[16] R. Overton and J. Segal, *A new construction of movable compacta*, Glasnik Mat. 6 (26) (1971), pp. 361–363.
[17] T. Porter, *Borsuk's theory of shape and Čech homotopy*, Math. Scand. 33 (1973), pp. 83–89.
[18] D. Sullivan, *Geometric topology*, part 1, Localization, Periodicity and Galois Symmetry, mimeographed notes, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1970, Revised 1971.

STATE UNIVERSITY OF NEW YORK AT BINGHAMTON
Binghamton, New York

Accepté par la Rédaction le 3. 8. 1973

О нерастягивающих отображениях компактов

С. Д. Илиадис (Москва)

Abstract. Two sufficient conditions on the compact K, $K \subset E^n$, for which a non-expansive mapping $f\colon K \to K'$ has a fixed point, are given.

В этой заметке рассматриваются так называемые нерастягивающие отображения. Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *нерастягивающим*, если $\varrho(x, y) \geqslant \varrho(f(x), f(y))$. Из этого условия сразу следует и непрерывность.

Известны примеры (см. напр. [1], [2], [3], [4]) ациклических компактов K, которые не обладают свойством неподвижной точки, т. е. существует отображение $f\colon K \to K$ такое, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in K$. Вопрос о существование таких континуумов на плоскости, а также одномерных континуумов, остается открытым. С другой стороны хорошо известно, что для сжимающего отображения (т. е. $\varrho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\varrho(x, y)$, где $\lambda < 1$ и не зависит от x и y) полного метрического пространства существует единственная неподвижная точка. Интересно знать имеют ли неподвижные точки нерастягивающие отображения ациклических компактов. Оказывается, что при некоторых условиях, которые всегда выполнены для ациклических континуумов на плоскости, это так.

Можно пойти дальше в этом направлении и поставить следующий вопрос. Пусть K — компакт в евклидовом пространстве E^n, все группы гомологий [1] которого имеют конечное число образующих. Пусть далее f — нерастягивающее отображение K в себя, для которого число Лефшеца $\Lambda_f \neq 0$. Будет ли в этом случае отображение f иметь неподвижную точку, т. е. такую точку, что $f(x) = x$?

Теорема 2 показывает, что это так, если расположение компакта K в E^n удовлетворяет некоторым условиям.

Теорема 1 относится к ациклическим континуумам.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть K — компакт в пространстве E^n для которого существуют такие сколь угодно малые ε и окрестности U_ε компакта K, что*

(1) Имеются ввиду гомологии Александрова.

1) $\mathrm{Bd}\,U_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon$, *где* Γ_ε — *граница* ε-*окрестности компакта* K, 2) $\overline{U}_\varepsilon$ *является ретрактом пространства* E^n *и* 3) *при* $n \geqslant 3$ *любой симплекс диаметра* $\leqslant 2\varepsilon$ *с вершинами в* K *содержится в* $\overline{U_\varepsilon K}$. *Тогда любое нерастягивающее отображение* f *компакта* K *в себя имеет неподвижную точку.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* K — *компакт в* E^n *для которого существуют такие сколь угодно малые* ε, *что для* ε-*окрестности* $O_\varepsilon K = U_\varepsilon$ *компакта* K *выполнены условия:* 1) *отображение* i *вложения* K *в* $\overline{O_\varepsilon K}$ *порождает изоморфизм всех групп гомологии* K *на группы гомологии* $\overline{O_\varepsilon K}$, 2) $\overline{O_\varepsilon K}$ *является окрестностным ретрактом и* 3) *при* $n \geqslant 3$ *любой симплекс диаметра* $\leqslant 2\varepsilon$ *с вершинами в* K *содержится в* $\overline{O_\varepsilon K}$. *Тогда* K *имеет конечное число образующих для всех групп гомологии и если* f *нерастягивающее отображение* K *в себя и* $\Lambda_f \neq 0$, *то существует такая точка* x, *что* $f(x) = x$.

Замечание. Для континуумов, лежащих на плоскости и не разбивающих её, условия теоремы 1 всегда выполнены. Действительно, в качестве окрестности U_ε надо взять множество, ограничиваемое простым замкнутым контуром C_ε — границей неограниченной компоненты множества $E^2 \setminus \overline{O_\varepsilon K}$ (см. [5]).

Доказательство этих теорем будем вести параллельно.

Пусть ε — одно из чисел, о которых говорится в условиях теорем, и U_ε — соответствующая окрестность компакта K, обладающего указанными свойствами.

Для каждой точки $x \in E^n$ через $c(x)$ обозначим множество всех таких точек $y \in K$, что $\varrho(x, y) = \varrho(x, K)$. Построим многозначное отображение G пространства E^n в K, полагая $G(x) = f(c(x))$ для $x \in E^n$. Нетрудно видеть, что G — непрерывное отображение.

Для любого множества M через $\mathrm{conv}\,M$ будем обозначать выпуклую оболочку множества M.

ЛЕММА. *Для любой точки* $x \in \mathrm{Bd}\,U_\varepsilon$ *в первой теореме и* $x \in \overline{U}_\varepsilon$ — *во второй,* $\mathrm{conv}\,G(x) \subseteq \overline{U}_\varepsilon$.

Доказательство. Если $n \geqslant 3$, то $\mathrm{conv}\,G(x) = G(x) \cup \mathrm{conv}\{y_0, \ldots, y_k\}$, где сумма берется по всевозможным наборам $k+1$ точек, образующих симплекс в E^n. Так как $\mathrm{diam}\,c(x) \leqslant 2\varepsilon$, то $\mathrm{diam}\,G(x) \leqslant 2\varepsilon$, а значит и $\mathrm{diam}\{y_0, \ldots, y_k\} \leqslant 2\varepsilon$ и по условию 3) $\mathrm{conv}\{y_0, \ldots, y_n\} \subseteq \overline{U}_\varepsilon$, следовательно $\mathrm{conv}\,G(x) \subseteq \overline{U}_\varepsilon$.

Для $n \leqslant 2$ нетрудно показать, что $\mathrm{conv}\,G(x)$ всегда содержится в $\overline{O_\varepsilon K}$. Этот факт достаточно показать в том случае, когда $c(x)$ состоит не более чем из трех точек. Заметим, что в условиях первой теоремы $O_\varepsilon K \subseteq U_\varepsilon$. Действительно, если $z \in O_\varepsilon K$ и $z \notin U_\varepsilon$, то тогда на отрезке, соединяющем z с некоторой точкой $c(z)$ лежит граничная точка U_ε, чего не может быть, так как все точки этого отрезка лежат на расстоянии меньше ε от K и в то же время $\mathrm{Bd}\,U_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon$. Лемма доказана.

Так как в первой теореме $\overline{U}_\varepsilon$ является ретрактом, а во второй-окрестностным ретрактом, то в первом случае существует ретракция r пространства E^n на $\overline{U}_\varepsilon$, а во втором-некоторой окрестности $O_\delta \overline{U}_\varepsilon$ на $\overline{U}_\varepsilon$. Можно найти такое число $\delta > 0$, что в обоих случаях ретракция r определена на $O_\delta \overline{U}_\varepsilon$ и $\varrho(x, r(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in O_\delta \overline{U}_\varepsilon$.

Для каждой точки $x \in \mathrm{Bd}\,\overline{U}_\varepsilon$ в первом случае и $x \in \overline{U}_\varepsilon$ во втором возьмём столь малую окрестность O_x, чтобы выполнялось условие: для любой точки $y \in O_x$ множество $G(y)$ содержится в δ — окрестности множества $G(x)$. Этого можно добиться в силу непрерывности многозначного отображения $G(x)$. Из полученного покрытия $\mathrm{Bd}\,\overline{U}_\varepsilon$ в первом и $\overline{U}_\varepsilon$ во втором случае мы выбираем конечное подпокрытие $\{O_{x_i}\}$ $i = 1, \ldots, n$. Пусть число $\delta_1 < \frac{1}{5}\varepsilon$ настолько мало, что всякое множество диаметра не больше δ_1, имеющее непустое пересечение с $\overline{U}_\varepsilon$ содержится в некотором элементе покрытия $\{O_{x_i}\}$.

Возьмем теперь настолько мелкую локально-конечную триангуляцию пространства E^n, чтобы диаметр всякого симплекса триангуляции не превосходил δ_1 и определим однозначное непрерывное отображение F_ε пространства E^n в себя. Для этого определим сначала F_ε на вершинах триангуляции. Пусть e — вершина, тогда $F_\varepsilon(e) = f(y)$, где y — какая-нибудь точка из $c(e)$. На остальные точки E^n отображение F_ε продолжается по линейности.

Через $t(x)$ будем обозначать открытый симплекс триангуляции, содержащий точку $x \in E^n$. Пусть $x \in K$. Оценим расстояние $\varrho(F_\varepsilon(x), f(x))$. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ вершины симплекса $t(x)$, то $F_\varepsilon(x) \in \mathrm{conv}\{F_\varepsilon(e_1), \ldots, F_\varepsilon(e_k)\}$. Имеем

$$\varrho(f(x), F(e_i)) = \varrho(f(x), f(y_i)) \leqslant \varrho(x, y_i) \leqslant$$
$$\leqslant \varrho(x, e_i) + \varrho(e_i, y_i) \leqslant \delta_1 + \delta_1 = 2\delta_1,$$

где $y_i \in c(e_i)$, $F_\varepsilon(e_i) = f(y_i)$. С другой стороны

$$\varrho(F_\varepsilon(e_i), F_\varepsilon(e_i)) \leqslant \varrho(f(y_i), f(y_j)) \leqslant \varrho(y_i, y_j) \leqslant$$
$$\leqslant \varrho(y_i, e_i) + \varrho(e_i, e_j) + \varrho(e_j, y_j) \leqslant 3\delta_1.$$

Отсюда следует, что $\varrho(F_\varepsilon(x), f(x)) \leqslant 5\delta_1$.

Оценим расстояние $\varrho(F_\varepsilon(x), K)$ для $x \in \mathrm{Bd}\,\overline{U}_\varepsilon$ из первой теоремы и $x \in \overline{U}_\varepsilon$ из второй. Как и выше $x \in t(x)$ с вершинами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $F_\varepsilon(x) \in \mathrm{conv}\{F_\varepsilon(e_1), \ldots, F_\varepsilon(e_k)\}$. Пусть $t(x)$ содержится в $O_{x_{i_0}} \in \{O_{x_i}\}$, $x_{i_0} \in \mathrm{Bd}\,\overline{U}_\varepsilon$ в первом случае и $x_{i_0} \in \overline{U}_\varepsilon$ во втором. Из выбора триангуляции следует, что $F_\varepsilon(e_1), \ldots, F_\varepsilon(e_k) \in O_\delta G(x_{i_0})$. Из леммы следует, что $\mathrm{conv}\,G(x_{i_0}) \subseteq O_\varepsilon K$. Тогда

$$\mathrm{conv}\{F_\varepsilon(e_1), \ldots, F_\varepsilon(e_k)\} \subseteq O_\delta \,\mathrm{conv}\,G(x_{i_0}) \subseteq O_\delta O_\varepsilon K,$$

т. е. $\varrho(F_\varepsilon(x), K) \leqslant \delta + \varepsilon$. Так как $O_\varepsilon K \subseteq U_\varepsilon$, то в обоих случаях мы получаем, что $F_\varepsilon(\overline{U}_\varepsilon) \subseteq O_\delta \overline{U}_\varepsilon$.

В случае первой теоремы через γ_ε обозначим число $\max\{\varrho(x, K)\}$ для $x \in \overline{U}_\varepsilon$. Если $\varepsilon \to 0$, то и $\gamma_\varepsilon \to 0$. Действительно, достаточно показать, что множество W_ε, ограниченное множеством $\mathrm{Bd}\, O_\varepsilon K$, содержится в $O_{\varepsilon_1} K$ для любого ε_1, при достаточно малом ε, так как $\overline{U}_\varepsilon \subseteq \overline{W}_\varepsilon$. Пусть ε_1 фиксировано. Если утверждение не верно, то существует последовательность точек $\{z_n\}$ такая, что $z_n \in W_{1/n}$, $\varrho(z_n, K) \geqslant \varepsilon_1 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть z, предельная точка для некоторой подпоследовательности. Тогда $z \in W_{1/n}$ для любого n и $z \notin O_{\varepsilon_1} K$. Пусть $y \notin \overline{O_{\varepsilon_1} K} \cup \overline{W}_1$. Соединим некоторой ломаной L точки y и z, так, чтобы она не пересекала K. Если $\varepsilon_2 = \varrho(K, L)$, то тогда $z \notin W_{1/n}$ для всех $n > 1/\varepsilon_2$, так как L не пересекает $\mathrm{Bd}\, O_{1/n} K$. Получили противоречие, значит $\gamma_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим отображение rF_ε компакта $\overline{U}_\varepsilon$ на себя. Предположим, что это отображение имеет неподвижную точку z, т. е. $rF_\varepsilon(z) = z$.

В случае первой теоремы покажем, что $F_\varepsilon(z) \in O_\delta \overline{U}_\varepsilon$. Действительно, если $z \notin \mathrm{Bd}\, \overline{U}_\varepsilon$, то $F(z) \in \overline{U}_\varepsilon$, если же $z \in \mathrm{Bd}\, U_\varepsilon$, то мы показали, что $F(z) \in O_\delta \overline{U}_\varepsilon$.

Пусть $z \in t(z)$, e — вершина $t(z)$, $y \in c(e)$ и $F_\varepsilon(e) = f(y)$. Оценим расстояние $\varrho(y, f(y))$. Имеем

$$\varrho(y, f(y)) \leqslant \varrho(y, e) + \varrho(e, z) + \varrho(z, rF_\varepsilon(e)) + \varrho(rF_\varepsilon(e), f(y)) .$$

Но

$$\begin{aligned} \varrho(z, rF_\varepsilon(e)) &= \varrho(rF_\varepsilon(z), rF_\varepsilon(e)) \leqslant \\ &\leqslant \varrho(rF_\varepsilon(z), F_\varepsilon(z)) \leqslant \varrho(F_\varepsilon(z), F_\varepsilon(e)) + \varrho(F_\varepsilon(e), rF_\varepsilon(e)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + 2\varrho(z, K) + \delta_1 + \varepsilon . \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $F(z)$ и $F(e)$ принадлежат $O_\delta \overline{U}_\varepsilon$ и из того, что r передвигает каждую точку из $O_\delta \overline{U}_\varepsilon$ не более чем на ε. Далее

$$\varrho(rF_\varepsilon(e), f(y)) = \varrho(rf(y), f(y)) = 0 ,$$

так как $f(y) \in K$. Таким образом

$$\varrho(y, f(y)) \leqslant \varrho(e, K) + \delta_1 + \varepsilon + 2\varrho(z, K) + \delta_1 + \varepsilon ,$$

или

$$\varrho(y, f(x)) \leqslant \gamma_\varepsilon + \delta_1 + \delta_1 + \varepsilon + 2\gamma_\varepsilon + \delta_1 + \varepsilon = 3\gamma_\varepsilon + 3\delta_1 + 2\varepsilon$$

в первом случае и

$$\varrho(y, f(y)) \leqslant \varepsilon + \delta_1 + \delta_1 + \varepsilon + 2\varepsilon + \delta_1 + \varepsilon = 5\varepsilon + 3\delta_1 ,$$

во втором.

Отсюда следует, что отображение f имеет неподвижную точку, если для сколь угодно малых ε будет иметь неподвижную точку отображение $rF_\varepsilon\colon \overline{U}_\varepsilon \to \overline{U}_\varepsilon$. В случае первой теоремы отображение rF_ε всегда имеет неподвижную точку, так как $\overline{U}_\varepsilon$ является ретрактом пространства E^n.

В случае второй теоремы покажем, что при достаточно малых ε будем иметь $\Lambda_r F_\varepsilon \neq 0$ и так как $\overline{U}_\varepsilon$ является окрестностным ретрактом, то из этого будет следовать, что и в этом случае rF_ε, а значит f будет иметь неподвижную точку. Если i означает вложение K в $\overline{U_\varepsilon K}$, то отображения $fi\colon K \to \overline{U}_\varepsilon$ и $(rF_\varepsilon)i\colon K \to \overline{U}_\varepsilon$ гомотопны, так как для $x \in K$, точки $(rF_\varepsilon)(x)$ и $f(x)$ можно соединить отрезком в $O_\varepsilon K$. Отсюда и следует, что $\Lambda_r F_\varepsilon \neq 0$. Теоремы доказаны.

В связи с доказанными теоремами возникают ряд задач.

1. Интересно было бы охарактеризовать границы ε — окрестностей континуумов (компактов) в E^n, т. е. какие компакты могут служить границами таких окрестностей. Для континуумов на плоскости это сделано в работе [5].

2. Можно ли компакт K с конечным числом образующих по всем группам гомологий вложить в E^n так, чтобы отображения вложения в замыкание ε — окрестности для всех достаточно малых ε (или для достаточно малых ε) индуцировало бы изоморфизм на всех группах гомологий? В частности, этот вопрос для ациклических континуумов на плоскости можно поставить и так: можно ли вложить такой континуум так, чтобы граница любой его ε-окрестности была бы простым замкнутым контуром?

3. Пусть K — компакт в E^n. Всегда ли можно найти такие ε (сколь угодно малые ε) и окрестность U_ε, чтобы $\mathrm{Bd}\, U_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon$, где Γ_ε граница ε-окрестности, и чтобы $\overline{U}_\varepsilon$ было окрестностным ретрактом? Можно также поставить вопрос о существовании вложения для которого это так.

4. Пусть имеется отображение f компакта $K \subseteq E^m$ в себя. Для каких f можно K вложить в некоторое E^n так, чтобы отображение f было нерастягивающим? Если рассматривать вложение K в E^m, то это не так даже, если f гомеоморфизм. Но можно поставить вопрос для каких компактов это верно. Например будет ли это так для гомеоморфизмов куба I^m?

Литература

[1] K. Borsuk, *Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui même sans points invariants*, Fund. Math. 24 (1935), pp. 51–58.

[2] И. Я. Верченко, *Sur les continus acycliques transformés en eux-mêmes d'une manière continue sans points invariants*, Мат. сб. 8 (2) (1940), стр. 295–306.

[3] S. Kinoshita, *On some contractible continua without fixed point property*, Fund. Math. 40 (1953), pp. 96–98.

[4] R. J. Knill, *Cones, products and fixed points*, Fund. Math. 60 (1967), pp. 35–46.

[5] С. Д. Илиадис, *Borders of ε-neighbourhoods of compacts in a plane*, Вестник МГУ 5 (1970), стр. 71–75.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

Accepté par la Rédaction le 1. 10. 1973