[6] R. J. Koch and I. S. Krule, *Weak cutpoint ordering on hereditarily unicoherent continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), pp. 679–681.
[7] L. Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. 83 (1974), pp. 111–120.
[8] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), pp. 152-182.
[9] S. B. Nadler, Jr. and L. E. Ward, Jr., *Concerning continuous selections*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), pp. 369–374.
[10] L. E. Ward, Jr., *A fixed point theorem for multi-valued functions*, Pacific J. Math. 8 (1958), pp. 921–927.
[11] G. T. Whyburn, *Analytical Topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 28 (1942), New York.

UNIVERSITY OF KENTUCKY
and
WEST VIRGINIA UNIVERSITY

Accepté par la Rédaction le 28. 10. 1974

Emploi des filtres sur N dans l'étude descriptive des fonctions

par

Maryvonne Daguenet (Paris)

Résumé. Etude des premières propriétés du préordre entre les filtres défini par $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}$ si — $\mathcal{F}$ étant un filtre sur I et $\mathcal{G}$ un filtre sur J — il existe une application $h\colon J \to I$ telle que $\mathcal{F} \subset h(\mathcal{G})$, et étude des positions relatives de certains filtres simples: $\mathcal{N}^{\alpha}$, $\mathcal{M}$. Ce préordre çi dessus est une extension du préordre entre les ultrafiltres appelé préordre de Rudin-Keisler. Il a été introduit par M. Katětov afin de classifier les fonctions discontinues [7], [8].

Nous retrouvons, au moyen de comparaison avec ces filtres simples $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}^{\alpha}$, des classes d'ultrafiltres aux propriétés combinatoires intéressantes déjà étudiées, voir M. Choquet [4]. Il semble que l'extension aux filtres de qualités définies pour les ultrafiltres, obtenue de cette façon soit significative pour l'étude des fonctions, d'après la forme des résultats qu'elle permet d'obtenir, et d'après les questions qu'elle permet de poser.

Le présent article est principalement destiné à répondre à trois questions de M. Katětov posées en [8]; mais nous avons nettement séparé la partie combinatoire concernant l'étude du préordre afin de rendre sa lecture indépendante de l'application à l'étude des fonctions, objet de [8], et içi des §§ 0 et 4.

Introduction. M. Katětov donne en [7] et [8] une classification des fonctions et une caractérisation de certaines classes de fonctions au moyen des filtres sur l'ensemble des entiers. Nous répondons ici à trois des problèmes combinatoires posés par lui en [8], problèmes approchant la question centrale: "De quelle façon cette classification à l'aide des filtres, simplifie, étend et précise la classification partielle en les classes de Baire d'ordre α".

Pour simplifier le travail du lecteur, nous donnons d'abord un résumé de la partie du travail de Katětov utilisée ici, et ce faisant, nous introduisons les notations et définitions dont nous avons besoin. Ceci sera l'objet du § 0 de cet article.

La suite traite des filtres. Ce travail permet de répondre à des questions posées en [8], mais présente aussi un intérêt en lui-même: le préordre combinatoire entre les filtres — que nous appelons préordre de Katětov — qui y est étudié, est une extension de l'ordre combinatoire entre les ultrafiltres connu sous le nom de préordre de Rudin–Keisler. Nous démontrons (i) que l'ordre associé au préordre de Katětov n'est pas linéaire, ce indépendamment de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu; (ii) que les filtres $\mathcal{N}^{\alpha}$ — que nous définirons plus loin; ils sont essentiels dans l'étude de la classe des fonctions de Baire d'ordre α — possèdent tous une propriété combinatoire [1]; (iii) qu'il existe de nombreux filtres, dont des filtres boréliens, strictement compris entre $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}^2$ ($\mathscr{N}^\alpha$ et $\mathscr{N}^{\alpha+1}$) selon l'ordre de Katětov — nous démontrerons de plus à l'occasion de ce problème que les filtres $\mathscr{N}^\alpha$ et $\mathscr{N}^{\alpha+1}$ ne sont pas équivalents pour le préordre de Katětov, et ceci d'une façon purement combinatoire [2].

Nous conclurons par deux remarques sur le filtre des voisinages d'une fonction discontinue sur un espace métrique compact T.

Nous remercions A. Blass pour nous avoir signalé une amélioration du théorème 2.11 initial et pour nous avoir fait de nombreuses observations qui nous ont été utiles.

§ 0. Emploi des filtres sur N à l'étude des fonctions

0.0. Conventions. [2] est une référence à un article répertorié à la fin de celui-ci. (2) est une référence à l'alinéa 2 du même paragraphe.

Les inégalités que nous rencontrerons dans ce texte: $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$ (ou $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$) seront des *inégalités larges*. Lorsque nous voudrons préciser que de plus $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$, nous écrirons $\mathscr{F} < \mathscr{G}$ (ou $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$).

Soit I un ensemble. $\mathscr{P}(I)$ désigne $\{J|\ J \subset I\}$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$. Un *filtre* $\mathscr{F}$ sur I est une partie de $\mathscr{P}(I)$ telle que (1) $X \in \mathscr{F}$, $Y \in \mathscr{F}$, $X \cap Y \subset Z \subset I \to Z \in \mathscr{F}$, et (2) $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Le filtre $\mathscr{F}$ sera dit *principal* si $(\bigcap F)$ pour $F \in \mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$, et *libre* si $(\bigcap F)$ pour $F \in \mathscr{F}$ est vide. N désigne l'ensemble des entiers. $\mathscr{N}^0$ sera le filtre sur N égal à $\{X|\ 0 \in X \subset N\}$. Le filtre de Fréchet sur N sera noté $\mathscr{N}$; c'est l'ensemble des complémentaires des parties finies de N.

0.1. Definitions. Soient A et B deux ensembles, $\mathscr{G}$ un filtre sur B et h une application de B dans A. Nous désignerons par $h(\mathscr{G})$ le filtre sur A engendré par $(h(G))_{G \in \mathscr{G}}$. Le filtre $h(\mathscr{G})$ sera dit *image* du filtre $\mathscr{G}$, ou bien *image selon* h du filtre $\mathscr{G}$ si l'on veut être plus précis.

Soient A et B deux ensembles, $\mathscr{F}$ un filtre sur A et $\mathscr{G}$ un filtre sur B. Nous écrirons $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$ et nous dirons que $\mathscr{F}$ est *plus petit* que $\mathscr{G}$ ou que $\mathscr{G}$ est *plus grand* que $\mathscr{F}$, s'il existe une application h de B dans A telle que $\mathscr{F}$ et $h(\mathscr{G})$ vérifient — en tant que sous-ensembles de $\mathscr{P}(A)$ — $\mathscr{F} \subset h(\mathscr{G})$. La relation $\leqslant$ est une relation de préordre sur les filtres.

Si $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$ et $\mathscr{G} \leqslant \mathscr{F}$, nous dirons que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même *Type*. Cette relation est une relation d'équivalence et la classe des Types est ordonnée par le préordre quotient. Cet ordre sera noté du même signe que le préordre $\leqslant$, il sera nommé l'ordre de Katětov.

Si h est un isomorphisme de B *sur* A et si $\mathscr{F} = h(\mathscr{G})$, alors $\mathscr{G} = h^{-1}(\mathscr{F})$. Nous dirons dans ce cas que les filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *isomorphes*. Cette relation est une relation d'équivalence plus fine que la précédente.

---

[1] Voisine de celle d'être rare [4] pour un ultrafiltre.

[2] § 0, à l'exception des conventions 0.0 et des définitions 0.1, n'est pas nécessaire pour la lecture des §§ 1, 2 et 3.

0.2. Notre travail, qui sera exposé en seconde partie, concerne les filtres sur des ensembles dénombrables, plus exactement, les Types de tels filtres. Comme il est plus facile de manier des objets plutôt que des classes d'équivalence, nous emploierons à l'occasion, des filtres sur des ensembles dénombrables choisis pour leur commodité comme représentants de ces classes. Si l'on tient à n'employer que des filtres sur l'ensemble des entiers, on se fixera au préalable des isomorphismes envoyant ces filtres — représentants commodes — sur des filtres sur l'ensemble des entiers, et on transcrira les résultats concernant les premiers filtres à l'aide de ces isomorphismes. Nos résultats, concernant les Types, à la rigueur les Types d'isomorphismes, sont inchangés par ces transformations.

0.3. Notations. Soit P un espace topologique séparé. Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur A et $\{x_a|\ a \in A\}$ est une famille de points de P, un point x de P sera la $\mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\{x_a|\ a \in A\}$ si à tout voisinage V de x correspond $F \in \mathscr{F}$ tel que $x_a \in V$ dès que $a \in F$.

Si S est une partie de P, l'ensemble de tous les points $\mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\{x_a|\ x_a \in S,\ a \in A\}$ existant, sera noté $\mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\,S$.

0.4. Proposition. *Soit P un espace séparé et $S \subset P$. Si $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$, alors $\mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\,S \subset \mathscr{G}\text{-}\mathrm{Lim}\,S$.*

0.5. Nous nous intéresserons particulièrement au cas où $S = C(T)$ (l'ensemble des fonctions continues définies sur un espace topologique T et à valeurs réelles) et $P = F(T)$ (l'ensemble des fonctions définies sur T à valeurs réelles, muni de la topologie de la convergence simple).

0.6. Proposition. *Si T est un espace séparable métrisable, alors à tout $f \in F(T)$ correspond au moins un filtre sur un ensemble dénombrable $\mathscr{F}$ tel que $f \in \mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\,C(T)$.*

0.7. Remarque. Si $T = \beta N$ et f est la fonction caractéristique d'un ultrafiltre, il est facile de voir que pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble dénombrable, $f \notin \mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\,C(T)$.

0.8. Notation. Soit $\mathscr{T}$ la classe de tous les espaces topologiques. Convenons de noter $\bigcup(C(T)|\ T \in \mathscr{T})$ la classe de tous les couples composés d'un espace topologique T et d'une fonction continue et définie sur T. Pour tout filtre $\mathscr{F}$, sur N, posons $\mathrm{Cl}(\mathscr{F}) = \bigcup(\mathscr{F}\text{-}\mathrm{Lim}\,C(T)|\ T \in \mathscr{T})$; c'est la classe de tous les couples composés d'un espace topologique T et d'une fonction sur T limite selon $\mathscr{F}$ d'une suite de fonctions continues définies sur T. Par exemple, en employant une formule raccourcie que chacun saura rectifier, $\mathrm{Cl}(\mathscr{N}^0)$ consiste en les fonctions continues, et $\mathrm{Cl}(\mathscr{N})$ consiste en les limites simples de fonctions continues.

0.9. Proposition. *Si $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$, alors $\mathrm{Cl}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Cl}(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même Type, $\mathrm{Cl}(\mathscr{F}) = \mathrm{Cl}(\mathscr{G})$.*

0.10. Enoncé de deux problèmes que nous allons résoudre, partiellement pour 1, entièrement pour 2:

1) Est-ce que $\mathrm{Cl}(\mathscr{F}) = \mathrm{Cl}(\mathscr{G})$ implique $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même Type?

2) Est-ce que $\mathrm{Cl}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Cl}(\mathscr{G})$ implique $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$?

Nous avons besoin de quelques définitions et théorèmes en plus.

0.11. DÉFINITIONS. Soit $\mathcal{N}^1$ le filtre de Fréchet $\mathcal{N}$ sur $D_1 = N$. Soit $\alpha > 1$ un ordinal dénombrable; supposons que les filtres $\mathcal{N}^\gamma$ sur D_γ aient été définis pour tout $\gamma < \alpha$. Si $\alpha = \beta+1$, posons $D_{\beta+1} = N \times D_\beta$ et définissons $\mathcal{N}^{\beta+1}$ comme le filtre engendré sur $D_{\beta+1}$ par $(\bigcup_{n>n_0} \{n\} \times X_n)_{n_0, (X_n)}$, pour $n_0 \in N$ et $X_n \in \mathcal{N}^\beta$ pour chaque $n > n_0$. Si α est un ordinal limite, posons $D_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} (\{\delta\} \times D_\delta)$ et définissons $\mathcal{N}^\alpha$ comme le filtre sur D_α engendré par $(\bigcup_{\delta_0<\delta} \{\delta\} \times X_\delta)_{\delta_0, (X_\delta)}$, pour $\delta_0 \in \alpha$ et $X_\delta \in \mathcal{N}^\delta$ pour chaque $\delta > \delta_0$. Le Type du filtre $\mathcal{N}^\alpha$ sera désigné par $\underline{\alpha}$.

0.12. THÉORÈME [1]. *Pour tout ordinal α dénombrable, la classe* $\mathrm{Cl}(\mathcal{N}^\alpha)$ *consiste en la classe des fonctions de Baire d'ordre α.*

0.13. DÉFINITION. Soit I un ensemble dénombrable. Identifions $\mathcal{P}(I)$ et 2^I en associant à $J \subset I$ sa fonction caractéristique. Munissons 2^I de la topologie produit de "I fois" l'ensemble discret à deux éléments. Transportons cette topologie sur $\mathcal{P}(I)$. Désignons par $A \,\Delta\, B$ la différence symétrique $A \dot{-} B \cup B \dot{-} A$. $(\mathcal{P}(I), \Delta)$ est un groupe compact métrisable.

Un filtre sur I sera dit souslinien (ou borélien) s'il est souslinien (ou borélien...) en tant que sous ensemble de $\mathcal{P}(I)$ muni de la topologie ci-dessus.

0.14. THÉORÈME (cf. [7]). *A tout filtre souslinien $\mathcal{F}$ correspond un ordinal dénombrable β tel que*

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{N}^\beta).$$

Il ressort de la démonstration de ce théorème, des lemmes le précédant, et du théorème 2.14 de [7], que si $\mathcal{F}$ appartient à H_n^a, pour *n fini*, en posant:

H_0^a = l'ensemble des ouverts de $\mathcal{P}(N)$.

H_0^m = les fermés complémentaires des ouverts $\in H_0^a$.

$H_{k+1}^a = \sigma(H_k^m)$, les sommes dénombrables d'éléments de H_k^m.

$H_{k+1}^m = \delta(H_k^a)$, les intersections dénombrables d'éléments de H_k^a, alors

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{N}^{n+1}).$$

0.15. MÉTHODE. Notre réponse à la question 2) consiste en la construction d'un filtre borélien $\mathcal{M} \in H_1^a$ non comparable — selon le préordre de Katětov — aux filtres $\mathcal{N}^\alpha$, si ce n'est par la relation $\mathcal{N} < \mathcal{M}$. Ainsi nous aurons $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{N}^\alpha)$, plus précisément $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{N}^2)$ alors que, $\mathcal{M} \nless \mathcal{N}^\alpha$ quel que soit α.

Nous pourrons même préciser ce résultat, en utilisant d'autres notions toujours dues à Katětov.

0.16. DÉFINITION (4.7) de [8]. Soit T un espace compact métrisable. Notons $\mathcal{Y}(T)$ la collection des parties dénombrable Y de $C(T)$ qui sont denses dans $C(T)$ muni de la convergence uniforme. Si $f \in F(T)$, $Y \in \mathcal{Y}(T)$, posons $Y_f = Y \cup \{f\}$ si f est continue, $Y_f = Y$ sinon. Notons $\Phi(f, Y)$ le filtre sur Y_f engendré par

(1) Voir [7] et aussi [6].

$\{g \mid g \in Y_f, f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon\}$ où $t \in T$, $\varepsilon > 0$. Il est facile de voir que pour tout $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}(T)$, $\Phi(f, Y_1)$ est isomorphe à $\Phi(f, Y_2)$. Nous posons $\Phi(f) = \mathrm{Type}\, \Phi(f, Y)$ pour $Y \in \mathcal{Y}(T)$; $\Phi(f)$ sera appelé le *Type descriptif de f*.

0.17. THÉORÈME (cf. [8]). *Soit T un espace compact métrisable. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, alors une fonction $f \in F(T)$ appartient à* $\mathrm{Cl}(\mathcal{F})$ *si et seulement si*

$$\Phi(f) \leqslant \mathrm{Type}\,\mathcal{F}.$$

0.18. MÉTHODE (suite). Posons $\mathrm{Cl}_1 \mathcal{F} = \bigcup (\mathcal{F}\text{-}\mathrm{Lim}\, C(T))$ pour T appartenant à la classe des espaces topologiques compacts métrisables. D'après la définition et le théorème précédent, si

$$f \in \mathrm{Cl}_1(\mathcal{M}) \quad \text{c'est que} \quad \Phi(f) \leqslant \mathrm{Type}\,\mathcal{M},$$

par suite

$$f \in \mathrm{Cl}_1(\mathcal{N}^2) \quad \text{et} \quad \Phi(f) \leqslant \mathrm{Type}\,\mathcal{N}^2.$$

Nous allons voir en § 2 que le préordre de Katětov sur les filtres est tel qu'étant donné deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, il existe un filtre $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ qui est le plus grand des filtres plus petits que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Ainsi, dès que

$$f \in \mathrm{Cl}_1(\mathcal{M}), \quad \Phi(f) \leqslant \mathrm{Type}(\mathcal{M} + \mathcal{N}^2).$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Type}\,\mathcal{M} \neq \mathrm{Type}(\mathcal{M} + \mathcal{N}^2)$, et ainsi nous aurons montré que

$$\mathrm{Cl}_1(\mathcal{M}) = \mathrm{Cl}_1(\mathcal{M} + \mathcal{N}^2) \quad \text{sans que} \quad \mathrm{Type}\,\mathcal{M} = \mathrm{Type}(\mathcal{M} + \mathcal{N}^2).$$

0.19. Le travail sur les filtres nous permettant de répondre aux questions 1) et 2) est exposé dans les §§ 1 et 2 de cet article. Il nous permet aussi de répondre à une troisième question de Katětov [8].

3) Existe-t-il des Types de filtres strictement compris entre le Type de $\mathcal{N}$, (noté $\underline{1}$) et celui de $\mathcal{N}^2$ (noté $\underline{2}$). Ce problème est résolu dans le § 2. Ce dernier pose ensuite la question:

4) Existe-t-il des Types de filtres strictement compris entre le Type de $\mathcal{N}^\alpha$, $(\underline{\alpha})$, et celui de $\mathcal{N}^{\alpha+1}$, $(\underline{\alpha+1})$, pour tout α dénombrable?

Ce problème est résolu dans le § 3. La notion de filtre *isotrope* est introduite dans le § 2.

§ 1. L'ordre de Katětov entre les types de filtres n'est pas linéaire

1.1. CONVENTIONS. Nous ne considérons dans ce travail que des filtres sur des ensembles *dénombrables*. Aussi, omettrons-nous de préciser "I est dénombrable", quand nous parlerons de filtres sur un ensemble I.

Nous aurons souvent à parler d'applications de source I et de but J, où I est un ensemble fixé auparavant et où J est n'importe quel ensemble. Pour éviter à chaque fois de parler de ces ensembles inutiles, nous utiliserons la formule "h est une application définie sur I", sans préciser son but.

1.0. NOTATIONS. Soit I un ensemble dénombrable et f une application définie sur I. Nous dirons que f est *finijective* si quel que soit $j \in f(A)$, $\operatorname{card} f^{-1}(j)$ est fini et que j est *infinijective* si quel que soit $j \in f(A)$, $\operatorname{card} f^{-1}(j)$ est infini. Si $A \subset I$, la restriction de f à A sera notée $f \upharpoonright A$.

Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur I. Le sous-ensemble $\mathscr{F}^*$ de $\mathscr{P}(I)$ désigne

$$\{J \mid J \cap F \neq \emptyset,\ \text{quel que soit } F \in \mathscr{F}\}.$$

Si $A \in \mathscr{F}^*$, le signe $\mathscr{F} \upharpoonright A$ désigne le *filtre sur* A composé de $\{F \cap A \mid F \in \mathscr{F}\}$.

1.1. DEFINITION. Nous dirons qu'un filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble I est *stable* si à toute application f définie sur I correspond $A \in \mathscr{F}^*$ tel que $f \upharpoonright A$ soit ou bien constante ou bien finijective.

Note. $\mathscr{F}$ est stable, si et seulement si il existe pour toute suite décroissante (A_n) d'éléments de $\mathscr{F}$, un élément $A \in \mathscr{F}^*$ tel que pour tout n, $\operatorname{card}(A \dot{-} A_n)$ soit fini; cet ensemble A "diagonalise" la suite (A_n).

1.2. EXEMPLES. $\mathscr{N}$ est stable; tout ultrafiltre δ stable [4], [11] est stable et réciproquement, tout ultrafiltre stable est δ stable. $\mathscr{N}^2$ n'est pas stable.

1.3. PROPOSITION. *Si deux filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ vérifient "$\mathscr{G}$ est stable" et "$\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$", alors $\mathscr{F}$ est stable.*

Preuve. Supposons que $\mathscr{G}$ est un filtre sur J et que $\mathscr{F} \subset h(\mathscr{G})$. Donnons-nous une application k définie sur $h(J)$. Pour un $A \in \mathscr{G}^*$, $k \circ h \upharpoonright A$ est soit constante, soit finijective. Ainsi, pour $h(A) \in \mathscr{F}^*$, $k \upharpoonright h(A)$ est constante ou finijective. Le filtre $\mathscr{F}$ est stable.

1.4. COROLLAIRE. *Si $\underline{\tau}$ est un Type, et si $\mathscr{F} \in \underline{\tau}$ est stable, tout $\mathscr{G} \in \underline{\tau}$ est stable. Nous dirons dans ce cas que $\underline{\tau}$ est stable.*

1.5. CONSTRUCTION. Appelons $\mathscr{M}$ le filtre sur N^2 engendré par

1) $N^{2-} =$ (par définition) $\{(m, n) \mid n < m\}$ d'une part,

2) les complémentaires des ensembles X tels que, pour tout $m \in N$, $\operatorname{card}[X \cap (\{m\} \times N)] \leqslant 1$.

En d'autres termes, $\mathscr{M}$ est un filtre construit économiquement pour que π_1 la première projection de N^2 sur N vérifie:

"$\pi_1 \upharpoonright A$ est finijective pour un $A \in \mathscr{M}$ et

$\pi_1 \upharpoonright B$ n'est pas injective quel que soit $B \in \mathscr{M}^*$".

Quel que soit $k \in N$,

$$\mathscr{Y}_k = \{Y \mid \text{pour tout } m,\ \operatorname{card}[Y \cap (\{m\} \times \langle 0, \ldots, m \rangle)] > m - k\}$$

est un fermé de $\mathscr{P}(N^2)$. Le filtre $\mathscr{M}$ en tant que $\bigcup \mathscr{Y}_k$ est réunion dénombrable de fermés de $\mathscr{P}(N^2)$.

1.6. PROPOSITION. *$\mathscr{M}$ est stable.*

Preuve. Soit f une application définie sur N^2. Supposons que pour un $j \in f(N^2)$, $\operatorname{card}[f^{-1}(j) \cap (\{m\} \times \langle 0, \ldots, m \rangle)]$ soit une fonction en m non bornée. Pour un tel j, $A = f^{-1}(j) \in \mathscr{M}^*$ et $f \upharpoonright A$ est constante.

Sinon, quel que soit $j \in f(N^2)$, $\operatorname{card}[f^{-1}(j) \cap (\{m\} \times \langle 0, \ldots, m \rangle)]$ est une fonction bornée, ce qui fait que pour tout j,

$$\{(m, n) \mid f(m, n) > j\} \in \mathscr{M},$$

si l'on suppose l'ensemble dénombrable $f(N^2)$ ordonné comme N.

Prenons (m_1, n_1) dans N^{2-}, puis (m_2, n_{12}) et (m_2, n_{22}) deux éléments distincts de $\{(m, n) \mid f(m, n) > f(m_1, n_1)\}$ puis (m_3, n_{13}), (m_3, n_{23}), (m_3, n_{33}) trois éléments distincts de

$$\{(m, n) \mid f(m, n) > \sup[f(m_2, n_{12}), f(m_2, n_{22})]\}, \quad \text{etc}.$$

L'ensemble A de tous ces termes (m_i, n_{ji}) appartient à $\mathscr{M}^*$ et $f \upharpoonright A$ est finijective puisque croissante et non bornée.

1.7. COROLLAIRE. $\mathscr{N}^2 \not\leqslant \mathscr{M}$.

1.8. DEFINITION. Nous dirons qu'un filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble I est *vif* si quelles que soient l'application f définie sur I et l'application g finijective définie sur $f(I)$ il existe $A \in \mathscr{F}^*$ tel que $g \upharpoonright f(A)$ est injective.

1.9. EXEMPLES. $\mathscr{M}$ n'est pas vif. Un ultrafiltre rare [4] dont toutes les images sont rares est vif et réciproquement, un ultrafiltre vif est rare et toutes ses images sont rares. Tel est le cas d'un ultrafiltre absolu [4].

1.10. PROPOSITION. *Si deux filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ vérifient "$\mathscr{G}$ est vif" et "$\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$", alors $\mathscr{F}$ est vif.*

Preuve. Supposons que $\mathscr{G}$ est un filtre vif sur J et que $\mathscr{F} \subset h(\mathscr{G})$. Donnons-nous une application f définie sur $h(J)$ et une application g finijective définie sur $f \circ h(J)$. Alors, pour un $A \in \mathscr{G}^*$, $g \upharpoonright f \circ h(A)$ est injective, si bien que pour un $h(A) \in \mathscr{F}^*$, $g \upharpoonright f[h(A)]$ est injective. Le filtre $\mathscr{F}$ est vif.

1.11. COROLLAIRE. *Si $\underline{\tau}$ est un Type, et si $\mathscr{F} \in \underline{\tau}$ est vif, tout $g \in \underline{\tau}$ est vif. Nous dirons dans ce cas que $\underline{\tau}$ est vif.*

1.12. PROPOSITIONS. *$\mathscr{N}$ est vif.*

Preuve. Quelle que soit f, définie sur N, il existe $A \in \mathscr{N}^*$ tel que $f \upharpoonright A$ est injective (cas 1), ou constante (cas 2).

Donnons-nous g finijective.

Si nous sommes dans le cas 1, $f(\mathscr{N} \upharpoonright A)$ est isomorphe à $\mathscr{N} \upharpoonright A$, donc à $\mathscr{N}$. Réutilisons l'énoncé en début de preuve. Le seul cas à envisager est le cas 1 car g est finijective. Ainsi g est de restriction injective sur $B \in [f(\mathscr{N} \upharpoonright A)]^* \subset [f(\mathscr{N})]^*$.

Si nous sommes dans le cas où $f \upharpoonright A$ est constante pour $A \in \mathscr{N}^*$, alors g est naturellement injective sur $f(A)$.

1.13. PROPOSITION. *$\mathscr{N}^2$ est vif.*

Preuve. De la même manière, quelle que soit f, définie sur N^2, il existe $A \in (\mathscr{N}^2)^*$ tel que $f \upharpoonright A$ est injective ou $f \upharpoonright A = \theta \circ \pi_1$.

Nous sommes dans le premier cas dès que card B est infini, où $B=\{n|\ \mathrm{card} f(\{n\}\times N)$ est infini$\}$. Donnons-nous une application bijective (θ_1,θ_2) entre N et N^2, en décrétant pour chaque n, que le point $(a_n,b_n)\in A$ si a_n est le $\theta_1(n)$-ième élément de B et si b_n est le premier élément B de $A\cap\{a_n\}\times N$ tel que $f(a_n,b)\neq f(a_m,b_m)$ pour tout $m<n$.

Si l'on n'est pas dans le premier cas, c'est que l'ensemble B est fini. Pour tout n assez grand, prenons pour $\varphi(n)$ la plus petite valeur m telle que $\{f^{-1}(m)\cap\{n\}\times N\}$ est de cardinalité infinie. Posons $A=\bigcup[f^{-1}(\varphi(n))\cap\{n\}\times N]$. Nous avons bien $f\restriction A=\theta\circ\pi_1$. Supposons que $f\restriction A$ est injective, pour $A\in(\mathcal{N}^2)^*$. Nous recommençons pour g et $f[\mathcal{N}^2\restriction A]$ ce que nous avons fait pour f et $\mathcal{N}^2$. L'application g étant finijective, nous n'avons qu'un cas à considérer, celui où pour $B\in f(\mathcal{N}^2\restriction A)^*\subset f(\mathcal{N}^2)^*$, $g\restriction B$ est injective.

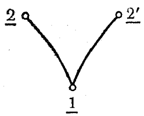
Supposons que $f\restriction A=\theta\circ\pi_1$, avec $A\in(\mathcal{N}^2)^*$. Le filtre $\pi_1(\mathcal{N}^2\restriction A)=\mathcal{N}\restriction\pi_1(A)$ est de même Type que $\mathcal{N}$. Si bien que le filtre $f\restriction A$, plus petit qu'un filtre vif, est vif.

1.14. Corollaire. $\mathcal{M}\nleqslant\mathcal{N}^2$.

1.15. Théorème. *L'ordre de Katětov sur la classe des Types n'est pas total: les Types des filtres $\mathcal{N}^2$ et $\mathcal{M}$ ne sont pas comparables.*

1.16. Remarque. Ce théorème ne demande aucune hypothèse tell que l'axiome du choix et l'hypothèse du continu, même sous une forme faible.

1.17. Corollaire. *Les Types des trois filtres $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^2$ et $\mathcal{M}$ sont tous différents. Convenons de désigner ces Types par $\underline{1}$, $\underline{2}$ et $\underline{2}'$, en accord avec Katětov pour les deux premiers Types.*



1.18. Proposition. (1) *Un filtre $\mathcal{F}$ est stable si et seulement si $\mathcal{N}^2\nleqslant\mathcal{F}$*; (2) *il est vif si et seulement si $\mathcal{M}\nleqslant\mathcal{F}$.*

Preuve. (1) $\mathcal{N}^2\leqslant\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ n'est pas stable.

Réciproquement, supposons que le filtre $\mathcal{F}$ sur I n'est pas stable: il existe une application f telle que, pour tout $A\in\mathcal{F}^*$, $f\restriction A$ n'est pas finijective. Ce n'est pas se restreindre que de supposer que f est à valeurs dans N et que I est ordonné comme N.

Posons pour tout $i\in I$, $h(i)=\big(f(i)$, rang de i dans $f^{-1}(f(i))\big)$; h est une application définie sur I à valeurs dans N^2.

Soit φ une application de N dans N. Posons

$$A=h^{-1}(\{(m,n)|\ m\in N,\ n\in N,\ m_0<m \text{ et } \varphi(m)\geqslant n\}),$$

$f\restriction A$ est finijective. Aussi, nécessairement, $A\notin\mathcal{F}^*$, et

$$h^{-1}(\{(m,n)|\ m>m_0 \text{ et } \varphi(m)<n\})\in\mathcal{F}.$$

Ainsi, $\mathcal{N}^2\subset h(\mathcal{F})$.

(2) $\mathcal{M}\leqslant\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ n'est pas vif.

Réciproquement, supposons que le filtre $\mathcal{F}$ sur I n'est pas vif: il existe f définie sur I, et g finijective définie sur $f(I)$ telles que, pour tout $A\in\mathcal{F}^*$, $g\restriction f(A)$ n'est pas injective. Supposons que $g\circ f$ est à valeurs dans N, et que $f(N)$ est ordonné comme N.

Posons pour tout $j\in f(N)$,

$$h(j)=[\mathrm{card}\, g^{-1}(g(j)),\ \text{rang de } j \text{ dans } g^{-1}(g(j))];$$

h est une application définie sur $f(N)$ et à valeurs dans N^2.

Si $X\subset N^2$ est tel que pour tout n $\mathrm{card}\big(X\cap(\{n\}\times N)\big)\leqslant 1$, alors $g\restriction h^{-1}(X)$ est injective. Aussi, nécessairement, $h^{-1}(X)\notin[f(\mathcal{F})]^*$, or, $h^{-1}(\{(m,n)|\ m\in N,\ n\in N \text{ et } m<n\})\in f(\mathcal{F})$, ainsi,

$$h^{-1}(\{(m,n)|\ m\in N,\ n\in N,\ m<n \text{ et } (m,n)\notin X)\in f(\mathcal{F}).$$

Ainsi, $\mathcal{M}\subset h\circ f(\mathcal{F})$.

Parlons un peu d'ultrafiltres.

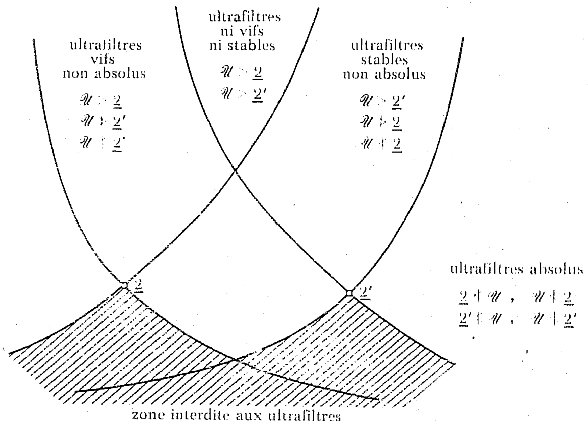
1.19. Tout ultrafiltre plus petit qu'un filtre est image de ce filtre. Un lemme fondamental dans l'étude des ultrafiltres (voir par exemple [1] ou [3]) dit qu'un ultrafiltre $\mathcal{D}$ n'est image de lui-même que selon des applications de germe en $\mathcal{D}$ l'identité.

1.20. Conséquence. *Deux ultrafiltres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont même Type si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont isomorphes.*

Ainsi, le préordre $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ restreint à l'ensemble des ultrafiltres sur N coïncide avec le préordre $<$ dont la définition est $\mathcal{D}\leqslant_{\mathrm{RK}}\mathcal{D}'$ si pour un h, $\mathcal{D}=h(\mathcal{D}')$; le Type d'un ultrafiltre $\mathcal{D}$ ne contient comme autres ultrafiltres que des ultrafiltres isomorphes à $\mathcal{D}$; l'ordre $\leqslant$ restreint à l'ensemble des Types d'ultrafiltres sur N est isomorphe à l'ordre $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes d'ultrafiltres.

Pour montrer que l'ordre entre les Types n'est pas linéaire, il *suffit* de montrer que l'ordre $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ entre les ultrafiltres n'est pas linéaire. Ainsi, un ultrafiltre δ stable non absolu [4] et un ultrafiltre vif non absolu ne sont pas comparables (un *ultrafiltre* est *absolu* s'il est à la fois vif et stable). Mais l'existence de tels ultrafiltres n'est assurée, pour le moment, que si l'axiome du choix et l'hypothèse du continu (ou du moins une forme faible de ces axiomes) sont vérifiés. La méthode de Kunen pour montrer que RK n'est pas linéaire au moyen des ensembles indépendants de Hausdorff demande l'axiome du choix. Tandis que les deux filtres $\mathcal{N}^2$ et $\mathcal{M}$ existent dans tous les modèles de théorie des ensembles et y sont toujours incomparables.

Classification des ultrafiltres



La partie hachurée du diagramme ($\mathcal{F} < \underline{2}$ ou $\mathcal{F} < \underline{2}'$) ne contient aucun ultrafiltre. En effet,

1.21. PROPOSITION. *Un ultrafiltre n'est jamais plus petit qu'un filtre analytique.*

Preuve. Si un ultrafiltre est plus petit qu'un filtre, il est image de ce filtre. Toute image d'un filtre analytique est analytique, car tout filtre de base analytique est analytique. Mais un ultrafiltre libre ne peut être analytique; sinon il serait mesurable; or sa mesure intérieure en tant que filtre libre est 0 (voir par exemple [7]), alors que sa mesure pour la mesure de Haar de volume 1 du groupe compact commutatif $(\mathcal{P}(N), \Delta)$ (voir § 0) devrait être $\frac{1}{2}$.

§ 2. L'ordre de Katětov est un treillis — conséquences

2.1. DÉFINITION. Soient I et J deux ensembles, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur I et J respectivement, et soient in_1 et in_2 les injections canoniques de I et J dans une de leurs sommes disjointes que nous noterons $I+J$. Le filtre $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ sera le filtre sur $I+J$ engendré par le sous-ensemble $\mathrm{in}_1(\mathcal{F}) \cap \mathrm{in}_2(\mathcal{G})$ de $\mathcal{P}(I+J)$.

2.2. PROPOSITION. *Le filtre $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ est maximal parmi les filtres plus petits que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.*

Preuve. Pour ne pas alourdir les notations, nous sous-entendrons les injections in_1 et in_2. $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ est plus petit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, car

$$\mathcal{F}+\mathcal{G} \leqslant \mathcal{F}+\mathcal{G} \upharpoonright I = \mathcal{F}$$

et

$$\mathcal{F}+\mathcal{G} \leqslant \mathcal{F}+\mathcal{G} \upharpoonright J = \mathcal{G}.$$

Donnons-nous un filtre $\mathcal{H}$ tel que

$$\mathcal{H} \subset f(\mathcal{F})$$

et

$$\mathcal{H} \subset g(\mathcal{G}).$$

Définissons h sur la somme *disjointe* $I+J$ par $h \upharpoonright I = f$ et $h \upharpoonright J = g$. Alors

$$\mathcal{H} \subset h(\mathcal{F}+\mathcal{G}).$$

2.3. COROLLAIRE. *Le Type de $(\mathcal{F}+\mathcal{G})$ ne dépend que du Type de $\mathcal{F}$ et de celui de $\mathcal{G}$.*

2.4. Remarque. La réunion étant plus agréable qu'une somme disjointe, nous tâcherons de nous y ramener quand cela sera possible: c'est ainsi que $\mathcal{M}$ étant isomorphe à $\mathcal{M} \upharpoonright \Delta^-$ pour $\Delta^- = \{(m,n) |\ m \in N,\ n \in N$ et $n<m\}$, et $\mathcal{N}^2$ étant isomorphe à $\mathcal{N}^2 \upharpoonright \Delta^+$ pour $\Delta^+ = \{(m,n) |\ m \in N, n \in N$ et $m<n\}$ nous désignerons par $\mathcal{M}+'\mathcal{N}^2$ le filtre suivant sur N^2:

$$\{A \cup B |\ A \in \mathcal{M} \upharpoonright \Delta^-, B \in \mathcal{N}^2 \upharpoonright \Delta^+\} = \{A \cup B |\ A \in \mathcal{M} \text{ et } B \in \mathcal{N}^2\};$$

il est isomorphe à $\mathcal{M}+\mathcal{N}^2$.

2.5. PROPOSITION. *Le filtre $\mathcal{M}+\mathcal{N}^2$ n'est pas plus petit que $\mathcal{N}$.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{M}+'\mathcal{N}^2 \subset h(\mathcal{N})$.

Le filtre $h(\mathcal{N})$ est, soit le filtre de Fréchet sur $h(N)$, soit un filtre non libre. Comme $\mathcal{M}+'\mathcal{N}^2$ est libre, l'inclusion ci-dessus fait que $h(\mathcal{N})$ est libre.

Le filtre $h(\mathcal{N})$ est un filtre sur $\Delta^- + \Delta^+$. Au moins un des deux ensembles Δ^- et Δ^+ appartient à $h(\mathcal{N})^*$. Si c'est Δ^-, alors

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}+'\mathcal{N}^2) \upharpoonright \Delta^- \subset h(\mathcal{N}) \upharpoonright \Delta^- < \mathcal{N},$$

si c'est Δ^+, alors

$$\mathcal{N}^2 = (\mathcal{M}+'\mathcal{N}^2) \upharpoonright \Delta^+ \subset h(\mathcal{N}) \upharpoonright \Delta^+ < \mathcal{N}.$$

L'alternative conduit à

$$\underline{2}' \leqslant \underline{1} \quad \text{ou} \quad \underline{2} \leqslant \underline{1},$$

qui contredit

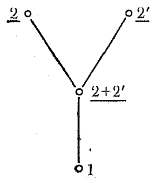
$$\underline{1} < \underline{2}' \quad \text{et} \quad \underline{1} < \underline{2}.$$

L'hypothèse $\mathcal{M}+\mathcal{N}^2 \subset h(\mathcal{N})$ est absurde.

2.6. Remarque. $\mathcal{N}^2$ est tel que quel que soit $A \in \mathcal{N}^{2*}$, $\mathcal{N}^2 \upharpoonright A$ est de même Type que $\mathcal{N}^2$. Par contre, $\mathcal{M}_2+'\mathcal{N}^2 \subset \mathcal{N}^2$ ne possède pas cette propriété, pas plus qu'aucun filtre de même Type que lui.

Notons $\underline{2+2'}$ le Type de $\mathcal{M}+\mathcal{N}^2$, en accord avec le corollaire 2.3.

2.7. Corollaire. *Le Type $\underline{2}+\underline{2}'$ est strictement compris entre $\underline{1}$ et $\underline{2}$ et $\underline{1}$ et $\underline{2}'$.*



En fait, nous allons voir que de nombreux Types différents sont compris entre $\underline{1}$ et $\underline{2}$. L'intérêt particulier de $\mathscr{M}+\mathscr{N}^2$, outre sa simplicité, provient du fait que ce filtre est borélien — c'est un $K_{\sigma\delta}$. Par suite, il ne dépend pas des qualités particulières du modèle de théorie des ensembles où l'on travaille.

Nous allons par contre, pour le reste de ce paragraphe, nous occuper d'ultrafiltres et même d'ultrafiltres δ-stables, et nous serons obligés, pour être sûrs que de tels ultrafiltres existent dans l'état des connaissances actuelles, de supposer vérifiés l'axiome du choix et une forme de l'hypothèse du continu soit, rangés par force décroissante, ou $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ [11], ou l'axiome de Martin [3], ou l'hypothèse de réduction des filtres [1]: "Tout filtre engendré par moins de $2^{\aleph_0}$ éléments est contenu dans un filtre engendré par au plus $\aleph_0$ éléments", ou l'hypothèse CS [12]: "l'ensemble des suites d'entiers ainsi ordonné: $(a_n)<(b_n)$ si $\{n\colon a_n<b_n\}\in\mathscr{N}$, contient un sous-ensemble totalement ordonné, cofinal, de cardinalité $2^{\aleph_0}$".

L'intérêt de $\mathscr{M}+\mathscr{N}^2$ provient aussi du fait suivant. Nous verrons en (15) qu'il existe de nombreux filtres de Types différents entre $\mathscr{N}$ et un ultrafiltre absolu. Par contre, il n'existe pas de filtre analytique de Type strictement compris entre 1 et le Type d'un ultrafiltre absolu, d'après un joli corollaire d'un théorème de Mathias [9] cité dans la thèse de Solomon [12].

Ainsi l'écart entre $\underline{1}$ et $\underline{2}$ reste visible si l'on se restreint à des Types de filtres analytiques, tandis que dans les mêmes conditions, l'écart entre $\underline{1}$ et le Type d'un ultrafiltre absolu s'évanouit.

2.8. Définition. Un filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble I est *isotrope* si pour tout $A\in\mathscr{F}^*$, $\mathscr{F}\restriction A$ et $\mathscr{F}$ ont même Type.

Autrement dit, $\mathscr{F}$ est isotrope si à tout $A\in\mathscr{F}^*$ correspond h tel que $\mathscr{F}\restriction A \subset h(\mathscr{F})$, car nous avons déjà $\mathscr{F}\subset i(\mathscr{F}\restriction A)$ si i désigne l'injection de A dans I.

2.9. Exemples. Les filtres $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}^2$ et $\mathscr{M}$ sont isotropes et $\mathscr{N}^2+\mathscr{M}$ ne l'est pas. Tout ultrafiltre est isotrope.

Remarque. La propriété d'être isotrope est une propriété du filtre et non pas une propriété du Type du filtre. En particulier, supposons que $\mathscr{F}\leqslant\mathscr{G}$ mais que $\mathscr{G}\nleqslant\mathscr{F}$. Le filtre $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ a même Type que $\mathscr{F}$ mais n'est pas isotrope.

2.10. Proposition. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ trois filtres respectivement sur les ensembles I, J et K. Supposons $\mathscr{H}$ isotrope. Dans ce cas, l'inégalité $\mathscr{F}+\mathscr{G}\leqslant\mathscr{H}$ ne peut avoir lieu que si $\mathscr{F}\leqslant\mathscr{H}$ ou $\mathscr{G}\leqslant\mathscr{H}$.*

Preuve. Supposons I et J disjoints, et $\mathscr{F}+\mathscr{G}\subset h(\mathscr{H})$. Soit I soit J appartient à $h(\mathscr{H})^*$, et dans ce cas,

$$\mathscr{F} = (\mathscr{F}+\mathscr{G})\restriction I\subset h(\mathscr{H}\restriction h^{-1}(I))\leqslant\mathscr{H}\,,$$

ou sinon

$$\mathscr{G} = (\mathscr{F}+\mathscr{G})\restriction J\subset h(\mathscr{H}\restriction h^{-1}(J))\leqslant\mathscr{H}\,.$$

2.11. Théorème. *Soit $\mathscr{F}$ un filtre. Posons $\Phi' = \{\mathscr{G}|$ Type de $\mathscr{F}\nleqslant$ Type de $\mathscr{G}\}$ et $\Phi'' = \{\mathscr{G}|$ $\mathscr{G}$ est isotrope$\}$. L'opération ϱ, définie sur $\Phi'\cap\Phi''$ par $\varrho(\mathscr{G}) = \mathscr{F}+\mathscr{G}$, est strictement croissante, pour le préordre de Katětov, c'est-à-dire vérifie*

$$\varrho(\mathscr{G})<\varrho(\mathscr{G}') \Leftrightarrow \mathscr{G}<\mathscr{G}'.$$

Preuve. Supposons $\mathscr{G}\leqslant\mathscr{G}'$, il est facile de voir qu'alors $\mathscr{F}+\mathscr{G}\leqslant\mathscr{F}+\mathscr{G}'$. Réciproquement, supposons $\mathscr{F}+\mathscr{G}\leqslant\mathscr{F}+\mathscr{G}'$. Ceci entraîne $\mathscr{F}+\mathscr{G}\leqslant\mathscr{G}'$, et par suite, $\mathscr{G}\leqslant\mathscr{G}'$ (10), puisque $\mathscr{G}'$ est isotrope et $\mathscr{F}\nleqslant\mathscr{G}'$.

2.12. Corollaire. *Donnons-nous un Type λ et posons $\Phi_{\underline{\lambda}} = \{$Type $\underline{\tau}|$ $\underline{\lambda}\nleqslant\underline{\tau}$ et $\underline{\tau}$ est le Type d'un filtre isotrope$\}$. Si $\underline{\tau}$ et $\underline{\tau}'\in\Phi_{\underline{\lambda}}$, alors*

$$\underline{\lambda+\tau}\leqslant\underline{\lambda+\tau'} \text{ si et seulement si } \underline{\tau}\leqslant\underline{\tau}'.$$

Le Théorème 11 et son corollaire sembleraient un peu piteux, si nous ne savions rien sur $\Phi_{\underline{\lambda}}$ pour $\underline{\lambda}$ donné. Mais rappelons (§ 1, (1.18)) qu'un filtre $\mathscr{F}$ est *stable* si et seulement si $\mathscr{N}^2\nleqslant\mathscr{F}$.

Ainsi, $\Phi_{\underline{2}}$ contient l'ensemble des Types d'ultrafiltres δ-stables sur N.

D'après (§ 1 (1.19), (1.20)), nous allons pouvoir utiliser les résultats concernant l'ordre de Rudin Keisler sur les ultrafiltres δ-stables sur N — nous renvoyons le lecteur à [2] s'il veut se faire une idée de la variété des classes d'isomorphisme d'ultrafiltres δ-stables — pour étudier par exemple l'ensemble des Types compris strictement entre $\underline{1}$ et $\underline{2}$.

2.13. Remarque. Nous avons vu en § 1 (1.21) qu'un ultrafiltre libre n'est jamais analytique. Notons aussi, que les filtres de la forme $\mathscr{F}+\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est un ultrafiltre sur N et $\mathscr{F}$ est un filtre sur N^2 (par exemple), ne sont jamais analytiques, car sinon $\mathscr{D}$, isomorphe à $\mathscr{F}+\mathscr{D}\restriction N$, devrait être analytique. Par contre, le Type de $\mathscr{F}+\mathscr{D}$ peut être celui d'un filtre analytique. C'est le cas si $\mathscr{F}\leqslant\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$ est analytique. Nous allons montrer que c'est quasiment le seul cas. En effet, si $\mathscr{F}$ est un filtre sur N^2, $\mathscr{D}$ un ultrafiltre sur N, et si $\mathscr{G}$ est analytique, la relation "$\mathscr{F}+\mathscr{D}\subset h(\mathscr{G})$" entraîne "$h^{-1}(N)\notin\mathscr{G}^*$" et par suite "$h^{-1}(N^2)\in\mathscr{G}$", c'est à dire "$\mathscr{F}\leqslant\mathscr{G}$". Mais d'autre part, si $\mathscr{G}\leqslant(\mathscr{F}+\mathscr{D})$, alors $\mathscr{G}\leqslant\mathscr{F}$. Les deux filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même Type. Ainsi, $\mathscr{F}+\mathscr{D}$ a le Type d'un filtre analytique si et seulement si $\mathscr{F}<\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$ a le Type d'un filtre analytique.

2.14. Corollaires i) RK_δ, *l'ensemble des classes d'isomorphismes d'ultrafiltres δ-stables sur N, ordonné selon $\overset{\mathrm{RK}}{\leqslant}$, se plonge en tant qu'ensemble muni d'un ordre dans $]\underline{1}, \underline{2}[$ l'ensemble des Types ordonnés selon $\leqslant$, plus grands que $\underline{1}$ et plus petits que $\underline{2}$.*

ii) RK_α, *l'ensemble des classes d'isomorphisme d'ultrafiltres absolus sur* N, *ordonné selon* $\overset{RK}{\leqslant}$, *se plonge en tant qu'ensemble ordonné dans* $]\underline{1}, \underline{2+2'}[$.

(iii) $(RK_\delta - RK_\alpha)$ *se plonge dans* $]\underline{2+2'}, \underline{2}[$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le corollaire 2.12 à respectivement

i) $\underline{2}$ et l'ensemble des Types d'ultrafiltres δ-stables,

ii) $\underline{2+2'}$ et l'ensemble des Types d'ultrafiltres absolus.

(Un ultrafiltre absolu $\mathscr{A}$ ne peut vérifier $\mathscr{N}^2+\mathscr{M}<\mathscr{A}$, car sinon, d'après la proposition 2.10, ou $\mathscr{N}^2<\mathscr{A}$, ou $\mathscr{M}<\mathscr{A}$; ce qui contredit "$\mathscr{A}$ absolu". Nous obtenons ainsi, en supposant $2^{\chi_0}=\chi_1$, 2^{χ_1} éléments distincts non comparables dans $]\underline{1}, \underline{2+2'}[$.)

iii) $\underline{2}$ et l'ensemble des Types d'ultrafiltres δ-stables non absolus, auquel on aura ajouté $\mathscr{M}$.

Les intervalles sont ouverts, d'après la remarque 2.13.

Tout pareillement, un filtre $\mathscr{F}$ est vif, si et seulement si $\mathscr{M}\nleqslant\mathscr{F}$. Ainsi, $\Phi_{\underline{2'}}$ (voir (2.12)) contient l'ensemble des Types des ultrafiltres vifs sur N. Un procédé analogue à celui du (§ 3 (11)) donne (i) "Etant donné un ultrafiltre vif, il existe une chaîne C d'ultrafiltres vifs telle que $\{\underline{\lambda}|\ \text{Type}\,\mathscr{A}\leqslant\underline{\lambda},\ \underline{\lambda}$ est le Type d'un ultrafiltre $\in C\}$, ordonné par l'ordre inverse de $<$, est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné au plus petit ordinal non dénombrable". Notons Ω^- l'ordre selon $<$ de cet ensemble de Types. Nous demandons d'admettre que (ii) "Un ultrafiltre vif ne peut avoir pour image deux ultrafiltres absolus non isomorphes" (cf. [1]).

2.15. Corollaires i) RK_ν, *l'ensemble des classes d'isomorphismes d'ultrafiltres vifs sur* N *ordonnés selon* $\overset{RK}{\leqslant}$, *se plonge en tant qu'ensemble muni d'un ordre, dans* $]\underline{1}, \underline{2'}[$.

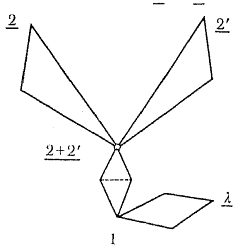
ii) $(RK_\nu \dot{-} RK_\alpha)$ *se plonge dans* $]\underline{2+2'}, \underline{2'}[$.

Soit $\underline{\lambda}$ *le Type d'un ultrafiltre absolu.*

iii) $(RK_\alpha \dot{-} \underline{\lambda})$ *se plonge dans* $]\underline{1}, \underline{\lambda}[$ *et nous obtenons ainsi* $2^{\aleph_1}$ *éléments distincts non comparables dans* $]\underline{1}, \underline{\lambda}[$.

iv) $\{\underline{\tau}|\ \underline{\tau}\in RK_\nu$ *et* $\underline{\lambda}\nleqslant\underline{\tau}\}$ *ordonné selon* $<$, *se plonge dans* $]\underline{1}, \underline{\lambda}[$ *et nous obtenons ainsi une chaîne d'ordre* Ω^- *dans* $]\underline{1}, \underline{\lambda}[$.

Il y a beaucoup de Types de filtres entre $\underline{1}$ et $\underline{2}$ et entre $\underline{1}$ et $\underline{2'}$.



2.16. Définition. Soient I et J deux ensembles et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux filtres sur I et J respectivement. Nous noterons $\mathscr{F}\times\mathscr{G}$ le filtre sur $I\times J$ engendré par $\{A\times B|\ A\in\mathscr{F}$ et $B\in\mathscr{G}\}$.

2.17. Proposition. *Le filtre* $\mathscr{F}\times\mathscr{G}$ *est minimal parmi les filtres plus grands que* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$.

Preuve. Soient π_1 et π_2 les projections de $I\times J$ sur I et J. $\pi_1(\mathscr{F}\times\mathscr{G})=\mathscr{F}$ et $\pi_2(\mathscr{F}\times\mathscr{G})=\mathscr{G}$. Ainsi, $\mathscr{F}\times\mathscr{G}$ est plus grand que chacun des filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Soit $\mathscr{H}$ un filtre sur K, majorant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Supposons que $\mathscr{F}\subset f(\mathscr{H})$ et que $\mathscr{G}\subset g(\mathscr{H})$. Dans ce cas,

$$\mathscr{F}\times\mathscr{G}\subset(f\times g)(\mathscr{H}),$$

en notant $f\times g$ l'application de K dans $I\times J$ définie par $(f\times g)(x)=(f(x), g(x))$.

2.18. Corollaire. *Le Type de* $\mathscr{F}\times\mathscr{G}$ *ne dépend que du Type de* $\mathscr{F}$ *et du Type de* $\mathscr{G}$. *Nous noterons ce Type* $\underline{\tau}\times\underline{\lambda}$ *si* $\underline{\tau}$ *est le Type de* $\mathscr{F}$ *et* $\underline{\lambda}$ *est celui de* $\mathscr{G}$.

2.19. Théorème. *L'ensemble des Types de filtres sur* N, *muni des deux opérations* $+$ $+$(inf) *et* $\times$(sup) *est un treillis distributif.*

Preuve. Nous allons juste démontrer que ce treillis est modulaire, car nous n'utiliserons que ce résultat ici. La formule à démontrer est

$$\underline{\tau}\times(\underline{\lambda}+\underline{\mu})=(\underline{\tau}\times\underline{\lambda})+\underline{\mu}\quad\text{ dès que }\underline{\tau}\leqslant\underline{\mu}.$$

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ trois filtres respectivement sur les ensembles I, J et K; supposons que les ensembles I, J, K soient disjoints et que de plus, $K\cap(I\times J)=\emptyset$. Supposons que $\mathscr{F}\subset g(\mathscr{H})$.

Définissons φ: $I\times(J\cup K)\to(I\times J)\cup K$ par $\varphi(i,x)=(i,x)$ si $x\in J$ et $\varphi(i,x)=x$ si $x\in K$. Prenons $F\in\mathscr{F}$, $G\in\mathscr{G}$ et $H\in\mathscr{H}$ quelconques. $\varphi^{-1}[(F\times G)\cup H]\supset F\times(G\cup H)$ et ainsi, $\varphi^{-1}[(F\times G)\cup H]\in\mathscr{F}\times(\mathscr{G}+\mathscr{H})$.

Définissons ψ: $I\times(J\cup K)\leftarrow(I\times J)\cup K$ par $\psi(y)=(i,j)$ si $y\in I\times J$ et $y=(i,j)$, $\psi(y)=(g(y),y)$ si $y\in K$. Prenons $F\in\mathscr{F}$, $G\in\mathscr{G}$ et $H\in\mathscr{H}$, quelconques.

$$\psi^{-1}[F\times(G\cup H)]\supset(F\times G)\cup(g^{-1}(F)\cap H),$$

si bien que

$$\psi^{-1}[F\times(G\cup H)]\in(\mathscr{F}\times\mathscr{G})+\mathscr{H}.$$

§ 3. Etude des filtres $\mathscr{N}^\alpha$

3.1. Definition. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur un ensemble I et $(\mathscr{F}_i)$ une famille de filtres sur J indexée par I. Nous définissons le filtre $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i$ sur J par

$$X\in\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i\quad\text{ si et seulement si }\quad\{i|\ X\in\mathscr{F}_i\}\in\mathscr{F}.$$

3.2. Remarque. Si l'espace des filtres sur J est muni de la topologie, *non séparée* définie par la base de fermés engendrée par la famille de fermés élémentaires $(\mathscr{C}_X=\{\mathscr{F}|\ X\in\mathscr{F}\})_{X\in\mathscr{P}(J)}$, le point $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i$ est *générique* parmi les points adhérents à la suite des $\mathscr{F}_i$ selon $\mathscr{F}$: l'ensemble de ces points constitue l'adhérence du point $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i$.

Restreignons nous aux ultrafiltres. Ce sous espace de l'espace ci-dessus est séparé (c'est βN) et l'opération $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\, y$ est une limite habituelle. Nous la noterons dans ce cas $\mathscr{F}-\mathrm{Lim}$.

3.3. FORMULE. Si f est une application définie sur J,

$$f(\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i) = \mathscr{F}^*-\mathrm{Lim} f(\mathscr{F}_i)\,.$$

En effet, $f^{-1}(X) \in \mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_i$ si et seulement si $\{i|\ f^{-1}(X) \in \mathscr{F}_i\} \in \mathscr{F}$.

3.4. Signalons un important cas particulier de l'opération $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}$. Il est étudié en [4], [6], [7], [8], [9] pour les filtres, en [1], [3], [4], [5], [11], pour les ultrafiltres. Donnons-nous une famille indexée par I de filtres $\mathscr{G}_i$, chacun sur J_i. Le filtre $\mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i$ est le filtre sur $J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J_i$ défini par $X \in \mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i$ si $\{i|\ \exists G \in \mathscr{G}_i$: $\{i\}\times G \subset X\} \in \mathscr{F}$. C'est, avec la notation précédemment introduite, le filtre $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\{i\}\times\mathscr{G}_i$ en notant $\{i\}\times\mathscr{G}_i$ le filtre sur J image de $\mathscr{G}_i$ par l'application: $n\to(i, n)$. L'application $\{i\}\times$ est l'injection de J_i dans la somme disjointe particulière des J_i, qu'est l'ensemble J.

Notons que si J' est une autre somme disjointe des J_i et si in_i désigne l'injection de J_i dans cette somme J', il existe entre $\mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i$ et $\mathscr{F}^*\mathrm{Lim}\, in_i(\mathscr{G}_i)$ un isomorphisme canonique que nous appellerons *l'isomorphisme correcteur*.

Signalons enfin que la pratique formule 3.3 transcrite ainsi: $f(\mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i) = \mathscr{F}\sum f_i(\mathscr{G}_i)$ en notant f_i la restriction de f à $\{i\}\times J_i$ est fausse. Nous verrons en 3.6, 3.8 comment pallier cet inconvénient.

3.5. PROPOSITION. *Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur I. Soit $(\mathscr{F}_i)$ (resp. $(\mathscr{G}_i)$) une suite de filtres $\mathscr{F}_i$ chacun sur l'ensemble I_i (resp. $\mathscr{G}_i$ sur J_i). Supposons que $\{i|\ \mathscr{F}_i \leqslant \mathscr{G}_i\} \in \mathscr{F}$. Alors*

$$\mathscr{F}\sum\mathscr{F}_i \leqslant \mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i\,.$$

Preuve. Les ensembles $\{i\}\times J_i$ sont disjoints, les applications n'ont qu'à être juxtaposées: supposons $\mathscr{F}_i \subset h_i(\mathscr{G}_i)$ pour $i \in F \in \mathscr{F}$; posons $h(i, x) = (i, h_i(x))$ pour $i \in F$. Ainsi, $\mathscr{F}\sum\mathscr{F}_i \subset h(\mathscr{F}\sum\mathscr{G}_i)$.

3.6. DÉFINITION. Soit $(\mathscr{F}_n)$ une suite de filtres. Nous dirons que cette suite est *des-plus-discrètes* si pour toute suite (h_n) d'applications telle que chacun des filtres $h_n(\mathscr{F}_n)$ soit libre, il existe, pour chaque n, $A_n \in \mathscr{F}_n^*$ vérifiant $h_m(A_m) \cap h_n(A_n)$ est vide dès que $m \neq n$.

3.7. EXEMPLE. Une suite $(\mathscr{A}_n)$ d'ultrafiltres sur N est des-plus-discrètes si quelle que soit la suite d'applications (h_n), pourvu cependant que chacun des $h_n(\mathscr{A}_n)$ soit libre, la suite des ultrafiltres $h_n(\mathscr{A}_n)$ est une suite discrète de points de βN. Une suite composée d'ultrafiltres δ-stables n'ayant deux à deux aucune image libre en commun est des-plus-discrètes.

3.8. Remarque. Si $(\mathscr{D}_n)$ est une suite des-plus-discrètes d'ultrafiltres et si $\mathscr{D}$ est aussi un ultrafiltre, la formule

$$f(\mathscr{D}\sum\mathscr{D}_n) = \mathscr{D}\sum f_n(\mathscr{D}_n)$$

est juste à un isomorphisme près. En effet, dans ce cas, quelle que soit (h_n) pourvu cependant que $\{n|\ h_n(\mathscr{D}_n)$ est libre$\} \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}\mathrm{Lim}\, h_n(\mathscr{D}_n)$ et $\mathscr{D}\sum h_n(\mathscr{D}_n)$ sont les mêmes à un isomorphisme correcteur près. La formule 3.8 est une transcription de 3.3.

Donnons nous un filtre $\mathscr{F}^*$-$\mathrm{Lim} f_n(\mathscr{F}_n)$ sur I. Il n'est pas dit que ce filtre soit image du filtre $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}\,\mathscr{F}_n$, autrement dit que les applications f_n se recollent en une application.

Supposons le recollement possible, il n'est pas dit que si chacun des f_n est de germe injectif en $\mathscr{F}_n$, l'application f est de germe injectif en $\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}(\mathscr{F}_n)$. Ces deux résultats sont par contre vrais, modulo une restriction de I à un ensemble $J \in [\mathscr{F}^*-\mathrm{Lim}(\mathscr{F}_n)]^*$, quand la suite des $(\mathscr{F}_n)$ est des-plus-discrètes.

Nous allons maintenant démontrer que tout filtre $\mathscr{N}^\alpha$ est vif. La preuve en est détournée, mais le moyen est, je crois, le plus rapide.

3.9. LEMME. *Soit $\mathscr{W}$ un ultrafiltre vif, et $(\mathscr{U}_n)$ une suite des-plus-discrètes d'ultrafiltres vifs. Alors $\mathscr{V} = \mathscr{W}-\mathrm{Lim}\,\mathscr{U}_n$ est un ultrafiltre vif.*

Preuve. Donnons nous deux applications g et f;

$$g\circ f(\mathscr{V}) = \mathscr{W}\text{-}\mathrm{Lim}\, g\circ f(\mathscr{U}_n)\,.$$

Si g est finijective, g est de germe injectif en chacun des ultrafiltres $f(\mathscr{U}_n)$ puisque $\mathscr{U}_n$ est vif, et ces injections se recollent en une injection, car la suite $(\mathscr{U}_n)$ est des-plus-discrètes. $\mathscr{V}$ est vif.

3.10. LEMME. *Soit $(\mathscr{D}_n)$ une suite dénombrable d'ultrafiltres sur N. Supposons que pour chaque n, $\mathscr{D}_n$ ainsi que chacune de ses images appartiennent à l'adhérence d'une famille dénombrable d'images d'éléments de C_n. Supposons de plus que les ensembles C_n soient disjoints et que $C = \bigcup_n C_n$ soit une famille des-plus-discrètes d'ultrafiltres. Dans ce cas, la suite $(\mathscr{D}_n)$ est une suite des-plus-discrètes.*

Preuve. Si $h(\mathscr{D}_n) \in \overline{h_m({}^m\mathscr{U}_n)}$ avec pour chaque m ${}^m\mathscr{U}_n \in C_n$, c'est que pour un ultrafiltre $\mathscr{V}_n$ pouvant être principal,

$$h(\mathscr{D}_n) = \mathscr{V}_n\mathrm{Lim}\, h_m({}^m\mathscr{U}_n)\,.$$

Mais la famille $({}^m\mathscr{U}_n)_{m,n}$ est des-plus-discrètes; aussi, il existe une suite de parties de N: $({}^mA_n)_{m,n}$ disjointes telles que ${}^mA_n \in {}^m\mathscr{U}_n$. Par suite, les ensembles $B_n = \bigcup_m {}^mA_n$ sont des parties disjointes de N et pour chaque n, $B_n \in h(\mathscr{D}_n)$. La suite $(\mathscr{D}_n)$ est des-plus-discrètes.

3.11. THÉORÈME. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, pour tout ordinal α dénombrable, il existe un ultrafiltre $\mathscr{D}_\alpha$, vif, tel que $\mathscr{N}^\alpha < \mathscr{D}_\alpha$.*

Preuve. Par récurrence; $\mathscr{D}_1$ sera un ultrafiltre absolu, $\mathscr{D}_2$ sera une limite selon un ultrafiltre absolu d'ultrafiltres absolus non isomorphes deux à deux, etc....

Plus précisément, soit A_1 une suite dénombrable d'ultrafiltres absolus non isomorphes deux à deux.

Supposons qu'il existe, pour un ordinal $\alpha > 1$ dénombrable

(1) une partition $\mathcal{P}_\alpha$ en cellules (C_n) de Λ_1, partition moins fine que les partitions $\mathcal{P}_\gamma$ pour $\gamma<\alpha$,

(2) une suite d'ultrafiltres $(\mathcal{D}_i)$ des-plus-discrètes telle que, pour chaque i,

(3) $\mathcal{D}_i \in \overline{C_i}$, $\mathcal{D}_i$ est vif, $\mathcal{N}^\alpha < \mathcal{D}_i$.

Soit Λ_α cette suite d'ultrafiltres $(\mathcal{D}_i)$.

Construisons $\Lambda_\alpha+1$.

Numérotons Λ_α par N^2. Soit $(\mathcal{E}_m^n)$ cette numérotation. Posons $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m^0\text{-Lim}\,\mathcal{E}_m^{k+1}$. Soit (D_m^n) la numérotation correspondante des cellules de Λ_1. Posons $D_m = \bigcup_{n>0} D_m^n$. Tous les ensembles D_m sont disjoints. Ainsi, $\mathcal{E}_m \in \overline{D_m}$, $\mathcal{E}_m$ est vif d'après le lemme (3.9) et la suite $(\mathcal{E}_m)$ est des-plus-discrètes d'après le lemme 3.10. De plus, pour tout m, $\mathcal{N}^{\alpha+1} < \mathcal{D}_m$. $\Lambda_{\alpha+1}$ est la suite des $\mathcal{E}_m$.

Supposons qu'il existe des suites Λ_α vérifiant les conditions requises pour tout $\alpha<\beta$, où β est un ordinal dénombrable limite.

Construisons Λ_β.

Numérotons par N les éléments de β. Soit (α_k) cette numérotation. Prenons dans Λ_{α_1} un ultrafiltre $\mathcal{D}_1^1$. Notons C_1^1 la cellule de la partition $\mathcal{P}_{\alpha_1}$ telle que $\mathcal{D}_1^1 \in \overline{C_1^1}$. Prenons dans Λ_{α_2}, si $\alpha_1<\alpha_2$ en tant qu'ordinaux, deux ultrafiltres $\mathcal{D}_2^1$ et $\mathcal{D}_2^2$ tels que C_2^1 et C_2^2 — les cellules de la partition $\mathcal{P}_{\alpha_2}$ pour lesquelles $\mathcal{D}_2^1 \in \overline{C_1^1}$ et $\mathcal{D}_2^2 \in \overline{C_2^2}$ — soient disjoints de C_1^1, et rien si $\alpha_2<\alpha_1$, etc.... Cette opération pourra se répéter une infinité de fois, car il y a un nombre infini de cellules dans chaque partition $\mathcal{P}_{\alpha_k}$ et qu'à chaque étape un nombre fini seulement de cellules de $\mathcal{P}_{\alpha_k}$ est interdit, puisque les partitions $\mathcal{P}_\alpha$ sont de plus en plus grossières.

Posons $D_n = \bigcup_k C_{n+k}^k$ et $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^1\text{-Lim}\,\mathcal{D}_{n+k}^k$. Ainsi, $\mathcal{D}_n \in \overline{D_n}$, $\mathcal{D}_n$ est vif d'après le lemme 3.9, et la suite $(\mathcal{D}_n)$ est des-plus-discrètes, d'après le lemme 3.10, parce que

$$m \neq n \to \bigcup_k C_{m+k}^k \cap \bigcup_l C_{n+l}^l = \emptyset ,$$

tous les C_i^j étant disjoints. De plus, pour tout m, il existe $A_m \in (\mathcal{N}^\beta)^*$ tel que $\mathcal{N}^\beta \leqslant \mathcal{N}^\beta \restriction A_m \leqslant \mathcal{D}_m$.

Λ_β est la suite des $\mathcal{D}_n$.

3.12. COROLLAIRE. *Pour tout ordinal α dénombrable, $\mathcal{N}^\alpha$ est vif.*

Preuve. Tout $\mathcal{D}_\alpha$ est vif et tout filtre plus petit qu'un filtre vif est vif.

Remarque. Notre démonstration du théorème 3.11 suppose que l'hypothèse du continu (CH) ainsi que l'axiome du choix (AC) sont vérifiés. Il semblerait que ceci doive se reporter sur le corollaire 3.12. Il n'en est rien car le corollaire 3.12 a une forme syntaxique simple: Π_3^1. Nous pouvons employer le résultat de Plateck [10]: toute formule Π_4^1 démontrable dans ZF+AC+GCH est déjà démontrable dans ZF. Le corollaire 3.12 est par suite indépendant de AC et CH.

3.13. PROPOSITION. *Toute suite de filtres analytiques est des-plus-discrètes.*

Preuve. Toute image d'un filtre analytique est analytique. (En effet, si $\mathcal{G}$ est un filtre analytique sur N et f est une application définie sur N, $X \in f(\mathcal{G})$ si et seulement si $f^{-1}(X) \in \mathcal{G}$. L'application f^{-1}: $\mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(N)$ est continue; son graphe Γ est fermé et le filtre $f(\mathcal{G})$ est analytique en tant qu'image par la projection π, continue de $\Gamma \cap (\mathcal{P}(N)\times\mathcal{G})$, sous-ensemble analytique de $\mathcal{P}(N)\times\mathcal{P}(N)$.) Il suffit donc de montrer que toute suite de filtres libres analytiques est discrètisable.

Si $(\mathcal{F}_n)$ (1) est une suite dénombrable de filtres sur N libres et analytiques, le sous-ensemble $\bigcap_n \mathcal{F}_n^{**}$ de $\mathcal{P}(N)$ n'est pas vide. (En effet, posons $\mathcal{F}_n^c = \{A \mathbin{\Delta} N \mid A \in \mathcal{F}_n\}$. Les filtres $\mathcal{F}_n$ étant analytiques, ils sont mesurables et leur mesure est 0; il en est de même de leur translaté $\mathcal{F}_n^c$ si l'on a pris pour mesure la mesure de Haar sur le groupe compact $(\mathcal{P}(N), \Delta)$. Comme $\mathcal{P}(N) = \bigcap_n \mathcal{F}_n^{**} \cup \bigcup_n (\mathcal{F}_n \cup \mathcal{F}_n^c)$, $\bigcap_n \mathcal{F}_n^{**}$ n'est pas de mesure de Haar nulle.) Si $\mathcal{F}$ est analytique et $A \in \mathcal{F}^*$, le filtre $\mathcal{F} \restriction A$ est analytique. (L'opération d'intersection est continue.)

Soit $(\mathcal{F}_n)$ une suite de filtres analytiques. Prenons $B_1 \in \bigcap_n \mathcal{F}_n^{**}$; posons $\mathcal{F}_n^1 = \mathcal{F}_n \restriction N - B_1$; prenons $B_2 \in \bigcap_{n>1} (\mathcal{F}_n^1)^{**}$; appelons $\mathcal{F}_n^2$ le filtre engendré par $\mathcal{F}_n^1$ et $N \dot- (B_1 \cup B_2)$, etc. Les ensembles B_n ainsi définis sont disjoints et pour chaque n, $B_n \in \mathcal{F}_n^*$.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble D dénombrable. Nous allons définir par récurrence une suite de filtres $\mathcal{F}_\alpha$ pour tout α dénombrable par

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}, \qquad D_1 = D,$$

$$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{N} - \sum \mathcal{F}_\alpha, \qquad D_{\alpha+1} = \bigcup_n \{n\}\times D_\alpha,$$

$$\mathcal{F}_\beta = \mathcal{O}_\beta - \sum \mathcal{F}_\alpha, \qquad D_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} \{\alpha\}\times D_\alpha,$$

où $\mathcal{O}_\beta$ est le filtre sur β engendré par $(\{\alpha \mid \delta<\alpha<\beta\})_{\delta<\beta}$. Ainsi, la suite $(\mathcal{N}^\alpha)$ (voir 0.11) est la suite obtenue en prenant $\mathcal{F} = \mathcal{N}$. Prenons par définition la suite $(\mathcal{M}_\alpha)$ comme la suite obtenue à partir de $\mathcal{F}_2 = \mathcal{M}$ (voir 1.5) selon le schéma ci-dessus, et posons pour tout $\alpha \geqslant 2$, $\alpha' = \text{Type}(\mathcal{M}_\alpha)$.

3.14. THÉORÈME. *Pour tout ordinal dénombrable α, les filtres $\mathcal{N}^\alpha$ et $\mathcal{M}_\alpha$ sont isotropes; d'une façon générale, si $\mathcal{F}_1$ est isotrope, chacun des $\mathcal{F}_\alpha$ construits plus haut est isotrope.*

Preuve. Le cas général est identique au cas particulier des $\mathcal{N}^\alpha$, ici traité.

(2) Supposons que $\mathcal{N}^\alpha$ est isotrope et montrons que $\mathcal{N}^{\alpha+1}$ est isotrope. Supposons $A \in [\mathcal{N}^{\alpha+1}]^*$. Posons $B = \{n \mid A \in \mathcal{N}_n^*\}$, et pour tout $n \in B$ prenons $C_n \in (\mathcal{N}^\alpha)^*$ tel que $\{n\}\times C_n \subset A$. Assurément, $B \in \mathcal{N}^*$, $C = \bigcup_{n\in B} C_n \in [\mathcal{N}^{\alpha+1}]^*$ et $C \subset A$. Ainsi,

$$\mathcal{N}^{\alpha+1} \restriction C = \mathcal{N} \restriction B - \sum (\mathcal{N}^\alpha \restriction C_n) .$$

---

(1) Soit $\mathcal{F}$ un filtre; posons $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}^* \dot- \mathcal{F}$.

(2) Posons $\mathcal{N}_n = \{n\}\times\mathcal{N}^\alpha$.

Par hypothèse de récurrence, pour chaque $n\in B$, il existe h_n telle que $\mathcal{N}^{\alpha}\upharpoonright C_n\subset h_n(\mathcal{N}^{\alpha})$. Définissons h sur $\bigcup_{n\in B}\{n\}\times D_\alpha$ par $h(n,x)=(n,h_n(x))$. Ainsi

$$\mathcal{N}^{\alpha+1}\upharpoonright C=h[\mathcal{N}\upharpoonright B\textstyle\sum\mathcal{N}^{\alpha}]\,.$$

Mais $\mathcal{N}\upharpoonright B\sum\mathcal{N}^{\alpha}$ est isomorphe à $\mathcal{N}^{\alpha+1}$ selon une bijection θ, si bien que $\mathcal{N}^{\alpha+1}\upharpoonright A\subset i\circ h\circ\theta(\mathcal{N}^{\alpha+1})$ en notant i l'injection de C dans A. $\mathcal{N}^{\alpha+1}$ est isotrope.

Supposons $\mathcal{N}^{\alpha}$ isotrope pour tout $\alpha<\beta$ et montrons que $\mathcal{N}^{\beta}$ l'est.

Soit $A\in[\mathcal{N}^{\beta}]^*$. Nous obtenons, de la même façon qu'avant,

$$C\subset A\quad\text{ et }\quad\mathcal{N}^{\beta}\upharpoonright C\subset h[\mathcal{O}_\beta\upharpoonright B\textstyle\sum\mathcal{N}^{\alpha}]$$

avec $B\in\mathcal{O}_\beta^*$.

Utilisons le fait que B est dénombrable, ainsi que β. Soit $(\delta_n)_{n\in N}$, une numérotation par N de l'ensemble B.

Soit $f_{k,\alpha}$ une application telle que

$$\mathcal{N}^{\delta_k}\subset f_{k,\alpha}(\mathcal{N}^{\alpha})\quad\text{ si }\quad\delta_k\leqslant\alpha\,.$$

Définissons $f\colon\bigcup_{\alpha\in\beta}\{\alpha\}\times D_\alpha\to\bigcup_{\alpha\in\beta}\{\alpha\}\times D_\alpha$ par $f(\alpha,x)=(\delta_k,f_{k,\alpha}(x))$ si δ_k est l'élément de B de plus *grand* indice possible tel que $\sup_{i\leqslant k}\delta_i\leqslant\alpha$. Nous obtenons

$$\mathcal{O}_\beta\upharpoonright B\textstyle\sum\mathcal{N}^{\alpha}\subset f[\mathcal{O}_\beta\sum\mathcal{N}^{\alpha}]\,,$$

si bien que, tout comme avant,

$$\mathcal{N}^{\beta}\upharpoonright A\subset i\circ f(\mathcal{N}^{\beta})$$

en notant i l'injection de C dans A.

3.15. PROPOSITION. *(C'est la réciproque, dans un cas particulier de la proposition 3.5.) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I, soit $(\mathcal{G}_i)$ une suite des-plus-discrètes de filtres isotropes et soit $(\mathcal{F}_i)$ une suite de filtres telle que $\mathcal{F}\sum\mathcal{F}_i\leqslant\mathcal{F}\sum\mathcal{G}_i$. Dans ce cas,*

$$\{i|\ \mathcal{F}_i\leqslant\mathcal{G}_i\}\in\mathcal{F}^*.$$

Preuve. Supposons que $\mathcal{F}\sum\mathcal{F}_i\subset h(\mathcal{F}\sum\mathcal{G}_i)$ et que chaque $\mathcal{G}_i$ soit un filtre sur J_i. La suite $(\mathcal{G}_i)$ est des-plus-discrètes. Ainsi, pour une suite $(A_i\in\mathcal{G}_i^*)$ avec $i\in B\in\mathcal{F}^*$, nous avons,

$$\mathcal{F}\textstyle\sum\mathcal{F}_i\subset in\circ h[(\mathcal{F}\sum\mathcal{G}_i)\upharpoonright A]\subset\mathcal{F}\upharpoonright B\sum f_i(\mathcal{G}_i\upharpoonright A_i)\,,$$

en notant in l'injection de $h(A)$ pour $A=\bigcup_{i\in B}\{i\}\times A_i$ dans $\bigcup_{i\in I}\{i\}\times J_i$, θ l'isomorphisme correcteur (voir 3.4), f_i la restriction de $\theta\circ in\circ h$ à $\{i\}\times A_i$ et $B=\{i|\ A_i\in\mathcal{G}_i^*\}$. Ainsi,

$$\{i|\ \mathcal{F}_i\subset f_i(\mathcal{G}_i\upharpoonright A_i)\}=B\in\mathcal{F}^*.$$

Les filtres $\mathcal{G}_i$ sont isotropes. Nous en déduisons

$$\{i|\ \mathcal{F}_i\leqslant\mathcal{G}_i\}\in\mathcal{F}^*.$$

3.16. COROLLAIRE. *Pour tout ordinal α dénombrable, (i) $\underline{\alpha}\neq\underline{\alpha+1}$, (ii) $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}'$ ne sont pas comparables, dès que $\alpha\geqslant2$.*

Preuve. Raisonner par récurrence en employant (3.13, 3.14 et 3.15).

Remarquons que (3.16, (i)) peut se déduire (voir § 0) de ce que "Type $\mathcal{F}$ = Type $\mathcal{G}$)$\Rightarrow$(Cl$\mathcal{F}$ = Cl$\mathcal{G}$)", du théorème "Cl$(\mathcal{N}^{\alpha})$ consiste en les fonctions de Baire de classe α", et du théorème d'existence de fonctions de Baire de classe $\alpha+1$ non de classe α, pour tout ordinal α dénombrable.

3.17. THÉORÈME. *Pour tout ordinal dénombrable $\alpha\geqslant1$,*

$$\underline{\alpha}<(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'<(\underline{\alpha+1})\,.$$

Ainsi, il existe un Type (de filtre borélien) strictement compris entre $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha+1}$.

Preuve. Par construction, $\underline{\alpha}\leqslant(\underline{\alpha+1})'$. Par suite,

$$\underline{\alpha}\leqslant(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'\leqslant(\underline{\alpha+1})\,.$$

Nous sommes assurés d'une part de l'inégalité $\underline{\alpha}\neq(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'$, car sinon, d'après la proposition 2.10, il faudrait ou que $\underline{\alpha}\geqslant\underline{\alpha+1}$ ou sinon que $\alpha\geqslant(\underline{\alpha+1})'$ et par suite $\alpha\geqslant\alpha'$, ce qui est impossible d'après (16).

D'autre part, toujours selon (16),

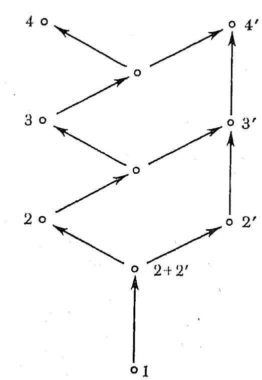
$$(\underline{\alpha+1})'\ngeqslant\underline{\alpha+1}\,,$$

si bien que

$$(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'\neq(\underline{\alpha+1})\,.$$

Ainsi,

$$\underline{\alpha}<\underline{\alpha+1}+(\underline{\alpha+1})'<\underline{\alpha+1}\,.$$



Une autre méthode consiste à employer le fait que le treillis des Types est modulaire (2.19). Posons $\underline{\lambda}=\underline{\alpha}\times(\underline{2}'+\underline{\alpha+1})=(\underline{\alpha}\times\underline{2}')+\underline{\alpha+1}$. Nous obtenons ainsi un intermédiaire $\underline{\lambda}$ entre $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha+1}$. Cet intermédiaire est différent de $\underline{\alpha}$, car $\mathcal{N}^{\alpha}$ étant isotrope, il faudrait d'après (2.10) et (3.16) que $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}\times\underline{2}'$ pour que $\underline{\lambda} = \underline{\alpha}$, ce qui est impossible puisque $\underline{\alpha}$ est vif et $\underline{2}'$ ne l'est pas. De même, $\underline{\lambda} \neq \underline{\alpha+1}$, car sinon, dans le terme de droite, il faudrait $\underline{\alpha+1}\leqslant\underline{\alpha}\times\underline{2}'$ alors qu'une démonstration par récurrence à partir de $\underline{2}\not<\underline{2}'$ et de (3.15) montre que pour $\alpha\geqslant 1$, $\underline{\alpha+1}\not\leqslant\underline{\alpha}\times\underline{2}'$.

Cette deuxième méthode donne une solution différente de la première, pour $\alpha\geqslant 2$. En effet, tout comme $(\underline{\alpha+1})\not\leqslant\underline{\alpha}\times 2'$, nous avons $(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'\not\leqslant\underline{\alpha}\times\underline{2}'$, la récurrence s'amorçant sur l'inégalité $3+\underline{3}'\not\leqslant 2\times\underline{2}'$ qui se démontre — rapidement, mais non élémentairement — en remarquant que si $\mathscr{A}$ est un ultrafiltre *absolu*, $\underline{2}\times 2'<\mathscr{A}\cdot\mathscr{A}$ alors que $\underline{3}+\underline{3}'\not<\mathscr{A}\cdot\mathscr{A}$ (2.10).

Le résultat $\underline{3}+\underline{3}'\not\leqslant 2\times 2'$ pouvant s'énoncer à l'aide d'une formule Π_2^1, sa démonstration ne dépend pas en fait de l'hypothèse du continu d'après le lemme de Schoenfield — voir [10] et (3.12). Dès lors, dès que $\alpha\geqslant 2$,

$$(\underline{\alpha+1})+(\underline{\alpha+1})'\not\leqslant\alpha\times 2',$$

et par suite,

$$\underline{\lambda}\neq\underline{\alpha+1}+(\underline{\alpha+1})'.$$

§ 4

Nous allons conclure cet article sur deux remarques concernant l'étude des fonctions sur un espace métrique compact. La première est liée à l'isotropie.

4.1. Remarque 1. Soit T un espace compact métrisable et f une fonction discontinue définie sur T. Nous avons défini en fin du § 0 le Type descriptif de f, notion due à Katětov [8]. Ce filtre, $\Phi(f)$, est défini à un isomorphisme près.

Supposons que f soit limite d'une suite de fonctions continues (f_n) selon un filtre $\mathscr{F}$. Si $\Phi(f)$ est isotrope, alors il existe $\mathscr{G}$ de Type celui de $\Phi(f)$, tel que $f = \mathscr{G}\text{-}\mathrm{Lim}\,\underline{f_n}$.

Par contre, si par exemple $\Phi(f) = \mathscr{M}+\mathscr{N}^2$, alors f est limite selon $\mathscr{M}$ d'une suite de fonctions continues (f_n) et selon $\mathscr{N}^2$ d'une autre suite (g_n), et en aucun cas, f ne sera $\mathscr{F}$-lim $\underline{f_n}$ pour $\mathscr{F}$ un filtre de Type $\mathscr{N}^2$.

La seconde remarque était en germe dans notre réponse à la question 1 de Katětov. Elle est:

4.2. Remarque 2. Si le Type descriptif de f est analytique, alors il doit être vif.

Ainsi, tout filtre ne peut pas être Type descriptif d'une fonction discontinue; quels sont ces filtres? Sont-ils tous isotropes? Vifs?

Bbiliographie

[1] A. Blass, *Ordering of Ultrafilters*, Thesis, Harvard University, Cambridge (Mass)., 1970.
[2] — *The Rudin Keisler ordering of p-points*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), pp. 145–167.
[3] D. Booth, *Ultrafilters on a countable set*, Ann. Math. Logic 2 (1970), pp. 1–24.
[4] G. Choquet, *Construction d'ultrafiltres sur N et deux classes remarquables d'ultrafiltres* Bull. Sci. Math. 92 (1968), pp. 41–48 et pp. 143–153.

[5] Z. Frolik, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), pp. 87–91.
[6] G. Grimeisen, *Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grensprozesse*, Math. Ann. 141 (1960), pp. 318–342, et *Ein Approximation Satz für Bairesche Funktionen*, Math. Ann. 146 (1962), pp. 189–194.
[7] M. Katětov, *On descriptive classes of functions*, Theory of sets and Topology — a collection of papers in honour of Felix Hausdorff, D. V. W. (1972).
[8] — *On descriptive classification of functions*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, Proc. Sympos. Prague, 1971.
[9] A. R. D. Mathias, *Solutions of problems of Choquet and Puritz*, Conference in Mathematical Logic London 70, Notes Series 255 (1972), pp. 204–211.
[10] R. A. Platek, *Eliminating the continuum hypothesis*, J. Symb. Logic 34 (1969), pp. 219–225.
[11] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J. 23 (1956), pp. 409–419, 633.
[12] R. C. Solomon, *Ultrafilters and Ultraproducts*, Thesis, Bedford College London (1972).

UNIVERSITÉ DE PARIS VII

Accepté par la Rédaction le 18. 1. 1975