Группы и кольца, теория которых категорична

Б. И. Зильбер (Кемерово)

Abstract. We investigate groups, interpretable in models of $\aleph_1$-categorical theories. As an application of obtained results we answer Macintyre's question: every divisible ring whose theory is $\aleph_1$-categorical is a commutative field.

0. Введение. Пусть A — модель $\aleph_1$-категоричной теории T, G — алгебраическая система, которая формульно интерпретируется в модели A. В такой ситуации мы называем G слабо категоричной алгебраической системой. Содержание статьи — исследование слабо категоричных групп и приложение полученных результатов к слабо категоричным кольцам. В частности, доказано следующее утверждение, дающее ответ на вопрос, поставленный А. Макинтайром [13]:

Теорема 6.1. *Слабо категоричное тело коммутативно, то есть является полем.*

Легко понять, что произвольная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем слабо категорична, так как теория алгебраически замкнутого поля $\aleph_1$-категорична. Этот пример наводит на аналогию между алгебраическими и слабо категоричными группами. На этом пути получены основные теоремы (носящие технический характер) о слабо категоричных группах, содержащиеся в статье. Существенно используется теоретико-модельная техника ранга (по Морли), развитая автором в [4], [5]. Интересно отметить, что ранг формульного подмножества является хорошим аналогом размерности алгебраического многообразия в алгебраической геометрии.

Среди других результатов следует отметить:

Теорема 5.2. *Теория простой алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем $\aleph_1$-категорична.*

Отметим, что этот результат формулируется в духе традиционной теории моделей, но получить его классическими методами, по-видимому, невозможно.

С. А. Чихачёв [8], показал, что вопрос М. А. Тайцлина о классификации $\aleph_1$-категоричных, универсальных теорий полугрупп сводится к вопросу, решённому нами в следующей теореме.

Теорема 4.2. *Если G — группа, универсальная теория которой $\aleph_1$-категорична, то G — абелева группа.*

В заключение сформулирован ряд вопросов, связанных со слабо категоричными группами.

Основные результаты статьи получены автором в 1972 году, краткое сообщение об этих результатах опубликовано в [6].

Автор рад выразить благодарность М. А. Тайцлину, указавшему столь интересную тему исследований и О. В. Белеградеку за ряд ценных советов и активный интерес к данной работе.

Мы фиксируем следующие обозначения: T — полная теория счётной сигнатуры Ω; A (возможно с индексами) — модель теории T; $\mathrm{St}(A)$ — стоуновское пространство над A, $\mathrm{St}^{\alpha}(A)$ — подпространство точек ранга $\geqslant\alpha$. Если тип p из $\mathrm{St}(A)$ имеет ранг α, т.е. $p\in \mathrm{St}^{\alpha}(A)\setminus \mathrm{St}^{\alpha+1}(A)$, мы пишем $R(p)=\alpha$.

Мы не отличаем элементы из A от символов констант, которыми они обозначаются. $\Omega(A)$ — сигнатура, получающаяся добавлением символов констант из A к сигнатуре Ω. $F_n(A)$ — множество формул сигнатуры $\Omega(A)$ с n свободными переменными. Мы не отличаем формул из $F_1(A)$ от формульных подмножеств A, которые они определяют, поэтому $F_1(A)$ можно понимать также как булеву алгебру формульных относительно $\Omega(A)$ подмножеств модели A (или её расширения).

Ранг формульного подмножества Φ из $F_1(A)$ естественно определяется рангом типов, содержащих Φ, и обозначается $R(\Phi)$. Мы полагаем $R(\Phi)=\max\{R(p)|\ p\in\mathrm{St}(A),\ \Phi\in p\}$. Буквой v (возможно с индексами) мы всегда обозначаем свободные переменные. Иногда мы пишем $R(\Phi(v))$, чтобы выделить переменную, которая в данном случае рассматривается свободной. В тексте используются логические связки $\rightarrow$, &, $\vee$, в то время как $\subseteq$, $\cap$, $\cup$ — значки теоретико-множественных операций.

Теоретико-групповые обозначения, которые мы используем стандартны. Буквой e мы обозначаем единицу группы. Φ^g обозначает сопряжение подмножества Φ элементом g.

1. Предварительные результаты. Ранги формульных подмножеств. Предполагается знакомство читателя с теорией $\aleph_1$-категоричности [11], [14]. Мы приведём без доказательств некоторые результаты о ранге формульных подмножеств, содержащиеся в работах автора [4], [5].

Следующее предложение содержится в [16] и независимо замечено также автором [5].

Предложение Р.1. $\mathrm{St}^{\alpha+1}(A)$ совпадает с множеством предельных точек $\mathrm{St}^{\alpha}(A)$, если A — $\aleph_0$-насыщенная модель.

Болдуином [9] и несколько позже автором [4], [5] получена

Теорема Р.2. *Если T — $\aleph_1$-категоричная теория, то $R(T)$ конечно. То есть $R(\Phi)$ конечно для любой Φ из $F_1(A)$.*

Формула $\Psi(v_0, v_1)$ из $F_2(A)$ называется *расслоением формулы $\Phi(v_1)$ по формуле $\Delta(v_0)$*, если:

а) $A\models \Psi(v_0, v_1)\rightarrow\Delta(v_0)$,

б) $A\models \exists v_0\Psi(v_0, v_1)\leftrightarrow\Phi(v_1)$.

Если, кроме того, $R(\Psi(a, v_1))<\alpha$ для любой $a\in\Delta(A)$, то мы называем Ψ *расслоением ранга* $<\alpha$ (соответственно $\leqslant\alpha$ или $=\alpha$).

Лемма Р.3 ([4], [5]). *Если T — $\aleph_1$-категоричная теория, A — модель T, $\Phi, \Delta\in F_1(A)$, $R(\Phi)=\alpha>0$, Δ — сильно минимальное подмножество A, то существует расслоение $\Psi(v_0, v_1)$ ранга $<\alpha$ формульного подмножества $\Phi(v_1)$ по $\Delta(v_0)$.*

(На самом деле верно и обратное, то есть существование расслоения ранга $<R(\Phi)$ для всех формул Φ $(R(\Phi)>0)$ влечёт $\aleph_1$-категоричность тотально трансцендентной теории T.)

Две теоремы, сформулированные ниже — наш основной технический инструмент.

Теорема Р.4 ([4], [5]). *Пусть T — $\aleph_1$-категоричная теория, A — её модель. Если $\Psi(v_0, v_1)$ — расслоение ранга $\leqslant n$ формульного множества Φ $(\Phi\in F_1(A))$ по $\Delta(\Delta\in F_1(A))$, то*

$$R(\Phi)\leqslant n+R(\Delta).$$

Теорема Р.5 ([4], [5]). *Пусть T — $\aleph_1$-категоричная теория, $\Psi(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ — формула сигнатуры Ω, m — натуральное число. Тогда существует формула $\Theta\in F_k(\varnothing)$ такая, что для любой модели A теории T и любого набора $a_1, \ldots, a_k\in A$*

$$R(\Psi(v_0, a_1, \ldots, a_k))\leqslant m\Leftrightarrow A\models\Theta(a_1, \ldots, a_k).$$

Замечание. Отметим, что многие из теорем, цитируемых выше, аналогичны теоремам Шелаха о φ-ранге из [17].

2. Слабо категоричные алгебраические системы. Группы. Все рассматриваемые сигнатуры не содержат символов функций.

Будем говорить, что алгебраическая система K сигнатуры Ω_K *интерпретируется в теории T* (в модели A теории T) *сигнатуры* Ω, если:

1. Сигнатура Ω содержит все символы сигнатуры Ω_K;

2. Существует формульный в сигнатуре Ω одноместный предикат, который мы обозначаем той же буквой, что и интерпретируемую систему, т.е. K, и подсистема $K(A)$ системы A изоморфна алгебраической системе K относительно сигнатуры Ω_K.

Заметим, что при обозначениях, введённых выше, $K=K(A)$, здесь слева мы рассматриваем K как алгебраическую систему, справа — K-предикат, выделяющий алгебраическую подсистему. Ниже, если это особо не оговаривается, нам удобно не различать эти два употребления K (или соответственно G, Q и т.д.). Если теория бесконечной алгебраической системы K сигнатуры Ω_K $\aleph_1$-категорична, мы будем говорить коротко: K — *категоричная система*.

Если алгебраическая система K интерпретируется в модели A $\aleph_1$-категоричной теории T, то мы называем K *слабо категоричной системой*.

Категоричная система всегда предполагается бесконечной, в то время как слабо категоричная система может быть конечной.

Пусть K — алгебраическая система, интерпретирующаяся в модели A теории T. Пусть K_0 — формульный в сигнатуре $\Omega(A)$ одноместный предикат такой, что $K_0(A)$ — подсистема (относительно Ω_K) системы K. Мы будем называть $K_0(A)$ *формульной подсистемой* K (соответственно *формульной подгруппой*, *формульным подкольцом* и т.д.).

Очевидно, если K — слабо категоричная система, а K_0 — её формульная подсистема, то K_0 — также слабо категоричная система.

Заметим, что если A_1 и A_2 — две модели теории T, то $K(A_1)$ элементарно эквивалентна $K(A_2)$ в сигнатуре Ω_K, так как T — полная теория. Теорию системы $K(A)$ сигнатуры Ω_K будем обозначать T_K.

Замечание 1. Если A — $\aleph_0$-насыщенная модель T, то $K(A)$ в сигнатуре Ω_K — $\aleph_0$-насыщенная модель T_K. Действительно, для проверки $\aleph_0$-насыщенности $K(A)$ достаточно проверить выполнимость в $K(A)$ произвольной конечно-выполнимой в $K(A)$ системы формул $\{\Phi_i(v_0)|\ i\in I,\ \Phi_i\in F_1(C)\}$, где C — конечное подмножество $K(A)$. Но $\{\Phi_i(v_0)|\ i\in I\}$ выполнимо в $K(A)$, так как A $\aleph_0$-насыщена, а $K(A)$ — относительно формульное подмножество A.

Если K — слабо категоричная система, то T_K обладает многими свойствами $\aleph_1$-категоричной теории, а именно:

Лемма 2. *Пусть T $\aleph_1$-категоричная теория, в которой интерпретируется алгебраическая система K, T_K — теория системы K сигнатуры Ω_K. Тогда*:

а) *T_K — тотально трансцендентная теория*;

б) *Теория T_K не имеет* f.c.p.

Доказательство а). Проверим, что если A — счетная $\aleph_0$-насыщенная модель T, то $\mathrm{St}(K)$ счётно, где $K = K(A)$, а $\mathrm{St}(K)$ — стоуновское пространство модели K сигнатуры Ω_K. Согласно замечанию 1, K — $\aleph_0$-насыщенная и, следовательно, $\aleph_0$-универсальная модель T_K, поэтому проверки счётности $\mathrm{St}(K)$ достаточно для утверждения тотальной трансцендентности T_K.

Для типа $p\in \mathrm{St}(K)$ обозначим через p^K тип сигнатуры $\Omega(A)$ (вообще говоря, неполный), получающийся релятивизацией всех формул из p по K. Ясно, что p_1^K совместно с p_2^K в A тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2$ (т.е. $p_1^K = p_2^K$). Так как T тотально трансцендентно, множество $\{p^K|\ p\in \mathrm{St}(K)\}$ счётно, следовательно, $\mathrm{St}(K)$ счётно. Утверждение (а) доказано.

Доказательство б). Предположим противное: теория T_K и, следовательно, некоторая формула $\Phi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ сигнатуры Ω_K обладает f.c.p. Тогда релятивизация формулы Φ по K обладает f.c.p. в T. Противоречие с $\aleph_1$-категоричностью T. Лемма доказана.

Подчеркнем, что задание слабо категоричной системы K предполагает задание T, A и предиката $K(v)$. При этом $R(K)$ обозначает $R(K(v))$ в модели A теории T. В этой же ситуации, если A — модель теории T, мы обозначаем

$$\mathrm{St}_K(A) = \{p\in \mathrm{St}(A)|\ K\in p\}\,,$$

$$F_{1,K}(A) = \{\Phi\ \&\ K|\ \Phi\in F_1(A)\}\,.$$

Замечание 3. Легко видеть, что $\mathrm{St}_K(A)$ гомеоморфно стоуновскому пространству над булевой алгеброй $F_{1,K}(A)$: гомеоморфизм состоит в переделывании каждой формулы Φ из типа $p\in \mathrm{St}_K(A)$ в формулу $\Phi\ \&\ K$ из $F_{1,K}(A)$.

В частности, всякий автоморфизм булевой алгебры $F_{1,K}(A)$ индуцирует гомеоморфизм $\mathrm{St}_K(A)$ на себя.

Приведём несколько важных примеров слабо категоричных групп.

Первый пример неявный, но он объясняет необходимость изучения слабо категоричных групп в связи с изучением категоричных колец.

Пример 1. Пусть K — категоричное (или слабо категоричное) кольцо, тогда: а) аддитивная группа кольца K слабо категорична; б) мультипликативная группа единиц кольца K слабо категорична.

Пример 2 (Теорема Макинтайра [12]). Абелева группа G категорична тогда и только тогда, когда $G\simeq H(p^n)\dotplus B$ или

$$G\simeq B\dotplus\sum_{i\in I} C_{p_i}^{m_i}\dotplus Q\,,$$

где $H(p^n)$ — прямая сумма циклических групп порядка p^n, B — конечная абелева группа; C_p — квазициклическая группа типа p^∞; $Q = \{0\}$ или Q — полная абелева группа без кручения; p, p_i — простые числа, p_i — i-тое простое число; I — подмножество ω, m_i — натуральные числа.

Пример 3. Произвольные алгебраические группы [1] над алгебраически замкнутым полем слабо категоричны. Ниже мы укажем способ интерпретации линейной алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем в некоторой $\aleph_1$-категоричной теории. Случай абстрактной алгебраической группы требует более громоздкой конструкции, которая состоит в рутинном обобщении линейного случая.

Итак, пусть полиномы $P_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, P_k(v_1, \ldots, v_n)$ определяют аффинное многообразие над алгебраически замкнутым полем K, а рациональное отображение $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$: $K^{2n}\to K^n$ задает на этом многообразии операцию алгебраической группы.

Сигнатура Ω теории T, в которой будем интерпретировать данную алгебраическую группу, состоит из двух одноместных предикатов K, G, трехместных предикатов S, Q, O символов констант $a_1, \ldots, a_m$ для всех коэффициентов $\varphi, P_1, \ldots, P_k$ и $(n+1)$-местного предиката f.

Теорию T зададим некоторой ее моделью A, которая устроена следующим образом:

а) $K(A) \cup G(A) = A$; $K(A) \cap G(A) = \emptyset$.

б) $K(A)$ вместе с предикатами S, Q есть поле, изоморфное полю K. Здесь $S(x_1, x_2, x_3)$ понимается как $x_1+x_2 = x_3$, а $Q(x_1, x_2, x_3)$ — как $x_1 \cdot x_2 = x_3$. Константы $a_1, \ldots, a_m$ интерпретируются элементами из $K(A)$ в соответствии с изоморфизмом $K \simeq K(A)$, как коэффициенты $\varphi, P_1, \ldots, P_k$. Таким образом, исходное многообразие, определяемое полиномами $P_1, \ldots, P_k$ и отображение φ формульны в $K(A)$.

в) Предикаты $S(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$ ложны, если хотя бы один из $x_1 x_2, x_3$ лежит в $G(A)$.

Предикат $O(x_1, x_2, x_3)$ ложен, если один из x_1, x_2, x_3 лежит в $K(A)$.

г) Предикат $O(v_1, v_2, v_3)$ определяет на $G(A)$ групповую операцию, $O(x_1, x_2, x_3)$ понимается как $x_1 \circ x_2 = x_3$.

Предикат f является графиком частичной функции, которую мы обозначаем той же буквой и для которой выполняется следующее:

1) область определения f есть множество общих нулей полиномов $P_1, \ldots, P_k$;

2) область значений f есть $G(A)$;

3) $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$;

4) $f(x_1, \ldots, x_n) \circ f(y_1, \ldots, y_n) = f(\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n))$.

Таким образом, f „переносит" на G структуру алгебраической группы.

Очевидно, тип изоморфизма произвольной модели A теории T определяется типом изоморфизма поля $K(A)$ (вместе с интерпретацией констант $a_1, \ldots, a_m$). Но так как теория алгебраически замкнутого поля с выделенными константами $\aleph_1$-категорична, то и T — $\aleph_1$-категоричная теория, а $\langle G, \circ \rangle$ — слабо категоричная группа.

Среди алгебраических групп есть группы категоричные в исходной (групповой) сигнатуре. В частности, всякая простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем категорична (см. теорему 5.2).

С другой стороны существуют алгебраические группы, которые некатегоричны в групповой сигнатуре. Алгебраическая группа $\mathrm{PSL}(n, K) \times \times \mathrm{PSL}(n, K)$ (K — поле комплексных чисел) элементарно эквивалентна в групповой сигнатуре группе $\mathrm{PSL}(n, K) \times \mathrm{PSL}(n, K_0)$ (K_0 — поле алгебраических чисел нулевой характеристики). Обе эти группы мощности континуума, но они неизоморфны, так как во втором случае существует счётная нормальная подгруппа, а в первом — нормальная подгруппа всегда континуальна.

3. Формульные подгруппы. Формульное подмножество Φ группы G можно сдвигать слева (справа) умножением на элемент g из G. Результат сдвига мы обозначаем $g\Phi$, то есть

$$g\Phi = \{a \in G|\ \exists b(\Phi(b)\ \&\ a = gb)\}\ .$$

Ясно, что сдвиг слева (справа) на элемент g из $G(A)$ определяет автоморфизм булевой алгебры $F_{1,G}(A)$. С другой стороны, этот автоморфизм порождает гомеоморфизм стоуновского пространства $\mathrm{St}_G(A)$, который определяется сдвигом типов p из $\mathrm{St}_G(A)$ на элемент g. Сдвиг типа p элементом g слева мы обозначаем gp, то есть $gp = \{g\Phi|\ \Phi \in p\}$.

Замечание 4. Так как сдвиг на g из $G(A)$ задаёт гомеоморфизм $\mathrm{St}_G(A')$ для $A' \succeq A$, то согласно замечанию 3 и предложению P.1, $R(gp') = R(p')$ и $R(g\Phi') = R(\Phi')$ для любых $p' \in \mathrm{St}_G(A')$, $\Phi' \in F_{1,G}(A')$, $g \in G(A)$, отсюда $R(gp) = R(p)$, $R(g\Phi) = R(\Phi)$ для $p \in \mathrm{St}_G(A)$, $\Phi \in F_{1,G}(A)$.

Для типа p из $\mathrm{St}_G(A)$ положим

$$\mathrm{Ст}(p) = \{g \in G(A)|\ gp = p\}\ .$$

Очевидно, $\mathrm{Ст}(p)$ — подгруппа группы G. Мы называем эту *подгруппу стабилизатором типа* p.

Теорема 3.1. *Пусть* $p \in \mathrm{St}_G(A)$, *тогда существует формула* $\Theta \in F_{1,G}(A)$ *такая, что* $\Theta(A) = C_T(p)$.

Доказательство. Пусть $R(p) = m$. Существует формула $\Phi \in F_{1,G}(A)$ такая, что $\Phi \in p$ и p — единственный тип ранга $\geqslant m$, содержащий Φ. В частности, это условие влечёт, что $R(\Phi) = m$ и, если $gp \neq p$, то $g\Phi \in gp$ и $g\Phi \notin p$, так как $g\Phi$ также содержится в единственном типе ранга m. То есть $g\Phi\ \&\ \Phi \notin p$ и $R(g\Phi\ \&\ \Phi) < m$, если $gp \neq p$. С другой стороны, $g\Phi\ \&\ \Phi \in p$, $R(g\Phi\ \&\ \Phi) = m$, если $gp = p$. Таким образом,

$$g \in \mathrm{Ст}\,(p) \Leftrightarrow R(g\Phi\ \&\ \Phi) = m.$$

Теперь нужная формула Θ получается по теореме P.5.

Идея следующей леммы принадлежит Макинтайру [12], данный вариант доказательства предложен Ю. Л. Ершовым.

Лемма 5. *Пусть* $G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n \geqslant \ldots$ — *последовательность вложенных формульных подгрупп слабо категоричной группы* G ($G = G_0$). *Тогда существует номер* n_0 *такой, что* $G_{n_0} = G_n$ *для всех* $n \geqslant n_0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в модели A теории T последовательность G_n строго убывает, Тогда для каждого n существует такой $a_n \in A$, что $a_n \in G_n(A) \setminus G_{n+1}(A)$. Пусть теперь η — произвольная последовательность нулей и единиц, а $a^{\eta(i)}$ есть a, если $\eta(i) = 1$, и есть e, если $\eta(i) = 0$.

Пусть тип p^η есть $\{\Phi_n^\eta|\ n \in \omega\}$, где

$$\Phi_n^\eta = \prod_{i \leqslant n} a_i^{\eta(i)} \cdot G_{n+1}\ .$$

Легко видеть, что $\Phi_n^\eta \supseteq \Phi_{n+1}^\eta$, Φ_n^η есть смежный класс по G_{n+1} и $\Phi_n^{\eta_1}$ пересекается с $\Phi_n^{\eta_2}$, только если $\eta_1(i) = \eta_2(i)$ для $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Таким образом, варьируя η, мы получим континуум различных типов p^η, что противоречит тотальной трансцендентности T.

Следствие 6. *Пусть $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$ — совокупность формульных подгрупп группы G. Тогда существует конечное множество индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq I$ такое, что* $\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha = G_{\alpha_1} \cap \ldots \cap G_{\alpha_k}$.

Замыканием произвольной подгруппы $Q \subseteq G$ мы называем наименьшую формульную подгруппу $\bar{Q}$ такую, что $G \supseteq \bar{Q} \supseteq Q$. Согласно следствию 6, замыкание существует для любой подгруппы Q. Пусть $C(Q) = \{g \in G\colon \forall a \in Q,\ ga = ag\}$.

Лемма 7. *Если Q — абелева подгруппа G, то её замыкание $\bar{Q}$ также абелево.*

Доказательство. Заметим сначала, что $C(Q) \in F_{1,G}(A)$. В самом деле, очевидно, что $C(a) \in F_{1,G}(A)$ для любого $a \in G(A)$. Но бесконечное пересечение $\bigcap_{a \in Q} C(a) = C(Q)$ равно некоторому конечному пересечению (следствие 6), то есть $C(Q) = C(a_1) \cap \ldots \cap C(a_k)$. Кроме того, $C(Q) \supseteq Q$, поэтому $C(Q) \supseteq \bar{Q}$.

Пусть теперь $x, y \in \bar{Q}$. Тогда $x \in C(Q)$, и, значит, $C(x) \supseteq Q$, то есть $C(x) \supseteq \bar{Q}$, но это означает, что $y \in C(x)$. Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно доказать, что замыкание нильпотентной (разрешимой группы) будет нильпотентной (разрешимой) группой того же класса.

Для произвольной формульной подгруппы Q формульное подмножество Φ группы G будем называть *Q-расчленимым*, если $\Phi \subseteq a_1 Q \cup \ldots \cup a_k Q$ при некоторых $a_1, \ldots, a_k \in G$ и $k > 1$, но $\Phi \not\subseteq a_i Q$ ни при каком a_i. Если для всех Q Φ не Q-расчленимо, то Φ будем называть *нерасчленимым*. В случае, когда Φ есть подгруппа вместо нерасчленима будем говорить *связна*.

Ясно, что слабо категоричная группа G тогда и только тогда связна, когда G не содержит собственных формульных подгрупп конечного индекса.

Замечание 8. Так как пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса есть снова подгруппа конечного индекса, любая слабо категоричная группа G содержит нормальную связную формульную подгруппу конечного индекса G^0, которая определяется следующим образом $G^0 = \bigcap Q^g$, где Q пробегает все формульные подгруппы G конечного индекса, а g пробегает G (см. следствие 6). G^0 мы называем *связной компонентой* G. Очевидно, $R(G^0) = R(G)$.

Лемма 9. *Пусть $\Phi \in F_{1,G}(A)$ и Φ — нормальное подмножество G (т.е. $\Phi^g = \Phi$ для $g \in G$). Если Φ P-нерасчленимо для всех нормальных подгрупп P, то Φ нерасчленимо.*

Доказательство. Пусть, напротив, Φ Q-расчленимо. Тогда для любого g из G Φ Q^g-расчленима, так как $\Phi^g = \Phi$. Пусть Φ разбивается на m частей классами смежности по подгруппе Q (и Q^g), легко проверить, что Φ разбивается на k частей, где $m \leqslant k \leqslant m^n$, классами смежности по подгруппе $Q^{g_1} \cap \ldots \cap Q^{g_n}$ для любых $g_1, \ldots, g_n \in G$. Согласно следствию 6, нормальная подгруппа $P = \bigcap_{g \in G} Q^g$ формульна и $P = Q^{g_1} \cap \ldots \cap Q^{g_n}$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$. Как было замечено, P разбивает Φ на k частей ($m^n \geqslant k \geqslant m$), но мы предположили, что $m > 1$, следовательно Φ P-расчленимо для нормальной подгруппы P. Лемма доказана.

Формула $\Phi \in F_1(A)$ называется *неприводимой*, если для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in F_1(A)$ из того, что $R(\Phi_1) = R(\Phi_2) = R(\Phi)$ и $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, следует, что $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \varnothing$.

Для формулировки и доказательства следующей леммы нам удобно ввести обозначение $\Phi \mid\sim \chi$ (можно читать „χ почти содержится в Φ“). Для формул $\Phi, \chi \in F_1(A)$ $\Phi \mid\sim \chi$ означает, что $R(\chi \setminus \Phi) < R(\chi)$, то есть часть формульного подмножества χ, лежащая вне Φ, имеет ранг меньший $R(\chi)$.

Лемма 10. *Пусть $p \in \mathrm{St}_G(A)$, Φ, $\chi \in F_{1,G}(A)$, $\Phi \in p$ и $\chi \subseteq \mathrm{Ст}(p)$. Тогда существует $g \in \Phi(A)$, для которого $\Phi \mid\sim \chi g$. В частности $\Phi \mid\sim \mathrm{Ст}(p) \cdot g$.*

Доказательство. Индукция по $R(\chi)$. Пусть $R(\chi) = 0$ и $\chi \subseteq \mathrm{Ст}(p)$, тогда $\chi = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Очевидно, $\Phi \,\&\, a_1\Phi \,\&\, \ldots \,\&\, a_k\Phi \in p$; так как p — совместный тип, существует g такое, что $g \in \Phi(A) \cap a_1\Phi(A) \cap \ldots \cap a_k\Phi(A)$. Но это означает, что $g = a_1^{-1}g_1 = \ldots = a_k^{-1}g_k$ для некоторых $g_1, \ldots, g_k \in \Phi(A)$. Теперь видно, что $\chi \cdot g = \{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq \Phi$.

Пусть мы доказали утверждение леммы для всех $\chi' \subseteq \mathrm{Ст}(p)$ таких, что $R(\chi') \leqslant m$ и пусть $R(\chi) = m+1$.

Фиксируем некоторую сильно минимальную формулу $\Delta \in F_1(A)$. Рассмотрим $\Psi(v_0, v_1)$ — расслоение ранга $\leqslant m$ формулы $\chi(v_1)$ по $\Delta(v_0)$. Для каждого g из $G(A)$ множество

$$D_g(A) = \{a \in \Delta(A) |\ R(\Psi(a, A) \cdot g \setminus \Phi(A)) < m\}$$

формульно в сигнатуре $\Omega(A)$ (теорема P.5). С другой стороны, для любых $a_1, \ldots, a_n \in \Delta(A)$ по предположению индукции существует $g_n \in \Phi(A)$ такой, что $\Phi \mid\sim (\bigcup_{i \leqslant n} \Psi(a_i, A)) \cdot g_n$. То есть для каждого n $D_{g_n}(A)$ содержит не менее n элементов. По теореме компактности в некотором $A' \succeq A$ найдётся $g \in \Phi(A')$ такой, что $D_g(A')$ бесконечно. Так как Δ сильно минимальна, $\Delta(A') \setminus D_g(A')$ конечно. В силу формульности последнего условия, найдётся $g_0 \in \Phi(A)$ такой, что $\Delta(A) \setminus D_{g_0}(A)$ конечно. Пользуясь теоремой P.4, подсчитаем: $R(\chi \cdot g \setminus \Phi) < m$, то есть $\Phi \mid\sim \chi \cdot g$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Слабо категоричная группа G связна тогда и только тогда, когда G неприводима.*

Доказательство. Пусть G неприводима, G^0 — связная компонента G. Тогда $R(G) = R(G^0) = R(gG^0)$ для любого $g \in G$. Так как G неприводима, $R(G \setminus G^0) < R(G)$ а это может быть только если $G = G^0$. То есть G связна.

Пусть теперь G — связная группа и

$$P = \{p \in \mathrm{St}_G(A) |\ R(p) = R(G)\}\ .$$

Так как P всегда конечно, можно записать $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$.

Рассмотрим $\mathrm{Ст}(p_0)$. Если $g \in G$, то $R(gp_0) = R(p_0)$, поэтому $gp_0 = p_i$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, k\}$. Отсюда индекс $\mathrm{Ст}(p_0)$ в G не превышает $k+1$, то есть $\mathrm{Ст}(p_0)$ — формульная подгруппа G конечного индекса. В силу связности G, имеем $G = \mathrm{Ст}(p_0)$.

Теперь, если $\Phi \in p_0$ и p_0 — единственный тип ранга $R(G)$, содержащий Φ, по лемме 10 $\Phi |\!\sim G$, то есть p_0 — единственный тип ранга $R(G)$, содержащий G. Иными словами $P = \{p_0\}$, а это и означает, что G неприводима. Теорема доказана.

Следствие 11. *Если* $\mathrm{Ст}(p) \in p$ *для некоторого* $p \in \mathrm{St}_G(A)$, *то* $\mathrm{Ст}(p)$ *связна.*

Доказательство. По лемме 10 p — единственный тип ранга $R(p)$, содержащий $\mathrm{Ст}(p)$. Отсюда следует $R(\mathrm{Ст}(p)) = R(p)$ и $\mathrm{Ст}(p)$ неприводима, т.е. связна.

Пусть $\{S_i |\ i \in I\}$ — семейство подмножеств группы G, тогда $\mathrm{гр}\{S_i |\ i \in I\}$ обозначает подгруппу, порождённую $\bigcup_{i \in I} S_i$. Мы будем говорить, что $\mathrm{гр}\{S_i |\ i \in I\}$ имеет конечную ширину относительно $\{S_i |\ i \in I\}$, если существуют $j_1, \ldots, j_k \in I$ $(k \in \omega)$ такие, что для любого $x \in \mathrm{гр}\{S_i |\ i \in I\}$ найдутся $z_1 \in (S_{j_1} \cup S_{j_1}^{-1}), \ldots, z_k \in (S_{j_k} \cup S_{j_k}^{-1})$ с условием $x = z_1 \cdot \ldots \cdot z_k$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\{S_i |\ i \in I,\ S_i \in F_{1,G}(A)\}$ — *семейство нерасчленимых формульных подмножеств слабо категоричной группы* G, *содержащих единицу* e *группы* G. *Тогда* $\mathrm{гр}\{S_i |\ i \in I\}$ *имеет конечную ширину относительно* $\{S_i |\ i \in I\}$, *и является связной формульной подгруппой группы* G.

Доказательство. По теореме P.2 существует произведение $S_{i_1} \cdot \ldots \cdot S_{i_k} = S$ такое, что $R(S) \geqslant R(S_{j_1} \cdot \ldots \cdot S_{j_n})$ для любых $j_1, \ldots, j_n \in I$ $(k, n \in \omega)$. Пусть $p \in \mathrm{St}_G(A)$, $S \in p$ и $R(p) = R(S) = m$.

Рассмотрим произвольное S_j $(j \in I)$. Так как S_j $G(p)$-нерасчленимо и $e \in S_j$, то возможны два случая: первый, когда $S_j \subseteq \mathrm{Ст}(p)$, и второй, когда S_j пересекается с бесконечным числом классов смежности по $\mathrm{Ст}(p)$, т.е. $S_j \cap g_n \cdot \mathrm{Ст}(p) \neq \varnothing$ для $g_1, \ldots, g_n, \ldots \in G$, причём, $g_n \mathrm{Ст}(p) \neq g_k \mathrm{Ст}(p)$ при $n \neq k$. Во втором случае можно считать, $g_n \in S_j$, поэтому $S_j S \supseteq g_n S$, т.е. $S_j S \in g_n p$ $(n = 1, 2, \ldots)$, но $g_n p \neq g_k p$ при $n \neq k$. Отсюда следует, $R(S_j S) > R(p) = R(S)$, а это противоречит максимальности $R(S)$. Значит, для любого $j \in I$ $S_j \subseteq \mathrm{Ст}(p)$. Теперь, если $g \in \mathrm{Ст}(p)$, то $gS \,\&\, S \in p$, откуда $gS \cap S \neq \varnothing$ или $g \in SS^{-1}$. Этим показано, что $\mathrm{гр}\{S_i |\ i \in I\} = S \cdot S^{-1} = \mathrm{Ст}(p)$, причём $\mathrm{Ст}(p) \in p$. Учитывая следствие 11, получаем утверждение теоремы.

4. Абелевы подгруппы.

Лемма 12. *Если бесконечная слабо категоричная группа* G *не имеет собственных бесконечных формульных подгрупп, то* G — *абелева группа.*

Доказательство. Достаточно найти бесконечную абелеву (не обязательно формульную подгруппу) Q группы G, тогда замыкание $\bar{Q}$, по лемме 7, — формульная абелева подгруппа, и $\bar{Q} = G$ по условию.

Если группа G содержит элемент a бесконечного порядка, то $\mathrm{гр}\{a\}$ — абелева группа, поэтому можно сразу считать, что G — периодическая группа.

Пусть C — центр группы G, допустим $C \neq G$, тогда по условию леммы C — конечная подгруппа. Для произвольного элемента a из G, не лежащего в центре C, рассмотрим формульную относительно a функцию φ_a: $G \to G$, определённую следующим правилом: $\varphi_a(x) = x^{-1}ax$. Легко видеть, что

$$\varphi_a(x_1) = \varphi_a(x_2) \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in C(a)\ ,$$

$a \notin C$, поэтому $C(a)$ — собственная формульная подгруппа, т.е. $C(a)$ конечно, а значит $\varphi_a^{-1}(y)$ конечно для всех $y \in \varphi_a(G)$. Определим $\Psi_a(v_0, v_1) \rightleftharpoons (\varphi_a(v_1) = v_0)$. Согласно доказанному выше, $\Psi_a(v_0, v_1)$ — расслоение ранга $\leqslant 0$ формульного множества G по $\varphi_a(G)$. По теореме P.4, $R(\varphi_a(G)) = R(G)$.

Заметим, что из условия леммы следует связность группы G, так как $G = G^0$ (G^0 — связная компонента G). По теореме 3.2 G неприводима. Если теперь $a, b \in G \setminus C$, то $\varphi_a(G) \cap \varphi_b(G) \neq \varnothing$ в силу неприводимости G. Последнее условие означает, как легко видеть, $\varphi_a(G) = \varphi_b(G)$, т.е. элементы a и b сопряжены в группе G.

Мы доказали тем самым, что все неединичные элементы группы G/C сопряжены, так как G/C — периодическая группа, отсюда следует $g^p = e$ для некоторого простого числа p и для всех элементов $g \in G/C$. $p \neq 2$, так как в противном случае G/C — абелева группа, что невозможно в силу условия сопряженности. Пусть $a \in G/C$, $a \neq e$, по условию, существует $g \in G/C$ такой, что $a^2 = g^{-1}ag$ $(a^2 \neq e)$. Отсюда следует $a^{2^n} = g^{-n}ag^n$ для любого натурального n. В частности, $a^{2^p} = (g^p)^{-1}ag^p = a$, то есть $2^p \equiv 1 \pmod{p}$, но последнее условие невозможно, так как $p > 2$ и $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Предположение $C \neq G$ привело к противоречию, следовательно $C = G$. Лемма доказана.

Замечание. В теоретико-групповой части нашего первоначального доказательства леммы 12 использовались сильные результаты из теории групп. Мы упростили это доказательство после знакомства с работой Рейнеке [15].

Следствие 13. *Всякая бесконечная слабо категоричная группа* G *обладает бесконечной абелевой формульной подгруппой.*

Доказательство. По лемме 5 можно найти формульную подгруппу H группы G, которая не имеет собственных бесконечных формульных подгрупп. По лемме 12 H абелева.

Лемма 14. *Пусть* H — *формульная подгруппа слабо категоричной группы* G, *индекс* H *в* G *бесконечен, тогда* $R(G) > R(H)$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{St}_H(A)$ и $R(p) = R(H) = m$. По условию число классов смежности G по H бесконечно, пусть S — множество представителей этих классов, по одному для каждого класса. По замечанию 4 для любого g из S $R(gp) = R(p) = m$. Согласно выбору S, $g_1 p \neq g_2 p$, если $g_1 \neq g_2$, $g_1, g_2 \in S$. Кроме того, $gp \in \mathrm{St}_G(A)$ для всех $g \in G$. Так как S бесконечно, из замеченного выше следует бесконечность $\mathrm{St}_G^m(A)$. Отсюда $R(G) > m$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Если G — слабо категоричная группа и $R(G) = 1$, то G содержит нормальную формульную абелеву подгруппу G^0 конечного индекса. Т.е. G почти абелева.*

Доказательство. Из леммы 14 следует, что любая бесконечная формульная подгруппа группы G имеет в G конечный индекс. Пусть G^0 — связная компонента группы G. Согласно замечанию 8, G^0 не имеет собственных формульных подгрупп конечного индекса и $R(G^0) = 1$, т.е. G^0 бесконечна. Пусть G' — бесконечная абелева формульная подгруппа группы G (следствие 13), так как G' конечного индекса в G, то $G^0 \cap G'$ — подгруппа конечного индекса в G^0, отсюда $G^0 \cap G' = G^0$, т.е. G^0 абелева. Теорема доказана.

Как показал Чихачёв [8], классификация универсальных $\aleph_1$-категоричных теорий полугрупп сводится к вопросу, решённому нами в следующей теореме.

Теорема 4.2. *Пусть T — универсально аксиоматизируемая $\aleph_1$-категоричная теория группы, G — её бесконечная модель, тогда G абелева.*

Доказательство. Очевидно, G — категоричная группа. Согласно следствию 13, в G существует бесконечная абелева подгруппа G', так как T универсальна, G' — модель T. Так как теория бесконечных моделей теории T полна, то G также абелева. Теорема доказана.

5. Простые слабо категоричные группы.

Теорема 5.1. *Пусть G — бесконечная неабелева группа, не имеющая собственых нормальных формульных подгрупп. Тогда G — простая группа.*

Доказательство. Так как G не имеет собственных формульных подгрупп, связная компонента G^0 совпадает с G, то есть G — связная группа.

Обозначим $g^G = \{x^{-1}gx \mid x \in G\} \cup \{e\}$ для $g \in G$, $g \neq e$. Очевидно, g^G — нормальное подмножество G, $g^G \in F_{1,G}(A)$. Кроме того, g^G бесконечно, так как в противном случае $C(g)$ имеет конечный индекс в G, то есть, в силу связности G, $G = C(g)$ и $g \in C$, что противоречит условию теоремы.

Теперь можно утверждать, что g^G нерасчленимо, действительно, достаточно проверить Q — нерасчленимость для нормальных подгрупп Q, т.е. $Q = G$ или $Q = \{e\}$. Первый случай отпадает очевидно, а $\{e\}$ — нерасчленимость g^G следует из бесконечности g^G.

По теореме 3.3, $\mathrm{гр}\{g^G\}$ — формульная подгруппа G; так как g^G — нормально, то и $\mathrm{гр}\{g^G\}$ нормальна, т.е. $\mathrm{гр}\{g^G\} = G$, а это означает, что нормальное замыкание элемента $g \in G$ совпадает со всей группой G. Так как g было выбрано произвольно, теорема доказана.

Говорят, что тотально трансцендентная теория T почти сильно минимальна, если: а) существует сильно минимальная формула $\Delta \in F_1(A_0)$, где A_0 — простая модель T; б) для каждой (для некоторой) модели A теории T существует формула $\Psi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in F(A)$ и натуральное число k такие, что

$$A \models \forall v_1, \ldots, v_n(\Delta(v_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \Delta(v_n) \to \exists v_0^{\leqslant k} \Psi(v_0, v_1, \ldots, v_n))$$
$$\& \, \forall v_0 \exists v_1, \ldots, v_n(\Delta(v_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \Delta(v_n) \,\&\, \Psi(v_0, v_1, \ldots, v_n)).$$

Болдуин заметил, что

Теорема (Болдуин [10]). *Почти сильно минимальная теория $\aleph_1$-категорична.*

Для доказательства следующей теоремы нам нужна

Лемма (Лахлан, Болдуин [11]). *Если тотально трансцендентная теория T не обладает* f.c.p., *то существует сильно минимальная формула $\Delta \in F_1(A_0)$, где A_0 — простая модель теории T.*

Эта лемма является лёгким обобщением известной леммы 9 из [11], там же отмечено, что для доказательства леммы 9 достаточно использовать f.c.p.

Теорема 5.2. *Пусть G — простая слабо категоричная группа. Тогда теория G в групповой сигнатуре $\aleph_1$-категорична, т.е. G — категоричная группа.*

Доказательство. Пусть T_G — теория группы G в групповой сигнатуре. T — исходная $\aleph_1$-категоричная теория, в которой интерпретируется группа G, A — модель T. Будем, как обычно, считать $G = G(A)$.

По лемме 2 T_G тотально трансцендентна. По лемме Лахлана–Болдуина существует сильно минимальная формула Δ, $\Delta \in F_1(G_0)$, где G_0 — простая модель теории T_G. Так как можно считать, $G_0 \preccurlyeq G$, то $\Delta \in F_{1,G}(A)$.

По лемме 5 существует минимальная (в смысле включения подгрупп) формульная подгруппа Q группы G, для которой пересечение $\Delta(A) \cap aQ$ бесконечно, при некотором $a \in G$. Ясно, что $\Delta(A) \cap aQ$ нерасчленимо, так как иначе Q не минимальна.

Пусть $g \in \Delta(A) \cap aQ$, обозначим $\Phi = g^{-1}(\Delta \cap aQ)$. Очевидно, Φ также нерасчленимо и содержит e. Этому же условию удовлетворяет Φ^{g_1} для любого $g_1 \in G$. По теореме 3.3 $\mathrm{гр}\{\Phi^{g_1} \mid g_1 \in G\}$ — формульная подгруппа G. Эта подгруппа нормальна, и так как G проста, $G = \mathrm{гр}\{\Phi^{g_1} \mid g_1 \in G\}$. С другой стороны, по теореме 3.3 $\mathrm{гр}\{\Phi^{g_1} \mid g_1 \in G\}$ конечной ширины относительно $\{\Phi^{g_1} \mid g_1 \in G\}$. В частности это означает, что существует групповое слово $W(v_1, \ldots, v_m, g, g_1, \ldots, g_n)$ $(g, g_1, \ldots, g_n \in G)$ такое, что для любого $c \in G$, найдутся $b_1, \ldots, b_m \in \Delta(A)$, удовлетворяющие равенство $W(b_1, \ldots, b_m, g, g_1, \ldots, g_n) = c$. Очевидно, формула

$$\Psi(v_0, v_1, \ldots, v_m) \rightleftharpoons (W(v_1, \ldots, v_m, g, g_1, \ldots, g_n) = v_0)$$

удовлетворяет условию определения почти сильно минимальности теории. Следовательно, T_G почти сильно минимальна, по теореме Болдуина T_G $\aleph_1$-категоричная теория. Теорема доказана.

Следствие. *В частности, теория произвольной простой алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем $\aleph_1$-категорична.*

6. **Тела.** Макинтайр доказал, что

Теорема (Макинтайр [13]). *Бесконечное поле, теория которого тотально трансцендентна, алгебраически замкнуто.*

Макинтайр также сформулировал проблему описания колец и, в частности, тел, теория которых $\aleph_1$-категорична. Следующая теорема даёт ответ для тел. (Эта теорема анонсирована в [6], в настоящее время получено полное решение проблемы Макинтайра [7]).

Теорема 6.1. *Бесконечное слабо категоричное тело K является алгебраически замкнутым полем.*

Доказательство разобьём на пункты. Отметим, что в пункте в) доказывается неравенство, которое следует из теории Галуа для тел [2], мы приводим полное доказательство без ссылок (следуя, однако, общей схеме) в нужном нам частном случае. Итак:

а) В слабо категоричном теле K существует бесконечное формульное подтело, которое является полем. Действительно, согласно следствию 13, в мультипликативной группе K^* существует бесконечная абелева формульная подгруппа H. Пусть N — минимальное формульное подтело K (лемма 5), содержащее H и центр тела C. Так как N минимально, $N \subseteq C(H)$ $(C(H))$ — централизатор H), отсюда $(C \cup H) \subseteq (C(N) \cap N) \subseteq N$, то есть $N = C(N) \cap N$. Последнее означает, что N — поле, причём по теореме Макинтайра и лемме 2, алгебраически замкнутое.

б) K можно рассматривать как левое векторное пространство над полем N. Пусть $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_k \ldots$ последовательность конечномерных векторных подпространств (над N) пространства K такая, что $\dim_N V_n = n$. Ясно, что V_n можно рассматривать как формульные подгруппы аддитивной группы K. По лемме 14 $R(V_{n+1}) > R(V_n)$. Так как $R(K)$ конечно (теорема Р. 2), отсюда следует $K = V_m$ для некоторого натурального m. Мы доказали, что K — m-мерное пространство над N (обозначается $(K{:}N) = m$).

в) По построению $N \supseteq C$. Мы сейчас докажем, что $(N{:}\,C) \leqslant m$. Заметим сначала следующий факт: пусть $\mathfrak{N}$ — все линейные относительно N отображения векторного пространства K в K. Рассмотрим отображения $r_a\colon K \to K$, соответствующие элементам $a \in K$ по правилу $t_a(x) = xa$. Из $(K{:}\,N) = m$ следует, что $\mathfrak{N}$ есть m-мерное левое векторное пространство над K, точнее над $\{r_a |\ a \in K\}$. Умножение $r_a \cdot f$ $(f \in \mathfrak{N})$ понимается следующим образом: $r_a \cdot f(x) = f(x) \cdot a$.

Допустим теперь, что $(N{:}\,C) > m$; тогда существуют $b_1, \ldots, b_{m+1} \in N$ линейно независимые над C. Очевидно, отображения $l_b\colon K \to K$ по правилу $l_b(x) = bx$ лежат в $\mathfrak{N}$, если $b \in N$. Так как размерность $\mathfrak{N}$ меньше $m+1$, то $l_{b_1}, \ldots, l_{b_{m+1}}$ линейно зависимы над K, то есть существуют $a_1, \ldots, a_{m+1} \in K$ не все равные нулю, такие, что $r_{a_1} \cdot l_{b_1} + \ldots + r_{a_{m+1}} l_{b_{m+1}} = 0$. Последнее равенство означает, что

$$(*) \qquad b_1 x a_1 + \ldots + b_{m+1} x a_{m+1} = 0$$

при любом $x \in K$. Можно считать, что $a_1 = \mathbf{1}$ и набор $a_1, \ldots, a_{m+1}$ таков, что в тождестве $(*)$ минимальное число ненулевых слагаемых. По выбору b_i должен найтись a_i такой, что $a_i \notin C$. То есть $g a_i g^{-1} \neq a_i$ для некоторого $g \in K$. Имеют место следующие тождества: $b_1 x g + \ldots + b_i x g a_i + \ldots + b_{m+1} x g a_{m+1} = 0$, $b_1 x + \ldots + b_i x g a_i g^{-1} + \ldots b_{m+1} x g a_{m+1} g^{-1} = 0$. Комбинируя последнее тождество с тождеством $(*)$, где $a_1 = \mathbf{1}$ и $g a_i g^{-1} \neq a_i$ получаем более короткую запись линейной зависимости, что противоречит выбор $a_1, \ldots, a_{m+1}$. Тем самым доказано, что $(N{:}\,C) \leqslant m$, но это означает, что $N = C$, так как C бесконечно и, следовательно, алгебраически замкнуто.

г) В конечном счете мы доказали, что K есть тело конечной размерности над своим алгебраически замкнутым центром C. Если $x \in K$, то поле, порождённое $\{C, x\}$ является конечным расширением C, но так как C алгебраически замкнуто, $x \in C$ и $K = C$. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 6.1 можно переформулировать следующим образом: Слабо категоричное тело является полем. Эта формулировка включает теорему Веддербарна о конечных телах [2].

В заключение сформулируем несколько вопросов, касающихся слабо категоричных групп.

1. Существуют ли неабелевы связные слабо категоричные группы, неизоморфные алгебраическим группам над алгебраически замкнутым полем?

Абелевы группы отличные от алгебраических существуют, это можно легко извлечь из примера 2.

2. Существуют ли простые категоричные группы, отличные от алгебраических над алгебраически замкнутым полем?

Нас интересует также следующий вопрос:

3. Можно ли группу $G = H_p + H_q$ интерпретировать в $\aleph_1$-категоричной теории, т.е. сделать G слабо категоричной? Здесь H_p, H_q — бесконечные абелевы группы простых показателей p, q соответственно.

Этот вопрос, по существу, относится к чистой теории моделей и связан с вопросом.

4. Для любых ли двух $\aleph_1$-категоричных теорий T_1 и T_2 существует $\aleph_1$-категоричная теория T, в которой формульно интерпретируются T_1 и T_2?

Литература

[1] А. Борель, *Линейные алгебраические группы*, Москва 1972.
[2] Н. Джекобсон, *Строение колец*, 1961.
[3] М. А. Тайцлин, *Теория моделей*, Новосибирск 1970.
[4] Б. И. Зильбер, *О ранге формул $\aleph_1$-категоричных теорий. Вторая всесоюзная конференция по математической логике*. Тезисы, Москва 1972, стр. 18–19.
[5] — *О ранге трансцендентности формул $\aleph_1$-категоричных теорий*, Математические заметки 15 (2) (1974), стр. 321–329.
[6] — *Группы с категоричными теориями*, Четвертый всесоюзный симпозиум по теории групп, Новосибирск 1973, стр. 63–68.
[7] — *Кольца, теория которых $\aleph_1$-категорична*, Алгебра и логика 13 (2) (1974), стр. 168–187.
[8] С. А. Чихачёв, *$\aleph_1$-категоричные универсальные теории полугрупп*, Третья всесоюзная конференция по математической логике, Новосибирск 1974, стр. 223–224.
[9] J. T. Baldwin, *α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), pp. 37–51.
[10] — *Almost strongly minimal theories*, J. Symb. Logic 37 (1972), pp. 487–493.
[11] A. H. Lachlan and J. T. Baldwin, *On strongly minimal sets*, J. Symb. Logic 36 (1971), pp. 79–96.
[12] A. Macintyre, *On ω_1-categorical theories of abelian groups*, Fund. Math. 70 (1970), pp. 253–270.
[13] — *On ω_1-categorical theories of fields*, Fund. Math. 71 (1971), pp. 1–25.
[14] M. D. Morley, *Categoricity in power*, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), pp. 514–538.
[15] J. Reineke, *Minimale Gruppen*, preprint.
[16] G. E. Sacks, *Saturated model theory*, Math. Lect. Not. Ser. 1972.
[17] S. Shelah, *Stability, the f. c. p. and superstability*, Ann. Math. Logic 3 (1971), pp. 271–362.

Accepté par la Rédaction le 14. 4. 1975

Degree sets for graphs

by

S. F. Kapoor (Kalamazoo, Mich.), **Albert D. Polimeni** and **Curtiss E. Wall**

Abstract. For a graph G, the degree set $\mathfrak{D}_G$ of G is the set of degrees of the vertices of G. For a finite, nonempty set S of positive integers, it is shown that there exists a graph G such that $\mathfrak{D}_G = S$. Furthermore, the minimum order of such a graph G is determined. Degree sets are also investigated for trees, planar graphs, and outerplanar graphs.

1. Introduction. For a vertex v of a graph G, the *degree* of v in G, denoted $\deg v$, is the number of edges of G incident with v. We denote the *degree set* of G (i.e., the set of degrees of the vertices of G) by $\mathscr{D}_G$. For example, the graph H of Figure 1 has degree set $\mathscr{D}_H = \{2, 4, 5\}$.

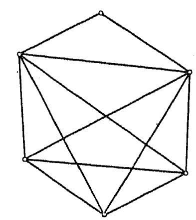

Fig. 1

Given a finite, nonempty set S of positive integers, we show that there exists a graph G such that $\mathscr{D}_G = S$ and determine the minimum order (number of vertices) of such a graph G. In addition to investigating degree sets for graphs, we discuss degree sets for planar graphs (including the subclasses of trees and outerplanar graphs).

2. Degree sets for graphs. Before proceeding to our first result, we present some definitions and establish some notation.

We denote the vertex set and edge set of a graph G by $V(G)$ and $E(G)$, respectively. The *complement* $\overline{G}$ of a graph G is that graph for which $V(\overline{G}) = V(G)$ and $uv \in E(\overline{G})$ if and only if $uv \notin E(G)$. The *union* $G_1 \cup G_2$ of disjoint graphs G_1