Экзистенциально замкнутые коммутативные полугруппы

М. А. Тайцлин (Алма-Ата)

Abstract. It is proved that the relation "elements a and b are regular and a is contained in the subgroup generated by b" is elementary in class K of existentially-closed commutative semigroups. This implies that K can not contain saturated structures and consequently is not pseudo-elementary and is not elementary. The periodic semigroup is constructed which is generic to finite forcing in class commutative semigroups. This means that forcing companions of theory of commutative semigroups to finite and to infinite forcings are different. In total there is the continuum of semigroups, any semigroup from which is contained in K and any two different semigroups from which are not elementary equivalent. The proof is based on earlier performed by author elaboration of defining relations for commutative semigroups.

А. Робинсон разработал в работах [1], [9], [10] систему понятий, которая была навеяна знаменитыми работами Р. Коэна и которую А. Робинсон назвал теоретико-модельным форсингом. Сам А. Робинсон заметил, что теоретико-модельный форсинг полезен для построения экзистенциально замкнутых систем в различных классах. Затем А. Макинтайр и другие авторы с помощью форсинга изучали экзистенциально замкнутые системы в некоторых классах групп, колец и полугрупп (см. [2]–[5], [7], [8], [11], [12]).

Настоящая статья посвящена изучению экзистенциально замкнутых систем в классе K коммутативных полугрупп. Через $K_э$ мы обозначаем класс всех экзистенциально замкнутых в K систем. Основные наши результаты: отношение „a и b — регулярные элементы и a принадлежит подгруппе, порожденной b" является элементарным в $K_э$; $K_э$ не содержит $\aleph_1$-насыщенных полугрупп и, значит, не является проективным и тем более не является аксиоматизируемым классом; имеется K-генерическая относительно конечного форсинга полугруппа, которая является периодической; форсинг-компаньоны теории K относительно конечного и бесконечного форсинга различны; имеется континуальное множество полугрупп, каждая из которых лежит в $K_э$ и каждые две различные из которых не являются элементарно эквивалентными.

Некоторые из этих результатов анонсированы в [12].

icm©

§ 1

Напомним некоторые известные определения и договоримся о терминологии.

„Полугруппа" далее означает „коммутативная полугруппа".

Скажем, что a делится на b в полугруппе A, если существует такой $c \in A$, что $a = c+b$. Элемент a полугруппы A называется *регулярным*, если a делится на $2a$ в A. Если каждый элемент полугруппы является регулярным, то эта полугруппа называется *регулярной*. Через A_{per} мы обозначаем подполугруппу полугруппы A, образованную всеми регулярными элементами полугруппы A.

На множестве элементов регулярной полугруппы G рассматривается отношение эквивалентности $\langle|\rangle$, считая для $a, b \in G$

$$a\langle|\rangle b \Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)(a = c+b \wedge b = d+a).$$

Классы эквивалентности по этому отношению являются подполугруппами полугруппы G. Эти подполугруппы являются даже группами относительно индуцированной из G операции. В частности, в каждом классе по $\langle|\rangle$ имеется идемпотент полугруппы G. Если α — идемпотент полугруппы G, то через G_α обозначается класс эквивалентности по $\langle|\rangle$, содержащий α.

Если a — элемент полугруппы A, α — идемпотент A, $a \in (A_{\mathrm{per}})_\alpha$, то подгруппу, порожденную a в группе $(A_{\mathrm{per}})_\alpha$, мы называем также подгруппой, порожденной a в A.

На множестве идемпотентов полугруппы A рассматривают отношение $>$ частичного порядка, полагая

$$x > y \Leftrightarrow x \neq y \wedge x+y = x.$$

Идемпотент α регулярной полугруппы G назовем *большим*, если G_α имеет элементы бесконечного порядка, но G_β не имеет элементов бесконечного порядка для $\beta > \alpha$. Через $Б(G)$ мы обозначаем множество всех больших идемпотентов регулярной полугруппы G, а через $\Lambda(G)$ — множество всех идемпотентов G.

Как обычно, под рангом абелевой группы мы понимаем число элементов в максимальной линейно независимой системе элементов этой группы. Например, ранг каждой периодической абелевой группы равен нулю.

Полугруппа A называется *периодической*, если каждый элемент порождает в ней конечную подполугруппу. С каждым элементом c полугруппы A свяжем полугруппу A^c, являющуюся фактор-полугруппой полугруппы A по отношению конгруэнтности E_c на A, где для любых x, y из A

$$E_c(x, y) \Leftrightarrow x+c = y+c \quad \text{в } A.$$

Скажем, что полугруппа A имеет конечный тип над своей регулярной подполугруппой D, если

1) полугруппа A^c является периодической для каждого такого $c \in A$, на который не делится ни один элемент из $Б(D)$;

2) для каждого $\alpha \in Б(D)$ ранги групп D_α и $(A_{\mathrm{per}})_\alpha$ равны. Ясно, что если A имеет конечный тип над регулярной D, то $Б(A_{\mathrm{per}}) = Б(D)$.

Пусть P — некоторое множество целых положительных чисел. В наших рассмотрениях важную роль будут играть регулярные полугруппы A^P, которые мы сейчас определим.

Множество $\Lambda(A^P)$ идемпотентов полугруппы A^P есть $\{\alpha_n | \, n \in P\} \cup \{\alpha\}$. Полагаем $\gamma \cdot \beta = \alpha$ для любых $\gamma \neq \beta$ из $\Lambda(A^P)$.

Для $n \in P$ в качестве $(A^P)_{\alpha_n}$ возьмем прямую сумму n бесконечных циклических групп, а в качестве $(A^P)_\alpha$ возьмем одноэлементную группу.

Будем считать, что A^P задается в классе коммутативных полугрупп множеством

(1) $$\{\alpha;\ d_{n,i};\ d'_{n,i};\ \alpha_n | \ n \in P;\ i = 1, \ldots, n\}$$

образующих и множеством определяющих соотношений, включающем со отношения

(2′) $$d_{n,i}+d'_{n,i} = \alpha_n;\ d_{n,i}+\alpha_n = d_{n,i};\ d'_{n,i}+\alpha_n = d'_{n,i};\ \alpha+d_{n,i} = \alpha;\ \alpha+d'_{n,i} = \alpha;$$

(2″) $$\alpha+\alpha = \alpha;\ \alpha_{m_1}+\alpha_{m_2} = \alpha$$

для всех таких n, i, m_1, m_2, что $n, m_1, m_2 \in P$; $m_1 \neq m_2$; $i = 1, \ldots, n$.

„Формула" означает „формула исчисления предикатов первого порядка с равенством". $\exists$*-формулой* мы называем предваренную формулу сигнатуры $\langle + \rangle$, не содержащую кванторов всеобщности. С каждым элементом полугруппы A мы сопоставляем символ выделенного элемента. При этом мы не различаем сам элемент и соответствующий ему символ. Как обычно, запись $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ означает, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ не содержит переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_t$. Если при этом $a_1, \ldots, a_t$ — элементы полугруппы A, то $\Phi(a_1, \ldots, a_t)$ — это истиностное значение $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$, когда x_1 приписано значение $a_1, \ldots, x_t$ приписано значение a_t.

Полугруппа A называется *экзистенциально замкнутой в классе K коммутативных полугрупп*, если для каждой $\exists$-формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$, каждых $a_1, \ldots, a_t$ из A и каждой полугруппы B, расширяющей A, из истинности $\Phi(a_1, \ldots, a_t)$ в B следует истинность $\Phi(a_1, \ldots, a_t)$ в A.

В § 3 мы предполагаем также, что читатель знаком с § 1 работы [14] и с работой [1]. Понятия и обозначения из этих работ мы используем в § 3 без пояснений.

§ 2

Предложение 1. *Существует такая формула $\Phi(x, y)$ сигнатуры $\langle + \rangle$, что $\Phi(a, b)$ для $a, b \in A$ тогда и только тогда истинно в полугруппе A, экзистенциально замкнутой в классе коммутативных полугрупп, когда a и b — регулярные элементы A и a принадлежит подгруппе, порожденной b.*

Доказательство. Пусть формула $\Phi_1(x, y)$ говорит о том, что x и y — регулярные элементы и $x\langle|\rangle y$. Точнее, пусть $\Phi_1(x, y)$ есть

$$(\exists u)(x = x+x+u) \wedge (\exists u)(y = y+y+u) \wedge (\exists u)(x = y+u) \wedge (\exists u)(y = x+u).$$

Пусть формула $\Phi_2(x, y)$ говорит о том, что x является нулем для каждого такого элемента, для которого нулем является каждый элемент подгруппы, порожденной y. Точнее, пусть $\Phi_2(x, y)$ есть

$$(\forall u)(\forall v)\big((v+y+v = v \wedge v+y+y = y \wedge u+v = u \wedge u+y = u) \to u+x = u\big).$$

В качестве $\Phi(x, y)$ возьмем $\Phi_1(x, y) \wedge \Phi_2(x, y)$.

Пусть истинно $\Phi(a, b)$ и $a, b \in A$. Тогда существует такой идемпотент α полугруппы A_{per}, что a и b лежат в $(A_{\mathrm{per}})_\alpha$. Если a не лежит в подгруппе H, порожденной b в $(A_{\mathrm{per}})_\alpha$, то обозначим через D фактор-группу $(A_{\mathrm{per}})_\alpha/H$ и через h — гомоморфизм $(A_{\mathrm{per}})_\alpha$ на D, переводящий $d \in (A_{\mathrm{per}})_\alpha$ в $d+H$. Будем считать, что $D \cap A$ пусто. Пусть еще $\gamma \notin D \cup A$. На множестве $E = A \cup D \cup \{\gamma\}$ определим операцию $+$ так, чтобы E вместе с этой операцией стало полугруппой, расширяющей полугруппы A и D. Сразу договоримся, что $\gamma+d = d+\gamma = \gamma$ для любого $d \in E$. Если $c_1 \in A$, $c_2 \in D$ и α не делится в A на c_1 то $c_1+c_2 = c_2+c_1 = \gamma$. Если же $c_1 \in A$, $c_2 \in D$ и α делится в A на c_1, то $c_1+c_2 = c_2+c_1 = h(\alpha+_A c_1)+_D c_2$, где $+_A$ — операция в A, а $+_D$ — операция в D. В полученной полугруппе E

$$h(\alpha)+b = h(\alpha), \quad h(\alpha)+b' = h(\alpha),$$

где $\alpha = b+_A b'$, $b'+_A \alpha = b'$, но $h(\alpha)+a \neq h(\alpha)$. Значит, в E истинна формула

$$(\exists u)(\exists v)(v+b+v = v \wedge v+b+b = b \wedge u+v = u \wedge u+b = u \wedge u+a \neq u).$$

Из экзистенциальной замкнутости A следует, что эта формула истинна в A. Значит, в A истинно $\neg\Phi_2(a, b)$, а это противоречит выбору a и b.

Следствие. *Существует такая формула $\Psi(x)$ сигнатуры $\langle + \rangle$, что $\Psi(a)$ для $a \in A$ тогда и только тогда истинна в полугруппе A, экзистенциально замкнутой в классе коммутативных полугрупп, когда a — регулярный элемент, порождающий бесконечную подгруппу.*

Предложение 2. *Никакая $\aleph_1$-насыщенная полугруппа не лежит в классе $K_э$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $A \in K_э$ и A является $\aleph_1$ — насыщенной.

Для каждого целого $n \geqslant 2$ через $\Theta_n(x, y)$ обозначим формулу

$$x+x \neq x \wedge \Big(\bigwedge_{0<i<n} x \neq iy\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{0<i<n} x+iy+x \neq x\Big).$$

Для каждого целого $n \geqslant 2$ формула $(\exists x)(\exists y)\big(\Theta_n(x, y) \wedge \Phi(x, y)\big)$ истинна в A. Действительно, формула

$$(\exists x)\Big(\big(\bigwedge_{1\leqslant i<j\leqslant 3n} ix \neq jx\big) \wedge 3nx+x = x\Big)$$

истинна в прямом произведении A на циклическую группу порядка $3n$. Из экзистенциальной замкнутости A следует, что эта формула истинна и в A. Поэтому в A есть подполугруппа, являющаяся циклической группой порядка $3n$. Ясно, что если a — образующий этой группы, то $\Theta_n(2na, a) \wedge \Phi(2na, a)$ истинно в A.

Значит, совокупность формул $\{\Phi(x, y), \Theta_n(x, y) | \ n = 2, 3, \ldots\}$ конечно выполнима в A.

Но эта совокупность не может выполняться в A. Действительно, если $\Phi(a, b)$ и $\Theta_n(a, b)$ истинны в A для всех целых $n>0$, то из $\Phi(a, b)$ следует, что a принадлежит подгруппе, порожденной b, а из $\{\Theta_n(a, b) | \ n = 2, 3, \ldots\}$ следует, что a не принадлежит подгруппе, порожденной b.

Следствие. *Класс $K_э$ не является проективным и, тем более, не является аксиоматизируемым.*

§ 3

Зафиксируем некоторое множество P целых положительных чисел и обозначим A^P через D. Для конечного $P' \subseteq P$ через $D(P')$ обозначим подполугруппу полугруппы D, порожденную множеством

(3) $$\{\alpha;\ d_{n,i};\ d'_{n,i} |\ n \in P';\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Через (2) будем обозначать объединение соотношений (2′) и (2″).

Предложение 3. *Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ — $\exists$-формула; B — полугруппа, являющаяся расширением D; $a_1, \ldots, a_t \in D$; $\Phi(a_1, \ldots, a_t)$ истинно в B. Тогда существует такая полугруппа C, которая имеет конечный тип над D, являясь расширением D, и в которой $\Phi(a_1, \ldots, a_t)$ тоже истинно.*

Доказательство. $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ имеет вид $(\exists \bar{y})\Psi(\bar{x}, \bar{y})$, где $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$, можно считать, является конъюнкцией равенств и неравенств. Пусть $\Psi(\bar{a}, \bar{b})$ истинно в B, где $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_s\rangle$. Выберем такое конечное $P' \subseteq P$, что $a_1, \ldots, a_t$, лежат в $D(P')$. Рассмотрим полугруппу B', заданную образующими

(4) $$\{\alpha;\ d_{n,i};\ d'_{n,i};\ \alpha_n;\ b_1, \ldots, b_s |\ n \in P;\ i = 1, \ldots, n\}$$

и определяющими соотношениями, включающими равенства из $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$, в которые вместо $x_1, \ldots, x_t$ подставлены, соответственно, $a_1, \ldots, a_t$ в виде линейных комбинаций с целыми положительными коэффициентами некоторых элементов множества (3), а вместо $y_1, \ldots, y_s$ подставлены $b_1, \ldots, b_s$, и все соотношения (2), задающие D. Ясно, что имеется гомоморфизм B' в B, оставляющий D и $b_1, \ldots, b_s$ на месте. Поэтому $\Psi(\bar{a}, \bar{b})$ истинно в B'. Будем считать, что B совпадает с B'.

Пусть Y — это объединение множеств (3) и $\{b_1, \ldots, b_s\}$. Рассмотрим подполугруппу B'' полугруппы B, порожденную Y. Пусть в $\Psi(\bar{a}, \bar{b})$ встречаются в виде конъюнктивных членов неравенства:

$$f_1 \neq f'_1, \ldots, f_r \neq f'_r .$$

Правые и левые части этих неравенств — элементы B''.

Не ограничивая общности, можно считать, что B'' — полугруппа с нулем. Далее используем терминологию и обозначения, а также результаты из § 1 работы [14].

Пусть T — множество всех координатных пар B'' для Y. Тройку $\langle j, X, c\rangle$ назовем допустимой, если $j \in \{1, \ldots, r\}$, $(X, c) \in T$ и при подходящих $u_j, u'_j \in L(X)$ в A

$$(5) \qquad f_j = c+h(X, c)+u_j , \quad f'_j = c+h(X, c)+u'_j .$$

Для допустимой тройки $\langle j, X, c\rangle$ выберем такие u_j, u'_j, для которых выполняется (5), и рассмотрим подполугруппу $B_j(X, c)$, порожденную в $(B'')^{c+h(X,c)}$ образом X при естественном отображении B'' на $(B'')^{c+h(X,c)}$. Эта полугруппа является полугруппой с сокращением. Через $B'_j(X, c)$ обозначим наименьшую абелеву группу, содержащую $B_j(X, c)$. Группа $B'_j(X, c)$ разлагается в прямую сумму конечной группы и q бесконечных циклических групп, порожденных $d_1, \ldots, d_q$. Значения v_j и v'_j элементов u_j и u'_j в группе $B'_j(X, c)$ различны. Если вместо $B'_j(X, c)$ взять прямую сумму той-же конечной группы и q циклических групп порядка p, порожденных $d'_1, \ldots, d'_q$, то можно так подобрать целое положительное число p, чтобы образы v_j и v'_j были различны при таком гомоморфизме $B'_j(X, c)$ в новую группу, который оставляет на месте элементы конечной группы, а d_l переводит в d'_l для $l = 1, \ldots, q$. Через $p(j, X, c)$ обозначим одно из таких чисел p, через $B''_j(X, c)$ — новую группу, построенную для $p(j, X, c)$, а описанный выше гомоморфизм $B'_j(X, c)$ на $B''_j(X, c)$ назовем специальным. Через $N(j, X, c)$ обозначим целое положительное число, которое делится на порядки элементов конечного порядка группы $B'_j(X, c)$ и на $p(j, X, c)$. Через N обозначим положительное целое число, которое делится на все числа $N(j, X, c)$ для всех допустимых троек $\langle j, X, c\rangle$.

Нам теперь понадобится лемма, которая является перефразировкой леммы 18 из [15].

Лемма 4. *Пусть A — полугруппа, порожденная конечным множеством X. Существует такое целое положительное число $\Gamma(A, X)$, что для любого $u \in X$, любого $x \in L(X)$, любого целого $n \geqslant 0$ и любой $(Z, c) \in T(A, X)$, если существует такой $v \in L(Z)$, что $x+\Gamma(A, X)u+nu = c+h(Z, c)+v$ в A, то $u \in Z$ и существует такой $v_1 \in L(Z)$, что $x+\Gamma(A, X)u = c+h(Z, c)+v_1$ в A.*

Доказательство леммы. Используем индукцию по числу элементов X. Пусть $h = h(X, 0)$, где 0 — нуль полугруппы $L(X)$.

Пусть Γ_1 — наибольший коэффициент у элементов из $\mathfrak{A}_1(0, X, A) \cup \mathfrak{M}_1(h, W, A)$ когда W пробегает все отличные от X подмножества X. Точнее,

$$\Gamma_1 = \max\{n|\ (\exists W)(\exists e)(\exists e_1)(\exists a)(W \subset X \wedge e \in \mathfrak{A}_1(0, X, A) \cup \mathfrak{M}_1(h, W, A) \wedge \wedge a \in X \wedge e_1 \in L(X-\{a\}) \wedge e = na+e_1)\} .$$

Для $W \subset X$ и $b_1, b_2 \in L(X-W)$ через $\mathfrak{Q}(b_1, b_2, W, A)$ обозначим множество тех элементов w из $L(W)$, для которых существует такой w' из $L(W)$, что $b_1+w = b_2+w'$. Через $\mathfrak{Q}_1(b_1, b_2, W, A)$ обозначим множество минимальных элементов из $\mathfrak{Q}(b_1, b_2, W, A)$. По теореме Диксона [6, стр. 163–164], множество $\mathfrak{Q}_1(b_1, b_2, W, A)$ конечно. Пусть Γ_2 — наибольший коэффициент у элементов из $\mathfrak{Q}_1(b_1, b_2, W, A)$, когда $W \subset X$ и $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_1(h, W, A)$. Пусть Γ_3 — наибольшее из чисел $\Gamma(L(W)/E_b, WE_b)$, когда $W \subset X$, а $b \in \mathfrak{M}_1(h, W, A)$. Тогда в качестве $\Gamma(A, X)$ можно взять $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+1$.

Действительно, пусть $u \in X$, $x \in L(X)$, $(Z, c) \in T(A, X)$, $v \in L(Z)$, $n \geqslant 0$ — целое число и $x+\Gamma(A, X)u+nu = c+h(Z, c)+v$ в A. Так как $(Z, c) \in T(A, X)$, то либо существует такое $W \subset X$, что $c = c_1+c_2$, $Z \subseteq W$, $c_1 \in \mathfrak{M}_1(h, W, A)$, $c_2 \in L(W-Z)$, либо $c = 0$ и $Z = X$.

Рассмотрим первый случай. Из определения $\Gamma(A, X)$ и [14, лемма 1] следует, что $u \in W$. Пусть $x = x_1+x_2$ в $L(X)$, где $x_1 \in L(X-W)$, $x_2 \in L(W)$. Тогда, опять в силу [14, лемма 1], $x_1 \in \mathfrak{M}_1(h, W, A)$. Ясно, что $x_2+\Gamma(A, X)u+ +nu \in \mathfrak{Q}(x_1, c_1, W, A)$. Поэтому существует такой $e \in \mathfrak{Q}_1(x_1, c_1, W, A)$, что e меньше $x_2+\Gamma(A, X)u+nu$. Из определения Γ_2 следует, что e меньше и $x_2+\Gamma_2 u$. Пусть $x_2+\Gamma_2 u = e+e_1$ в $L(W)$, где $e_1 \in L(W)$. Тогда для подходящего $e_2 \in L(W)$ в A имеем равенство $x_1+x_2+\Gamma(A, X)u = c_1+e_2+\Gamma_3 u$. Для завершения доказательства остается применить лемму к образу $e_2+ +\Gamma_3 u+nu$ в полугруппе $L(W)/E_{c_1}$. При этом используется индукционное предположение.

Во втором случае $x+\Gamma(A, X)u+nu = h+v$ в A, где $v \in L(X)$. Поэтому найдется такой $e \in \mathfrak{M}_1(0, X, A)$, что $x+\Gamma(A, X)u+nu = e+e_1$ в $L(X)$ для подходящего $e_1 \in L(X)$. Из определения $\Gamma(A, X)$ следует, что $x+\Gamma(A, X)u = = e+e_2$ в $L(X)$ для подходящего $e_2 \in L(X)$. Поэтому $x+\Gamma(A, X)u = h+e_3$ в A для подходящего $e_3 \in L(X)$. Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 3. Для $n \in P'$ группа $((B'')_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$ разлагается в прямую сумму группы B^1_n, являющейся изолятором D_{α_n} в $((B'')_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$, и группы B^2_n. Напомним, что B^1_n состоит из всех таких $a \in ((B'')_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$, для которых найдется такое целое положительное число m, что $ma \in D_{\alpha_n}$. Группа B^2_n не имеет кручения и, значит, является либо одноэлементной, либо прямой суммой $q(n)$ бесконечных циклических групп, порожденных $d_1(n), \ldots, d_{q(n)}(n)$. Для каждого такого $n \in P'$, что группа B^2_n не является одноэлементной, и каждого $j \in \{1, \ldots, q(n)\}$ выберем представление $d_j(n)$ в виде линейной комбинации с целыми положительными коэффициентами некоторых элементов множества $\{d_{n,i};\, d'_{n,i};\, b_1;\, \ldots;\, b_s |\ i = 1, \ldots, n\}$ и рассмотрим соотношение

(6) $$(N+1)\, d_j(n) = d_j(n)\,,$$

где под $d_j(n)$ понимается выбранная линейная комбинация.

Рассмотрим, наконец, полугруппу C, заданную в классе коммутативных полугрупп множеством образующих (4) и множеством определяющих соотношений, включающим все соотношения, задающие B, все соотношения (6), а также соотношения

(7) $$b+(\Gamma+N)u = b+\Gamma u\,,$$

в которых $\Gamma = \Gamma(B'', Y)$, для всех таких линейных комбинаций b с целыми положительными коэффициентами некоторых элементов множества (4), что α_n не делится на b в B ни при каком $n \in P$, и всех элементов u множества (4).

Осталось проверить что C является нужной полугруппой. Надо только понять, что $f_j \neq f'_j$ в C для $j = 1, \ldots, r$. Пусть, напротив, для такого j имеем в C равенство $f_j = f'_j$. Тогда существует конечная последовательность

(8) $$f_j = f_j^0, f_j^1, \ldots, f_j^n = f'_j\,,$$

каждый член которой получается из предыдущего применением одного из определяющих соотношений C.

Из вида этих соотношений легко следует, что можно ограничиться случаем, когда все члены последовательности (8) лежат в $L(Y)$.

Действительно, пусть, напротив, $f_j^l \in L(Y)$, а $f_j^{l+1} \notin L(Y)$. Тогда f_j^{l+1} получается из f_j^l применением одного из соотношений (2″). Значит, f_j^l делится на α в B. Можно считать, что $f_j^0, \ldots, f_j^l$ все лежат в $L(Y)$. Если $(X, c) \in T$, а $w \in B''$ в B'' представим в виде

(9) $$c+h(X, c)+v_1\,,$$

где $v_1 \in L(X)$, то будем говорить, что (X, c) является координатной парой для w. Из леммы 4 следует, что все $f_j^0, \ldots, f_j^l$ имеют одни и те же координатные пары. Пусть (X, c) — координатная пара для f_j^l.

Покажем, что $\alpha \in X$.

Достаточно понять, что если конечное Z порождает полугруппу A, $\alpha \in Z$, $W \subset Z$, $\alpha+\alpha = \alpha$ в A, $h \in L(Z)$, $u \in \mathfrak{M}(h, W, A)$ и u делится в A на α, то $\alpha \in W$.

Действительно, если $\alpha \in Z-W$, то $u+\alpha \in \mathfrak{N}(h, W, A)$, а это противоречит выбору u.

Значит, f_j^0 делится на α в B. Аналогично показывается, что f'_j делится на α в B. Теперь вместо (8) рассмотрим последовательность

(8′) $$\alpha+f_j^0, \alpha+f_j^1, \ldots, \alpha+f_j^n.$$

Пусть Y' — такое конечное подмножество множества (4), что все члены последовательности (8′) лежат в $L(Y')$ и $Y' \supset Y$. Пусть для $l = 1, \ldots, n$

$$\alpha+f_j^l = f_{j,1}^l+f_{j,2}^l,$$

где $f_{j,1}^l \in L(Y)$, $f_{j,2}^l \in L(Y'-Y)$. Ясно, что $f_{j,1}^l = f_j^0+\alpha$ и $f_{j,1}^n = f_j^n+\alpha$. Поэтому $f_{j,1}^0 = f_j$ в B и $f_{j,1}^n = f'_j$ в B.

Последовательность

(8″) $$f_{j,1}^0, f_{j,1}^1, \ldots, f_{j,1}^n$$

обладает тем свойством, что каждый член её либо совпадает с предыдущим, либо получается из предыдущего применением одного из определяющих соотношений C или соотношения $\alpha+\alpha = \alpha+\alpha_m$.

Действительно, если f_j^{l+1} получается из f_j^l применением одного из соотношений, задающих B, или одного из соотношений (6), это очевидно. А если применяется одно из соотношений (7), то это очевидно, когда u не принадлежит Y, а в случае, когда $u \in Y$, $f_{j,1}^{l+1}$ получается из $f_{j,1}^l$ применением соотношения

$$\alpha+(\Gamma+N)u = \alpha+\Gamma u\,.$$

Итак, будем предполагать, что все члены последовательности (8) лежат в $L(Y)$. Из леммы следует, что все члены последовательности (8) имеют одни и те же координатные пары. Пусть f_j имеет вид (9). Простые вычисления показывают, что $f'_j = c+h(X, c)+v_2$, $c+h(X, c)+v_1+Nv_3 = c+h(X, c)+ +v_2+Nv_4$ в B'', где v_2, v_3, v_4 — подходящие элементы из $L(X)$. При специальном гомоморфизме $B'_j(X, c)$ на $B''_j(X, c)$ значения Nv_3 и Nv_4 переходят в нуль. Поэтому образы значений v_1 и v_2 равны при этом гомоморфизме, а это противоречит выбору $B''_j(X, c)$. Предложение 3 доказано.

Далее мы предполагаем, что читатель знаком с работой [1]. Рассмотрим класс $K(P)$ систем сигнатуры

$$\Omega(P) = \{+;\, d_{n,i};\, d'_{n,i};\, \alpha_n;\, \alpha |\ n \in P;\ i = 1, \ldots, n\}\,,$$

состоящий из всех систем B этой сигнатуры, в которых истинны формулы $\alpha \neq \alpha_n$, $\alpha_{m_1} \neq \alpha_{m_2}$ и (2) для всех таких $n, m_1, m_2 \in P$, что $m_1 \neq m_2$, и всех $i = 1, \ldots, n$, обеднения которых до систем сигнатуры $\langle + \rangle$ являются коммутативными полугруппами и в которых $\{d_{n,i}^B;\, d'^B_{n,i};\, \alpha_n^B |\ i = 1, \ldots, n\}$ $(n \in P)$ порождает подполугруппу, изоморфную $(A^P)_{\alpha_n}$. Легко понять, что этот класс $K(P)$ является универсально аксиоматизируемым. Пусть $c_0, \ldots, c_n, \ldots$ — это форсинговые константы. Занумеруем натуральными числами все замкнутые формулы сигнатуры $\Omega'(P) = \langle \Omega(P), c_i |\ i = 0, 1, \ldots \rangle$ и через Φ_i будем обозначать формулу номера i.

Построим возрастающую последовательность условий $p_0, p_1, \ldots$ относительно класса $K(P)$.

Пусть p_0 — пустое условие. Если условие p_i уже построено и p_i форсирует относительно $K(P)$ формулу $\neg\Phi_i$, то пусть $p' = p_i$. В противном случае пусть условие p' расширяет p_i и форсирует Φ_i. Используя предложение 3, найдем такую систему $C = C_i$ сигнатуры $\Omega'(P)$, в которой истинны все формулы из p', ограничение которой до системы сигнатуры $\Omega(P)$ лежит в $K(P)$, а ограничение до системы сигнатуры $\langle + \rangle$ является полугруппой конечного типа над A^P. Можно считать, что C как полугруппа порождается множеством $Z^C = \{u^C |\ u \in Z\}$, где Z содержит все c_j для натуральных j, а также α, $d_{n,l}$, $d'_{n,l}$, α_n для $n \in P$; $l = 1, \ldots, n$. Пусть

$$Z_{i+1} = \{c_j;\ \alpha;\ d_{n,l};\ d'_{n,l} |\ n \in P;\ n \leqslant i+1;\ l = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, i+1\},$$

а U_{i+1} — множество всевозможных линейных комбинаций некоторых элементов Z_{i+1} с целыми положительными коэффициентами, сумма коэффициентов которых не превосходит $i+1$.

Пусть $u \in U_{i+1}, n \in P$ и α_n делится на значение u^C комбинации u в C. Тогда существует такая линейная комбинация v некоторых элементов Z с целыми положительными коэффициентами, что в C

$$\alpha_n = u^C + v^C. \tag{10}$$

В этом случае мы выбираем одно из v, для которых выполняется (10) при подходящем $n \in P$, и включаем в p_{i+1} формулу

$$\alpha_n = u + v. \tag{11}$$

Если же $u \in U_{i+1}$ и α_n не делится в C на u^C ни при каком $n \in P$, то в C выполняются равенства

$$u^C + (\Gamma(w) + N(w))w^C = u^C + \Gamma(w)w^C$$

для подходящих положительных целых чисел $\Gamma(w), N(w)$ и всех $w \in Z$. Для такого u мы включаем в p_{i+1} формулы

$$u + (\Gamma(w) + N(w))w = u + \Gamma(w)w \tag{12}$$

для всех $w \in Z_{i+1}$.

Если $n \in P$, u^C лежит в $(C_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$, $u \in U_{i+1}$, то $Mu^C \in (A^P)_{\alpha_n}$ для подходящего целого положительного M. Значит, либо $Mu^C = \alpha_n$ в C, либо

$$Mu^C = \sum_{l \in I_+} M(l)d_{n,l} + \sum_{l \in I_-} M(l)d'_{n,l}.$$

в C для подходящих целых положительных $M(l)$ $(l = 1, \ldots, n)$, где $I_+ \cap I_-$ пусто, а $I_+ \cup I_- \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Соответственно, для такого u мы включаем в P_{i+1} одну из формул

$$Mu = \alpha_n, \quad Mu = \sum_{l \in I_+} M(l)d_{n,l} + \sum_{l \in I_-} M(l)d'_{n,l}. \tag{13}$$

Наконец, если u^C делится в C на α_n, где $u \in U_{i+1}$, $n \in P$, $n \leqslant i+1$, мы включаем в p_{i+1} формулу

$$u + \alpha_n = u, \tag{14}$$

а если u^C не делится в C на α_n, где $u \in U_{i+1}$, $n \in P$, $n \leqslant i+1$, то мы включаем в p_{i+1} формулу

$$u + \alpha_n \neq u. \tag{15}$$

Через p_{i+1} мы обозначаем объединение p' и тех формул, которые мы включили в p_{i+1}. Ясно, что p_{i+1} является условием. Так мы построим p_i для всех натуральных i. Объединение $p = \bigcup_{i=1}^{\infty} p_i$ выполняется в некоторой системе H из $K(P)$. Обозначим через $G(P)$ подсистему системы H, порожденную Z^H. Ясно, что $G(P)$ является $K(P)$-генерической системой. Значит, ограничение $E(P)$ системы $G(P)$ до системы сигнатуры $\langle + \rangle$ является полугруппой, экзистенциально замкнутой в классе коммутативных полугрупп.

Предложение 5. *Полугруппа $E(P)$ имеет конечный тип над A^P.*

Доказательство. Пусть $z \in E(P), u \in U_{i+1}$ и $z = u^{E(P)}$ в $E(P)$. Пусть α_n не делится в $E(P)$ на z ни для какого $n \in P$. Тогда ни в одно условие p_j не входит ни одна формула (11). Поэтому в p_j для $j \geqslant i+1$ входят формулы вида (12) для $w \in Z_j$. Значит, в p входят формулы вида (12) для всех $w \in Z$. Поэтому каждый элемент $(E(P))^Z$ порождает конечную подполугруппу. Пусть $z \in (E(P)_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$, $n \in P$. Тогда формула (15) не входит в p_{i+n+1}. Поэтому в p_{i+n+1} входит формула (14). Значит, в C_{n+i} элемент $u^{C_{n+i}}$ делится на α_n. Если α_m не делится в C_j на u^{C_j} при всех достаточно больших j и всех $m \in P$, то из p_j при достаточно большом j в теории $K(P)$ следует формула $u + N_1 u = u$ для подходящего положительного целого N_1. Если же существуют такие $m \in P$ и $j \geqslant n+i+1$, что в C_j элемент α_m делится на u^{C_j}, то $m = n$. В этом случае в p_{j+1} входит одна из формул (13). Во всех случаях z лежит в изоляторе $(A^P)_{\alpha_n}$. Это показывает, что ранги групп $((E(P))_{\mathrm{per}})_{\alpha_n}$ и $(A^P)_{\alpha_n}$ равны.

Следствие. *При пустом P полугруппа $E(P)$ является периодической и K-генерической относительно конечного форсинга.*

Предложение 6. *Существует континуальное множество полугрупп, экзистенциально замкнутых в классе коммутативных полугрупп, каждые две различные полугруппы из которого не являются элементарно эквивалентными.*

Доказательство. Надо только понять, что полугруппы $E(P_1)$ и $E(P_2)$ не являются элементарно эквивалентными при разных множествах P_1 и P_2 натуральных чисел.

Пусть $\Sigma_0(x)$ есть

$$x + x = x \wedge (\exists y)(\Phi_1(y, x) \wedge \Psi(y)) \wedge \\ \wedge (\forall z)\big((z + z = z \wedge (\exists u)(\Phi_1(u, z) \wedge \Psi(u)) \wedge x + z = z\big) \to x = z\big).$$

$\Sigma_0(\alpha)$ тогда и только тогда истинно в полугруппе $B \in K_э$, когда $\alpha \in \text{Б}(B_{\mathrm{per}})$.

Пусть $\Sigma_n(x)$ есть

$$\Sigma_0(x)\wedge(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\Psi(x_i)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}\Phi_1(x_i,x)\wedge(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\Phi(y_i,x_i)\wedge$$

$$\wedge\, y_1+\ldots+y_n+y_1+\ldots+y_n=y_1+\ldots+y_n\Big)\to\bigwedge_{i=1}^{n}y_i+y_i=y_i\Big)\Big)$$

для целого $n>0$. Тогда формула Σ_n', равная $(\exists x)\big(\Sigma_n(x)\wedge\neg\Sigma_{n+1}(x)\big)$, тогда и только тогда истинна в полугруппе B из $K_э$, когда в $Б(B_{\mathrm{reg}})$ имеется такой идемпотент α, что группа $(B_{\mathrm{reg}})_\alpha$ имеет ранг n. Если $n\in P_1$ и $n\notin P_2$, то Σ_n' истинна в $E(P_1)$ и ложна в $E(P_2)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Форсинг-компаньон теории K относительно конечного форсинга отличается от форсинг-компаньона теории K относительно бесконечного форсинга.*

Доказательство. Как известно, форсинг-компаньон теории K относительно конечного или бесконечного форсинга — это теория генерических моделей для K относительно того или другого форсинга. Так как любые две полугруппы из K изоморфно вкладываются в некоторую полугруппу из K, то известно, что оба форсинг-компаньона теории K являются полными теориями. Поэтому форсинг-компаньон теории K относительно конечного форсинга — это теория полугруппы $E(P)$ при пустом P. При пустом P полугруппа $E(P)$ является периодической и в ней, значит, истинна формула

$$\neg(\exists x)\Psi(x). \tag{16}$$

Итак, формула (16) принадлежит форсинг-компаньону теории K относительно конечного форсинга. Ясно, однако, что формула (16) не принадлежит форсинг-компаньону теории K относительно бесконечного форсинга, так как любая полугруппа A вкладывается в K-генерическую полугруппу $B(A)$ относительно бесконечного форсинга и поэтому полугруппа $(B(A))_{\mathrm{reg}}$ не может быть периодической.

Литература

[1] J. Barwise and A. Robinson, *Completing theories by forcing*, Ann. Math. Logic 2 (1970), стр. 119–142.

[2] О. В. Белеградек, *Об алгебраически замкнутых группах*, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск 1974, стр. 12–14.

[3] — *Об алгебраически замкнутых группах*, Алгебра и логика 13 (3) (1974), стр. 239–255.

[4] В. Я. Беляев, *Элементарные типы алгебраически замкнутых полугрупп*, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск 1974, стр. 18–19.

[5] G. Cherlin, *Algebraically closed commutative rings*, J. Symb. Logic 38 (1973), стр. 493–499.

[6] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, том 2 (перевод с англ.), Москва 1972.

[7] A. Macintyre, *On algebraically closed groups*, Ann. of Math. 96 (1972), стр. 53–97.

[8] — *On algebraically closed division rings*, preprint.

[9] A. Robinson, *Infinite forcing in model theory*, Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, Amsterdam 1971, стр. 317–340.

[10] — *Forcing in model theory*, Proceedings of the 1969 Colloquium on Model Theory in Rome.

[11] М. А. Тайцлин, *Экзистенциально замкнутые коммутативные кольца*, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск 1974, стр. 213–215.

[12] — *∃-замкнутые коммутативные полугруппы*, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Тезисы докладов, Новосибирск 1974, стр. 211–212.

[13] — *Экзистенциально замкнутые регулярные коммутативные полугруппы*, Алгебра и логика 12 (6) (1973), стр. 689–703.

[14] — *О проблеме изоморфизма для коммутативных полугрупп*, Математический сбор. 93 (1) (1974), стр. 103–128.

[15] — *Эквивалентность автоматов относительно коммутативной полугруппы*, Алгебра и логика 8 (5) (1969), стр. 553–600.

Accepté par la Rédaction le 4. 2. 1975