (a)N$: $a(\alpha b) = \alpha ab = ab \neq 0$ implique $\alpha \in (b)N$. Si $\beta \in (b)N$: $\beta ab = a(\beta b) = ab \neq 0$ implique $\beta \in (a)N$.

ii) implique iii): Soit $\alpha \in (a)N = (b)N$; par K_2, $ab(= \alpha ab)$ et $ba(= \alpha ba)$ sont définis.

Ce lemme détermine sur D une partition: on note $(a)D$ la classe de a.

En particulier $(a)N \subset (a)D$.

LEMME 2. *$b \in (a)D$ implique $ab \in (a)D$.*

Preuve. $\alpha a \neq 0$ implique $a\alpha \neq 0$ (lemme 1); $a\alpha \neq 0$ et $ab \neq 0$ impliquent (K_2) $\alpha ab = \alpha(ab) \neq 0$ donc $(ab) \in (\alpha)D = (a)D$.

Par conséquent $(a)D$ est un demi-groupe gauche, contenant des neutres à gauche (ici $\alpha x = x$ pour tout x): On sait (IV.1 corollaire 2) que c'est un demi-groupe g-commutatif; d'où:

THÉORÈME. *Toute catégorie gauche est la réunion de demi-groupes g-commutatifs D_i disjoints tels que:*

i) *Pour chaque D_i l'ensemble des neutres à gauche n'est pas vide.*

ii) *ab est défini si et seulement si a et b sont dans le même D_i.*

References

[1] A. Batbedat, *Sur la notion d'élément inversible dans un binaire ou dans un ternaire*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris du 10 septembre 1973, t. 277, A-409.

[2] — *Prémodules, préalgèbres et leur contexte affine*, chapitre IX. Thèse de doctorat d'état, Faculté des Sciences de Lyon, 25 septembre 1974.

[3] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, 1958.

[4] A. H. Clifford et G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semi-groups*, 1961.

[5] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, 1965.

[6] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (1953).

[7] V. G. Lemlein, Moskov. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap. 375 (1971), pp. 68–79.

[8] E. S. Ljapin, *Polygroupes*, Moscou 1960.

[9] V. V. Vagner, *Groupes généralisés*, Doklady Akad. Nauk SSSR (1952).

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
Montpellier, France

Accepté par la Rédaction le 12. 5. 1975