Les fonctions qui ont la propriété (K) et la mesurabilité des fonctions de deux variables

par

Zbigniew Grande (Gdańsk)

Résumé. Dans les travaux [3] et [2] j'ai introduit les définitions suivantes:

Définition (Df. 2). La fonction $g\colon R\to R$ (R étant l'espace des nombres réels) a la *propriété* (K), si pour chaque ensemble A mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive, la fonction g est ponctuellement discontinue sur la fermeture de l'ensemble des points de densité de l'ensemble A.

Définition (Df. 1). La fonction $g\colon R\to R$, mesurable au sens de Lebesgue, *est dégénérée au point* $x_0\in R$, lorsqu'il existe un intervalle ouvert $U\subset R$ tel que $g(x_0)\in U$ et x_0 est un point de dispersion de l'ensemble $g^{-1}(U)$.

Dans la première partie de ce travail je démontre quelques propriétés des fonctions ayant la propriété (K), dans la deuxième je démontre le théorème suivant:

Théorème (Th. 5). *Soit $f\colon R^2\to R$ une fonction telle que toutes ses coupes f^y sont mesurables au sens de Lebesgue. Pour que la fonction f soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que $\mu\big(A(f)\cup B(f)\big)=0$, où μ désigne la mesure de Lebesgue dans R^2 et*

$$A(f)=\{(x,y)\in R^2;\ \textit{la coupe } f^y \textit{ est dégénérée au point } x\}$$

et

$$B(f)=\{(x,y)\in R^2;\ f_x \textit{ n'est pas approximativement continue à } y\}.$$

Dans le travail [3] j'ai démontré le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit la fonction $f\colon R^2\to R$ (R étant l'espace des nombres réels) telle que toutes les coupes $f_x(y)=f(x,y)$ ont la propriété* (K) *et toutes les coupes $f^y(x)=f(x,y)$ sont mesurables au sens de Lebesgue.*

Pour que la fonction f soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que l'ensemble $A(f)$ soit de mesure lebesguienne nulle.

L'ensemble $A(f)$ a été défini de la manière suivante:

Définition 1. La fonction $g\colon R\to R$, mesurable au sens de Lebesgue, *est dégénérée au point* $x_0\in R$, lorsqu'il existe un intervalle ouvert $U\subset R$ tel que $g(x_0)\in U$ et x_0 est un point de dispersion de l'ensemble $g^{-1}(U)$.

Alors $A(f)=\{(x,y);\ f^y$ est dégénérée au point $x\}$.

La propritée (K) a été définie dans mon travail [2] de la manière suivante:

Définition 2. La fonction $g\colon R\to R$ a la *propriété* (K) ((O)) si pour chaque ensemble A mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive, la fonction g est ponctuellement discontinue sur la fermeture de l'ensemble des points de densité de l'ensemble A (sur l'ensemble A).

Dans la première partie de ce travail je démontre quelques propriétés des fonctions ayant la propriété (K), dans la deuxième je caractérise les fonctions mesurables au sens de Lebesgue par l'ensemble.

$B(f) = \{(x, y);\ f_x$ n'est pas approximativement continue au point $y\}$ que permet de rejeter dans le théorème 1 l'hypothèse que les coupes f_x ont la propriété (K).

I. Il résulte de la définition 2:

THÉORÈME 2 (voir [1], lemme 3 et [2], lemme 2). *Si la fonction $g\colon R\to R$ a la propriété* (K), *alors, si, pour chaque nombre $\varepsilon>0$ et pour chaque ensemble $A\subset R$ mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive, il existe un intervalle ouvert J tel que $A\cap J$ est de mesure positive et $\operatorname{osc} g\leqslant\varepsilon$ sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble $A\cap J$.*

On vérifie facilement le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si la suite de fonctions $g_n\colon R\to R$ ayant la propriété* (K) ((O)) *est uniformément convergente vers la fonction g, la fonction g a aussi la propriété* (K) ((O)).

THÉORÈME 4. *Pour que la fonction $g\colon R\to R$ ait la propriété* (O), *il faut et il suffit qu'il existe une suite de fonctions $g_n\colon R\to R$ uniformément convergente vers la fonction g, une suite de fonctions $h_n\colon R\to R$ de première classe de Baire et une suite d'ensembles fermés de mesure lebesguienne nulle, telles que $g_n(x) = h_n(x)$ pour $x\in R-A_n$* $(n = 1, 2, \ldots)$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $\varepsilon>0$. Soit T la famille bien ordonnée par la relation "précéder" de tous les ensembles ouverts dans l'espace R. Étant donnés une sous-famille H de la famille T et un ensemble ouvert U, désignons par $I(H, U)$ la différence de l'ensemble U et de la somme de tous les ensembles de la famille H qui "précèdent" l'ensemble U.

Une sous-famille H de la famille T est du type $A(\varepsilon)$ lorsqu'elle satisfait aux conditions:

(1) H contient le premier élément U de la famille T tel que si $x\in U$ et $y\in U$, alors $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$.

(2) Si $V\in H$, alors $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$ pour tous les $x, y\in I(H, V)$.

Désignons par $K(\varepsilon)$ la somme de toutes les familles du type $A(\varepsilon)$. La famille $K(\varepsilon)$ est aussi du type $A(\varepsilon)$. De plus l'ensemble $B = R-\bigcup_{U\in K(\varepsilon)} U$ est fermé et de mesure nulle puisque la fonction g a la propriété (O).

Dans chaque ensemble $U\in K(\varepsilon)$ choisissons un point $\alpha(U)\in I\big(K(\varepsilon), U\big)$ (lorsque $I\big(K(\varepsilon), U\big)\neq\emptyset$).

Soit $f_U\colon I\big(K(\varepsilon), U\big)\to g\big(\alpha(U)\big)$. Posons:

$$f(x) = \begin{cases} f_U(x) & \text{pour } x\in I\big(K(\varepsilon), U\big),\\ g(x) & \text{pour } x\in B.\end{cases}$$

Comme $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, pour démontrer notre théorème il suffit de montrer que la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x\in R-B,\\ 0 & \text{pour } x\in B\end{cases}$$

est de première classe de Baire.

Soit l'ensemble $C\subset R$ fermé et non vide. Si $C\subset B$, alors la fonction partielle h/C est constante. Dans le cas contraire soit $U(C)$ le premier élément de la famille $K(\varepsilon)$ qui contient un point de l'ensemble C. Alors la fonction partielle $h/U(C)\cap C$ est constante et la fonction h est de première classe de Baire.

La condition est suffisante. Comme chaque fonction qui est de première classe de Baire à l'exception d'un ensemble fermé de mesure nulle a la propriété (O), d'après le théorème 3 notre condition est suffisante.

II. Soient $A\subset R^2$ et $B\subset R^2$ deux ensembles mesurables. Admettons que $A\subset\cdot\cdot B$, lorsque $A\subset B$, chaque point $(x, y)\in A$ est un point de densité de l'ensemble B, chaque point $y_0\in A_{x_0} = \{y;\ (x_0, y)\in A\}$ est un point de densité de la coupe $B_{x_0} = \{y\colon (x_0, y)\in B\}$ et chaque point $x_0\in A^{y_0} = \{x;\ (x, y_0)\in A\}$ est ùn point de densité de la coupe $B^{y_0} = \{x;\ (x, y_0)\in B\}$.

LEMME 1. *Si $A\subset R^2$ est un ensemble mesurable, il existe un ensemble $B\subset A$ du type F_σ tel que $\mu(A-B) = 0$ (μ étant la mesure de Lebesgue dans l'espace R^2) et $B\subset\cdot\cdot B$.*

Démonstration. Si $\mu(A) = 0$, alors $B = \emptyset$. Dans le cas contraire, désignons par B_1 l'ensemble du type F_σ, contenu dans A, tel que $\mu(A-B_1) = 0$ et tel que si $(x, y)\in B_1$, alors (x, y) est point de densité de l'ensemble A.

Soit B_2 l'ensemble de tous les points $(x, y)\in B_1$ pour lesquels la coupe $(B_1)^y$ est mesurable, $\mu_1\big((B_1)^y\big)>0$ (μ_1 étant la mesure de Lebesgue dans R) et x est un point de densité de la coupe $(B_1)^y$. L'ensemble B_2 est mesurable et $\mu(B_1-B_2) = 0$ (voir [4], p. 130–131). Soit B_3 un ensemble du type G_δ, de mesure nulle qui contient l'ensemble B_1-B_2. Soit $A_1 = \{y;\ \mu_1\big((B_3)^y\big)>0\}$. Évidemment $\mu_1(A_1) = 0$. Soit $A_2\subset R$ un ensemble du type G_δ, de mesure nulle, qui contient l'ensemble A_1. Posons $B_4 = B_1-\big((R\times A_2)\cup B_3\big)$. L'ensemble $B_4\subset R^2$ est du type F_σ, $\mu(B_4) = \mu(B_2)$ et chaque point $x\in(B_4)^y$ est un point de densité de la coupe $(B_4)^y$.

Soit B_5 l'ensemble de tous les points $(x, y)\in B_4$ pour lesquels la coupe $(B_4)_x$ est mesurable, $\mu_1\big((B_4)_x\big)>0$ et y est un point de densité de la coupe $(B_4)_x$. On a encore $\mu(B_4-B_5) = 0$. Désignons par B_6 un ensemble du type G_δ, de mesure nulle, qui contient B_4-B_5. Soit $A_3 = \{x;\ \mu_1\big((B_6)_x\big)\neq 0\}$. Évidemment $\mu_1(A_3) = 0$. Soit $A_5 = \{y;\ \mu_1\big((B_6)^y\big)\neq 0\}$. Soit $A_6\subset R$ un ensemble du type G_δ, de mesure nulle, qui contient l'ensemble A_5. Posons

$$B = B_4-\big((A_4\times R)\cup(R\times A_6)\cup B_6\big).$$

L'ensemble B satisfait aux conditions du lemme 1 et notre lemme est ainsi démontré.

Soit $f\colon R^2 \to R$. Désignons par $\varphi(f)$ l'ensemble de tous les points (x_0, y_0) tels que la fonction f n'est pas approximativement continue au point (x_0, y_0) ou la coupe f^{y_0} n'est pas approximativement continue au point x_0 ou la coupe f_{x_0} n'est pas approximativement continue au point y_0.

PROPOSITION. *Soit $f\colon R^2 \to R$ une fonction mesurable. Alors $\mu(\varphi(f)) = 0$.*

Démonstration. Désignons par A l'ensemble

$$\{(x, y)\colon f \text{ n'est pas approximativement continue au point } (x, y)\}$$

par B — l'ensemble

$$\{(x, y)\colon f_x \text{ n'est pas approximativement continue au point } y\}$$

et par C — l'ensemble

$$\{(x, y)\colon f^y \text{ n'est pas approximativement continue au point } x\}.$$

On sait que $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = 0$ et $\varphi(f) \subset A \cup B \cup C$. Alors $\mu(\varphi(f)) = 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Dans la démonstration du théorème 5 je profiterai du lemme suivant:

LEMME 2 (voir [1], lemme 2, et [2], lemme 1). *Soit (X, H, m) un espace mesurable, où la mesure m est σ-finie. Soit $f\colon X \to R$ la fonction définie dans l'espace X telle que pour chaque nombre $\varepsilon > 0$, la classe d'ensembles*

$$D_\varepsilon = \{D \in M;\ \operatorname*{osc}_D f \leqslant \varepsilon\}$$

satisfait à la condition suivante:

pour tout ensemble $A \in M$ de mesure m positive il existe un ensemble $D \in D_\varepsilon$ tel que $D \subset A$ et $m(D) > 0$.

Alors la fonction f est $\overline{m}$-mesurable, où $\overline{m}$ désigne le complété de la mesure m.

Soit maintenant $f\colon R^2 \to R$. Désignons par $B(f)$ l'ensemble de tous les points $(x_0, y_0) \in R^2$ pour lesquels la coupe f_{x_0} n'est pas approximativement continue au point y_0.

THÉORÈME 5. *Soit $f\colon R^2 \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes f^y sont mesurables au sens de Lebesgue. Pour que la fonction f soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que $\mu(A(f) \cup B(f)) = 0$.*

Démonstration. La nécessité résulte de la proposition établie ci-dessus. Montrons encore que cette condition est suffisante. Dans ce but désignons par A l'ensemble $R^2 - (A(f) \cup B(f))$. Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles fermés de mesure positive, telle que

$$A_i \subset A_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \mu(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0.$$

Posons

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pour} \quad (x, y) \in A_n, \\ 0 & \text{pour} \quad (x, y) \notin A_n. \end{cases}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ presque partout, il suffit de démontrer que chaque fonction f_n est mesurable au sens de Lebesgue.

Dans ce but démontrons que la fonction f_n satisfait à la condition du lemme 2 dans le cas où $X = R^2$ et $m = \mu$.

Soit $R \subset R^2$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive et finie. Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par Q l'ensemble de tous les points $x \in R$ tels que les coupes E_x sont mesurables au sens de Lebesgue et de mesure positive. Évidemment $Q \subset R$ est un ensemble mesurable de mesure positive. Soit $\{J_n\}$ la suite de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles et $\{K_n\}$ la suite de tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles qui ont une longueur plus petite que ε.

Désignons par $Q_{r,s}$ l'ensemble de tous les points $x \in Q$ pour lesquels $\mu_1(J_r \cap E_x) > 0$ et $f_n(x, y) \in K_s$ pour tout point de densité y de l'ensemble E_x appartenant à J_r. Remarquons que chaque coupe $(f_n)_x$ de la fonction f_n satisfait à la condition du théorème 2. Évidemment, étant donné un ensemble $Z \subset R$, de mesure positive et un nombre positif $\eta > 0$, il en résulte facilement l'existence d'un intervalle ouvert J qui satisfait à la condition du théorème 2 dans le cas où $\mu_1(Z - (A_n)_x) > 0$.

Dans le cas où $\mu_1(Z - (A_n)_x) = 0$ il suffit d'appliquer la méthode du lemme 3 du travail [1].

Il en résulte que $Q = \bigcup_{r,s} Q_{r,s}$. Il existe donc un couple de nombres naturels (r_0, s_0) tel que $\mu_1^*(Q_{r_0,s_0}) > 0$ (μ_1^* étant la mesure extérieure de Lebesgue dans R).

Désignons par P l'ensemble de tous les points $x \in R$ pour lesquels la densité extérieure de l'ensemble Q_{r_0,s_0} au point x est égale à un. L'ensemble P est mesurable et $\mu_1(P) > 0$. Soit $F = E \cap (P \times J_{r_0})$. L'ensemble F est mesurable et $\mu(F) > 0$, car $\mu_1(F_x) > 0$ pour chaque $x \in Q_{r_0,s_0}$.

Soit $G \subset A_n$ ($H \subset R^2 - A_n$) ($L \subset F$) un ensemble du type F_σ tel que $\mu(A_n - G) = 0$ ($\mu(R^2 - A_n - H) = 0$) ($\mu(F - L) = 0$) et $G \subset\cdot\cdot G$ ($H \subset\cdot\cdot H$) ($L \subset\cdot\cdot L$). Désignons par M l'ensemble $L \cap (G \cup H)$. Remarquons que $M \subset E$, M est mesurable et $\mu(M) > 0$. Reste à prouver que $f_n(x, y) \in K_{s_0}$ pour tout point $(x, y) \in M$. Soit $(\xi, \eta) \in M$ et $\delta > 0$. Désignons par α la densité supérieure de l'ensemble

$$(f_n^\eta)^{-1}\big((f_n(\xi, \eta) - \delta, f_n(\xi, \eta) + \delta)\big)$$

au point ξ. Évidemment $\alpha > 0$. Il existe un intervalle ouvert J contenant le nombre ξ tel que la densité moyenne de la coupe M^η dans J est $> 1 - \frac{1}{4}\alpha$, la densité moyenne de l'ensemble $\{x;\ |f_n(x, \eta) - f_n(\xi, \eta)| < \delta\}$ dans J est $> \frac{3}{4}\alpha$ et la densité extérieure moyenne de l'ensemble Q_{r_0,s_0} dans J est $> 1 - \frac{1}{4}\alpha$. Par conséquent ces trois ensembles ont un point commun $x_0 \in J$.

Le point $(x_0, \eta) \in M$, donc la coupe F_{x_0} est mesurable, $\mu_1(F_{x_0}) > 0$ et η est un point de densité de l'ensemble F_{x_0}. Par conséquent η est un point de densité de l'ensemble E_{x_0}. De plus, le point $\eta \in J_{r_0}$ et le point $x_0 \in Q_{r_0,s_0}$, on a donc $f_n(x_0, \eta) \in K_{s_0}$.

Il en ressort que $f_n(\xi, \eta)$ est à une distance $< \delta$ de l'ensemble fermé K_{s_0}. Le nombre δ étant arbitraire, on a $f_n(\xi, \eta) \in K_{s_0}$.

Le théorème 6 est démontré.

Travaux cités

[1] R. O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 73 (1973), pp. 461–465.
[2] Z. Grande, *Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), pp. 813–816.
[3] — *On measurability of functions of two variables*, Proc. Cambr. Phil. Soc. (in press).
[4] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

Accepté par la Rédaction le 21. 10. 1974

On bouquets

by

Anna Gmurczyk (Warszawa)

Abstract. The paper concerns with bouquets of metric continua, in particular with spherical bouquets and usual spherical bouquets. Some results are the following:

Every bouquet of ANR's is movable.

A bouquet is FAR if and only if all its leaves are FAR's.

A bouquet of ANR's is homeomorphic to the inverse limit of a sequence of finite subbouquets with bonding maps being retractions.

Every spherical bouquet is of the same shape as a locally connected spherical bouquet.

For usual n-dimensional spherical bouquets ($n > 1$) two fundamental sequences are homotopic whenever they are homologic.

The classification of spaces, in particular of compact spaces, into classes called shapes is based only on global properties of those spaces, and thus it is far less precise than topological classification. The question arises how to find the singles possible space in each class. E.g., for the class of each plane continuum there exists a representative which is a finite or countable bouquet of 1-spheres, i.e., a set homeomorphic to one of the subsets

$$X_k = \bigcup_{i=1}^{k} \left\{(x, y) \in E^2 \colon \left(x-\frac{1}{i}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{i}\right)^2\right\} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

and

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{(y, x) \in E^2 \colon \left(x-\frac{1}{i}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{i}\right)^2\right\}$$

of the plane E^2.

The aim of this paper is to study the properties of bouquets in more general sense.

1. Basic definitions. In [1]-[5] K. Borsuk introduced the basic notions of shape. We recall some of the basic definitions.

Let X and Y be two compacta lying in an AR($\mathfrak{M}$)-space M.

A sequence of continuous maps $f_k\colon M \to M$ is said to be a *fundamental sequence* from X to Y (notation: $\underline{f} = \{f_k, X, Y\}$) if for every neighborhood V of Y there is a neighborhood U of X such that

$$f_k|_U \simeq f_{k+1}|_U \quad \text{in } V \quad \text{for almost all } k.$$