Sur l'unicité du développement trigonométrique.

Par

Nina Bary (Moscou).

Introduction.

§ 1. On peut poser le problème de l'unicité du développement trigonométrique dans la forme suivante:

„Un ensemble E de points étant donné, reconnaître s'il existe une série trigonométrique, à coefficients non nuls, qui converge vers zéro partout en dehors de l'ensemble E [1])".

Il nous sera utile de poser les définitions suivantes.

Définition 1. Nous dirons que l'ensemble E est *un ensemble* (M) [2]), s'il existe une série trigonométrique, à coefficients non nuls, convergente vers zéro partout en dehors de l'ensemble E.

Définition 2. Nous dirons que l'ensemble E est *un ensemble* (U) [3]), si la convergence vers zéro d'une série trigonométrique en dehors de E n'est possible que dans le cas où tous ses coefficients sont nuls.

Il suit de la définition que chaque ensemble de points est nécessairement ou bien un ensemble (M), ou bien un ensemble (U).

§ 2. Faisons d'abord la remarque évidente tout ensemble E qui contient un ensemble (M) est lui-même un ensemble (M).

[1]) Nous considérons toujours les ensembles situés sur le segment $[0, 2\pi]$.

[2]) ensemble de *multiplicité*.

[3]) ensemble d'*unicité*.

Cela posé, considérons une série trigonométrique quelconque

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

à coefficients non nuls. Soit E l'ensemble des points, où la série (1) ne converge pas vers zéro. Il suit de la définition même des ensembles (M), que E est un ensemble (M). On voit facilement que l'ensemble E est *un ensemble mesurable (B) et du type* $G_{\delta\sigma}$ (d'après la terminologie de M. Hausdorff.[1]) En effet, désignons par $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble des points x pour lesquels on a

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{m}$$

Il est aisé de voir que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points où la série (1) converge vers zéro,

$$\mathcal{E} = \prod_{m=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{E}_{m,n}$$

($\underline{\lim}$ désignant comme toujours l'ensemble limite restreint).

L'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ étant fermé, on voit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un ensemble mesurable (B) et du type $F_{\sigma\delta}$ (terminologie de M. Hausdorff[1]). Mais $\mathcal{E}$ est le complémentaire de E par rapport à $(0, 2\pi)$. Donc l'ensemble E est mesurable (B) et du type $G_{\delta\sigma}$ C'est donc un ensemble de classe $\leqslant 3$ (fermé) d'après la classification de M. M. Baire-Lebesgue.[2])

Rappelons maintenant les résultats classiques de G. Cantor et de M. Young[3]) sur l'unicité du développement trigonométrique:

[1]) Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre.*

[2]) Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Journal des Mathématiques pures et appliquées 1905.

[3]) Young. *A note on trigonometrical series.* Messenger of Mathematics, t. 38.

Théorème de G. Cantor. Une série trigonométrique convergente vers zéro partout en dehors d'un ensemble E qui contient un nombre fini de points ou qui est un ensemble réductible a nécessairement tous ses coefficients nuls.

Théorème de M. Young. Une série trigonométrique convergente vers zéro partout en dehors d'un ensemble dénombrable (absolument quelconque) a tous ses coefficients nuls

Il suit de la dernière proposition que l'ensemble E des points, où une série trigonométrique ne converge pas vers zéro doit être *non dénombrable.*

En réunissant tout ce que nous avons dit, on voit:

I. *Tout ensemble* (M) *contient un autre ensemble* (M), *non dénombrable, mesurable* (B), *de classe* $\leqslant 3$ *d'après la classification de M.M. Baire-Lebesgue et du type* $G_{\delta\sigma}$.

Les ensembles non dénombrables (B) ont une structure d'autant plus compliquée, que leur classe (d'après la classification de *M.M.* Baire-Lebesgue) est plus haute. Mais quelle que soit leur structure, la proposition suivante, très simple, mais très importante, a lieu:

Théorème de M. Alexandroff.[1]) Tout ensemble de points non dénombrable, mesurable (B), contient *un ensemble parfait.*

On conclut immédiatement de ce théorème que l'ensemble E des points dans lesquels une série trigonométrique ne converge pas vers zéro contient un ensemble parfait.

Donc

II. *Tout ensemble* (M) *contient un ensemble parfait.*

§ 3. Nous avons vu au § 2, que tout ensemble (M) contient un autre ensemble (M) mesurable (B) et de classe $\leqslant 3$.

Cela nous implique la question suivante:

„Quelle est la plus petite classe parmi les classe des ensembles (M) *mesurables* (B) *et contenus dans un ensemble* (M) *donné?"*

En particulier on sait (§ 2) que tout ensemble (M) contient un ensemble parfait. Il est donc naturel de poser la question

[1]) Alexandroff, *Sur la puissance des ensembles mesurables* (B). Comptes Rendus t. 162. 1916.

importante, si la plus petite classe de la question précédente n'est pas toujours égale à zéro, c'est-à-dire:

Un ensemble (M) *étant donné, existe-t-il un ensemble* (M) *parfait contenu dans cet ensemble, ou ce n'est pas toujours le cas, et il existe donc un ensemble* (M) *tel que tous les ensembles parfaits qu'il contient sont des ensembles* (U)?

Ce problème n'est pas encore résolu et nous semble très difficile à résoudre.

§ 4. Le théorème II du § 2 nous permet d'énoncer la proposition suivante:

„Toute série trigonométrique qui converge vers zéro partout en dehors d'un ensemble E ne contenant aucun ensemble parfait a tous ses coefficients nuls".

Il faut remarquer que cette proposition est obtenue *à priori* en n'utilisant que le théorème de M. Alexandroff sans aucun raisonnement et sans recours aux formules analytiques (voir par exemple la démonstration du même théorème par M. Ch. de la Vallée-Poussin.[1]). On peut aussi remarquer que cette proposition d'unicité subsiste toujours *à priori* non seulement pour la *convergence* des séries trigonométriques, mais de même pour toute *méthode de sommation* (S), pour laquelle a lieu un théorème de M. Young sur l'unicité dans le cas d'un ensemble dénombrable de points exceptionnels. En effet, quelle que soit la méthode de sommation (S) d'une série trigonométrique (la méthode de Riemann, de Cesàro d'ordre quelconque, de Poisson une méthode linéaire de M. Toeplitz etc.), l'ensemble E des points, où la série trigonométrique n'est pas sommable vers zéro par cette méthode *est toujours un ensemble mesurable* (B). Donc, d'après le théorème de M. Alexandroff il est ou dénombrable (en particulier fini) ou bien il contient un ensemble parfait. Il en résulte dans le cas où il existe un théorème analogue au théorème de M. Young, que l'ensemble des points exceptionnels est un ensemble (U), s'il ne contient aucun ensemble parfait.

§ 5. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les ensembles (B). Pour les autres ensembles il n'existe pas en général de théorème analogue au

[1]) Ch. de la Vallée-Poussin. Comptes Rendus, t. 155, 1912, *Sur l'unicité du développement trigonométrique.*

théorème de M. Alexandroff: Pourtant, tous les ensembles effectifs non mesurables (B), connus dans la Science jusqu'à présent, par exemple: l'ensemble de M. Lebesgue [1]), les ensembles (A) de Souslin [2]) et M. Lusin [3]) tous ces ensembles contiennent nécessairement des ensembles parfaits, comme l'a demontré une analyse détaillée. La question se pose donc s'il existe un ensemble effectif ne contenant aucun ensemble parfait. M. Lusin espère qu'il y a des ensembles de cette nature parmi les ensembles complémentaires aux ensembles (A) de Souslin. C'est aussi lui qui m'a indiqué qu'en supposant la possibilité de bien ordonner le continu, on peut construire sur l'intervalle $(0, 2\pi)$ un ensemble E tel que ni E, ni son complémentaire CE ne contiennent aucun ensemble parfait. Il est évident que ces deux ensembles sont non mesurables (L) et que leur mesure extérieure est égale á 2π et la mesure intérieure à zéro. Ces deux ensembles d'après le théorème du § 4 sont des ensembles (U). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

S'il est possible de bien ordonner le continu, il existe des ensembles (U) de mesure extérieure positive.

§ 6. Quant aux ensembles (M), il contiennent toujours, comme nous avons vu au § 2, des ensembles *(M) mesurables (B)* et *à fortiori* mesurables (L). Cela implique la question de savoir, quelle est la mesure lebesguienne des ensembles (M). Il est facile de voir que.

Tout ensemble E mesurable (L) et de mesure positive est un ensemble (M).

En effet, il est connu, que dans ce cas l'ensemble E contient toujours un ensemble parfait P, Mes $P > 0$. Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble P, c'est à dire la fonction égale à 1 sur P et à 0 en dehors de P. La série de Fourier de $f(x)$ converge évidemment (d'après les propriétés des séries de Fourier) vers zéro dans chaque intervalle contigu à P, donc partout en dehors de E, mais tous ses coefficients ne sont pas nuls, car d'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \text{ Mes } P > 0$$

[1]) Lebesgue. *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1905, p. 215.

[2]) Souslin. *Sur une définition des ensembles mesurables (B) sans nombres transfinis.* Comptes Rendus, t. 164. 1917.

[3]) Lusin. *Sur la classification de M. Baire.* Comptes Rendus, t. 164, 1917.

Cela prouve que E est un ensemble (M).

Donc: *la recherche des ensembles (M) se réduit à la recherche des ensembles (M) mesurables (B) et de mesure nulle.*

Nous avons vu que chaque ensemble de telle sorte contient nécessairement un ensemble parfait P, Mes $P = 0$.

§ 7. En 1916 M. Menchoff [1]) a démontré *l'existence des ensembles parfaits (M) de mesure nulle,* en donnant le premier exemple d'un tel ensemble. Le résultat de M. Menchoff était tout à fait innatendu, car on pouvait croîre avant l'apparition de sa Note qu'il n'existe pas d'ensembles *(M)* de mesure nulle. Au contraire après la Note de M. Menchoff il fut naturel de se poser la question, si le résultat de cette Note était susceptible d'une généralisation. On pouvait se demander s'il est possible de construire une série trigonométrique convergente vers zéro en remplaçant l'ensemble particulier de M. Menchoff par un ensemble parfait de mesure nulle, d'ailleurs absolument quelconque.

M. Rajchman [2]) en 1921 a répondu *négativement* à cette dernière question, en définissant une classe particulière d'ensembles parfaits (U). Ce sont les ensembles qu'il appelle „ensembles de type (H)". Presque en même temps, par une méthode tout à fait différente, j'ai donné la construction d'un famille infinie d'ensembles parfaits (U) [3]).

En remarquant qu'il existe des ensembles parfaits (U) qui ne sont pas de type (H) (nous donnons l'exemple d'un tel ensemble au § 21 de ce Mémoire), il serait très intéressant et très important [4]) de résoudre le probléme suivant:

[1]) Menchoff. *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* Comptes Rendus, t. 163. 1916.

[2]) A. Rajchman. *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* Fundamenta Mathematicae, t. III, 1921.

[3]) Ma première communication *„Sur l'existence des ensembles parfaits (U)"* a été faite pendant le séminaire sur la théorie des fonctions sous la direction de M. N. Lusin (avril 1921). Une autre communication *„Sur l'unicité du développement trigonométrique"* a été faite à la Société Mathématique de Moscou le 22 janvier 1922. Ces communications n'ont pas été publiées. C'est M. Rajchman qui à publié le premier son résultat si remarquable et élégant.

[4]) pour la théorie générale d'intégration, afin d'étendre la notion d'intégrale au delà de la notion de l'intégrale de M. Denjoy.

trouver les propriétés caractéristiques des ensembles parfaits (U) ou, en d'autres termes, *trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble parfait donné soit un ensemble* (U).

§ 8. La résolution des problèmes qui étaient posés aux §§ précédents approfondirait nos connaissances sur la *convergence* des séries trigonométriques. Il serait de même intéressant de résoudre le problème suivant, concernant la relation entre la convergence et la sommation par une méthode quelconque des séries trigonométriques:

„existe-t-il une série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro mais non nuls, sommable vers zéro par une méthode de sommation quelconque partout en dehors d'un ensemble (U) donné"?

En d'autres termes, la division dans le cas de *convergence* des séries trigonométriques de tous les ensembles en deux familles: les ensembles (U) et les ensembles (M), — cette division reste-t-elle la même dans le cas de *sommation* par une méthode donnée des séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro?

Il est évident que pour les ensembles *parfaits* cette division de tous les ensembles en deux familles reste la même au moins pour le procédé de sommation de Poisson (et *à fortiori* pour les procédés de Riemann et de Cesàro d'ordre quelconque), car d'après le principe de localisation une série sommable vers zéro par ce procédé dans un intervalle contigu à l'ensemble parfait, converge vers zéro dans le même intervalle. Il suffit donc, *en considérant les ensembles parfaits* de démontrer qu'ils sont des ensembles (U) (au sens de convergence) pour être assuré qu'il n'existe pas de série sommable par le procédé de Poisson vers zéro en dehors d'un tel ensemble.

Pour les ensembles qui ne sont pas parfaits la question posée reste à résoudre.

§ 9. Le but de ce Mémoire est d'étudier les propriétés des ensembles (M) et des ensembles (U) pour nous approcher à la connaissance de leur nature.

Voici le résumé des matières traitées dans ce travail.

Le Mémoire est divisé en deux chapitres, dont le premier contient les propriétés des ensembles (M) et le second celles des ensembles (U).

Les §§ 10—16 contiennent des considérations concernant les ensembles (M) absolument quelconques. Nous étudions ici leurs propriétés et les propriétés des séries-nulles correspondantes. En particulier au § 16 nous donnons la démonstration du théorème suivant: *il n'existe pas d'ensemble* (M) *contenu dans une infinité dénombrable d'ensembles parfaits* (U).

Les §§ 17 et 18 sont consacrés aux ensembles (M) *parfaits*. Nous donnons dans le § 18 une condition suffisante pour qu'un ensemble parfait soit un ensemble (M). Parmi les ensembles (M) vérifiant cette condition nous trouvons, comme cas particulier, l'ensemble de M. Menchoff.

Dans le § 19 (chapitre II) nous démontrons l'existence des ensembles parfaits (U) par une méthode différente de celle de M. Rajchman. Nous donnons au § 21 la construction d'un ensemble parfait (U) qui n'est pas de type (H) et enfin dans le § 22 nous donnons l'exemple d'un ensemble (U) qui est partout dense et a la puissance du continu dans chaque intervalle.

CHAPITRE I.

Les propriétés des ensembles (M).

§ 10. **Définition 1.** Nous dirons qu'une série trigonométrique est *une série-nulle,* si elle converge *vers zéro presque partout* dans $(0,2\pi)$ mais *non partout.*

Définition 2. Nous appellerons *„noyau simple d'une série nulle"* l'ensemble E des points où cette série-nulle ne converge pas vers zéro.

Le théoreme 1 du § 2 nous apprend, que *le noyau simple de chaque série-nulle est un ensemble mesurable* (B) *non dénombrable et du type* $G\delta\sigma$.

Posons encore une dernière définition. Soit

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

une série-nulle. Ses coefficients tendent vers zéro puisque la série converge sur un ensemble de mesure 2π; désignons par

$S_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes de la série (1), c'est à dire

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (2)$$

Définition 3. Nous appellerons l'ensemble N des points x pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x)| = +\infty$$

le noyau réduit de la série trigonométrique (1).

Il est évident, que le noyau réduit d'une série trigonométrique est contenu dans le noyau simple de cette série, $N \subset E$. Nous ne savons pas, s'il existe une série-nulle dont le noyau réduit coïncide avec le noyau simple d'une série donnée.

Remarquons d'abord, que *le noyau réduit* est aussi *un ensemble mesurable* (*B*), puisque la fonction

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x)|$$

qui le définit est une fonction de classe $\leqslant 2$ dans la classification de M. Baire.

Ensuite, d'après les résultats de M. Ch. de la Vallée-Poussin [1]) il est évident que le noyau réduit doit être *non dénombrable;* car autrement la série-nulle correspondante serait, d'après le théorème cité de M. de la Vallée-Poussin, une *série de Fourier* d'une fonction égale à zéro identiquement et par conséquent aurait tous ses coefficients nuls, ce qui contredit à la définition même d'une série-nulle.

Le noyau réduit est un ensemble du type G_δ. En effet, m étant un entier positif quelconque, désignons par F_m l'ensemble des points x de l'intervalle $(0,2\pi)$ pour lesquels les inégalités simultanées sont vérifiées

$$|S_1(x)| \leqslant m; \ |S_2(x)| \leqslant m; \dots \ |S_n(x)| \leqslant m; \dots$$

Il suit de la continuité de chacune des fonctions $S_n(x)$

[1]) Ch. de la Vallée-Poussin. *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Comptes Rendus, t. 160.

$(n = 1, 2, 3, \dots)$, que l'ensemble F_m est fermé. Soit $\mathcal{E}$ la réunion de tous les F_m $(m = 1, 2, 3, \dots)$,

$$\mathcal{E} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m$$

Il suit de la définition de l'ensemble $\mathcal{E}$ que son complémentaire $C\mathcal{E}$ est le noyau réduit de la série-nulle donnée,

$$C\mathcal{E} = N$$

Mais l'ensemble $\mathcal{E}$ est du type G_δ. Donc l'ensemble $C\mathcal{E} = N$ est du type G_δ (c. q. f. d.)

En réunissant tout ce que nous avons dit sur le noyau réduit N, on a

le noyau réduit N de chaque série-nulle est un ensemble non dénombrable, mesurable B et du type G_δ.

Il est très probable que le noyau réduit est un ensemble (M), mais nous n'avons pas réussi à démontrer ce théorème hypothétique.

§ 11. Pour analyser en détails les propriétés du noyau simple et du noyau réduit (cette analyse nous permettra de pénétrer dans la nature des ensembles (M)), nous avons besoin de démontrer un lemme, relatif au „produit formel“ [1]) de deux séries trigonométriques.

Considérons deux séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0; \ (\mathrm{I}) \qquad \lim_{n\to\infty} n^3 \alpha_n = \lim_{n\to\infty} n^3 \beta_n = 0. \ (\mathrm{II})$$

et formons une nouvelle série

$$\frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos nx + l_n \sin nx \qquad (3)$$

[1]) A. Rajchman. *O Riemannowskiej „zasadzie umiejscowienia“*. (Sur le principe de localisation de Riemann). C. R. de la Société des Sciences de Varsovie, 1918. XI année. Fascicule 2, p. 120.

appellée par M. Rajchman[1]) „produit formel" des séries (1) et (2) et dont les coefficients k_n et l_n s'expriment par les formules

$$\left.\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p\,\alpha_{p-n} + b_p\,\beta_{p-n} \\ l_n &= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} -a_p\,\beta_{p-n} + b_p\,\alpha_{p-n} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

en posant

$$\begin{aligned} a_{-n} &= a_n;\ b_{-n} = -b_n;\ b_0 = 0 \\ \alpha_{-n} &= \alpha_n;\ \beta_{-n} = -\beta\ ;\ \beta_0 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Les conditions (I), (II), (5) permettent d'affirmer que les deux séries qui forment les formules (4) sont absolument convergentes et d'ailleurs on a[2])

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} l_n = 0.$$

M. Rajchman[3]) a démontré deux propositions importantes concernant le produit formel:

1⁰ Si l'un au moins des multiplicateurs (1) et (2) converge vers zéro en un point x_0, le produit formel converge aussi vers zéro au point x_0.

2⁰ Si aucun des multiplicateurs (1) et (2) ne converge vers zéro, le produit formel et le multiplicateur (1) sont en même temps des séries divergentes ou convergentes; dans le dernier cas la somme du produit formel est égale au produit des sommes des séries (1) et (2)

Il nous sera nécessaire maintenant de compléter légèrement la seconde proposition de M. Rajchman, en énonçant le lemme suivant.

Lemme. *Si les deux multiplicateurs* (1) *et* (2) *ne convergent pas vers zéro, les limites d'indétermination des sommes partielles du produit formel dans un point quelconque x_0 sont*

[1]) A. Rajchman loc. cit. p. 120.
[2]) A. Rajchman loc. cit. p. 125.
[3]) A. Rajchman loc. cit. p. 128 théor. IV et p. 135 théor. V.

égales aux limites d'indétermination des sommes partielles du multiplicateur (1), *multipliées par la somme du multiplicateur* (2) *au même point x_0.*

D é m o n s t r a t i o n. Remplaçons la série (2) par une série nouvelle

$$\left[-\lambda(x_0) + \frac{\alpha_0}{2}\right] + \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \tag{2'}$$

$\lambda(x)$ désignant la somme de la série (2), et formons le produit formel de la série (1) et de cette série (2'); soit

$$\frac{k'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k'_n \cos nx + l'_n \sin nx \tag{3'}$$

ce nouveau produit formel.

Les coefficients de la série (3') sont définis par les formules (4) dans les quelles nous n'avons qu'à remplacer le nombre α_0 par $-2\lambda(x_0) + \alpha_0$; nous avons donc:

$$k'_n = k_n - \lambda(x_0)\,a_n;\quad l'_n = l_n - \lambda(x_0)\,b_n$$

Il en suit, qu'en désignant par $s_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes du multiplicateur (1) et par $\sigma_n(x)$ et $\sigma'_n(x)$ les sommes analogues pour les séries (3) et (3'), nous avons identiquement

$$\sigma'_n(x) = \sigma_n(x) - \lambda(x_0)\,S_n(x)$$

Mais la somme du multiplicateur (2') au point x_0 est égale à zéro. Donc d'après la première proposition de M. Rajchman, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = 0$$

Par conséquent on a

$$\text{pour } \lambda(x_0) > 0 \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sigma_n(x_0) = \lambda(x_0)\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ S_n(x) \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sigma_n(x_0) = \lambda(x_0)\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ S_n(x_0) \end{cases}$$

$$\text{pour } \lambda(x_0) < 0 \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sigma_n(x_0) = \lambda(x_0)\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ S_n(x_0) \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sigma_n(x_0) = \lambda(x_0)\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ S_n(x_0) \end{cases}$$

(ç. q. f. d.)

Remarque. Il est évident qu'on peut énoncer les deux propositions de M. Rajchman sous la forme du lemme qui vient d'être démontré, en convenant de poser $\infty . 0 = 0$ et $-\infty . 0 = 0$ dans le cas des limites d'indétermination infinies.

§ 12. Le lemme démontré au § 11 nous permettra d'établir les théorèmes suivants:

Théorème I. *Toute portion $\delta(E)$[1] du noyau simple E d'une série-nulle donnée contient une portion $\delta(N)$ du noyau réduit de la même série. De plus, la portion $\delta(E)$ peut être considérée comme le noyau simple d'une autre série-nulle, dont le noyau réduit coïncide avec la portion $\delta(N)$ déjà définie.*

Démonstration. Soit δ un intervalle quelconque contenant au moins un point x_0 du noyau simple E. Soit $\lambda(x)$ une fonction périodique de période 2π, égale à zéro en dehors de δ, positive dans δ et ayant des dérivées continues des trois premiers ordres. Soit la série (2) du § 11 sa série de Fourier (les conditions II étant vérifiées, car $\lambda(x)$ a des trois premières dérivées continues). Considérons le produit formel (3) de la série-nulle (1) donnée et de la série (2). La première proposition de M. Rajchman nous montre, que la série (3) converge vers zéro partout en dehors de δ et aux points de δ où la série (1) converge vers zéro. Supposons qu'il n'y a pas sur δ de points du noyau réduit N. D'après le lemme démontré et d'après le théorème déjà cité de M. Ch. de la Vallée-Poussin, la série (3) doit être la série de Fourier d'une fonction identiquement égale à zéro, ce qui n'est pas possible, puisqu'elle ne converge pas vers zéro au point x_0 du noyau simple E, suivant le lemme du § 11. La série (3) est donc une série-nulle et possède par conséquent un noyau simple et un noyau réduit. Son noyau simple coïncide d'après le lemme démontré avec $\delta(E)$, quant à son noyau réduit — il démontre l'existence de $\delta(N)$ avec lequel il coïncide certainement (toujours suivant le lemme du § 11[2]). (c. q. f. d.).

[1]) On appelle *portion* $\delta(E)$ d'un ensemble E *quelconque* une partie de E comprise dans l'intervalle δ.

[2]) Le théorème que nous venons de démontrer était obtenu d'abord par une méthode tout à fait différente et c'est grâce à la Note de M. Rajchman *„Sur le principe de localisation de Riemann"* que nous avons pu faciliter sa démonstration.

§ 13. Le théorème I du § 12 nous amène immédiatement aux corollaires suivants:

Corollaire I. *Il existe pour chaque ensemble (M) une infinité non dénombrable de séries-nulles dont les noyaux simples sont contenus dans l'ensemble (M) donné. D'ailleurs, parmi ces séries-nulles, il est possible de choisir un nombre fini aussi grand qu'on veut de séries linéairement indépendantes.*

Le premier point de l'énoncé est evidemment un corollaire du théorème I (§ 12); le second suit du fait, que deux séries-nulles ayant pour noyaux simples deux portions différentes du noyau simple de l'ensemble (M) donné doivent être linéairement indépendantes, puisqu'elles convergent et divergent dans des domaines différents.

Corollaire II. *Il existe pour chaque ensemble (M) E et pour chaque entier positif n une série-nulle, dont le noyau simple est contenu dans l'ensemble E donné et les n premiers termes possèdent des coefficients nuls.*

En effet, quelque soit l'entier positif m, nous pouvons construire m séries-nulles linéairement indépendantes et dont les noyaux sont tous contenus dans E (corollaire I). Soit

$$\frac{a'_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx$$

l'une de ces séries. Si $a'_0=0$, nous avons déja une série à terme constant nul; si ce n'est pas le cas, multiplions la série par $\frac{1}{a'_0}$. Soit

$$\frac{a''_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos nx + b''_n \sin nx$$

une autre série-nulle de la même famille; si $a''_0 \neq 0$, multiplions la par $\frac{1}{a''_0}$. Considérons maintenant la différence des deux séries-nulles obtenues. Ce sera une nouvelle série-nulle, qui a sûrement le terme constant égal à zéro. Opérant d'une manière analogue sur deux séries linéairement indépendantes et ayant leurs termes constants nuls, nous allons annuler le coefficient de $\cos x$ et ainsi de suite jusqu'à ce que nous n'annulons les n premiers termes éxigés. (c. q. f. d.)

Il serait trés intéressant de savoir, s'il est possible d'annuler *une infinité* de coefficients d'une série-nulle dont le noyau est contenu dans un ensemble *(M) donné E.*

§ 14. Nous avons démontré au § 13 l'existence, pour chaque ensemble *(M)* donné, d'une série-nulle à terme constant $a_o = 0$. Il nous sera utile dans la suite de démontrer une proposition en quelque sorte inverse:

Théorème II. *Il existe pour chaque ensemble (M) une série-nulle à terme constant* $a_o \neq 0$.

Démonstration.

Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6}$$

l'une des séries-nulles, ayant son noyau simple contenu dans l'ensemble *(M)* donné. Nous supposons $a_o = 0$, car, dans le cas contraire, le théorème proposé serait déjà démontré. Posons

$$\lambda(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^8} \cos nx + \frac{b_n}{n^8} \sin nx \tag{7}$$

La constante C doit être choisie de maniére à faire $\lambda(x) \neq 0$ pour tout point x, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Ce choix est toujours possible, puisque la série de la formule (7) définit une fonction bornée. Les coefficients de la série (6) vérifient la condition (I) du lemme sur le produit formel (§ 11), parce que la série (6) converge presque partout; les coefficients de la série (7) vérifient la condition (II) du même lemme, puisqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \frac{a_n}{n^8} = \lim_{n\to\infty} n^8 \frac{b_n}{n^8} = 0.$$

Donc, le produit formel des séries (6) et (7) converge vers zéro dans les points et dans ces points seulement $(\lambda(x) \neq 0)$, où converge vers zéro la série (6). Cela prouve que le noyau simple du produit formel coïncide avec le noyau simple de la série (6), donc ce noyau doit être contenu dans l'ensemble *(M)* donné. Mais le terme constant de ce produit formel est différent de zéro. En effet, en le désignant par k_o, on a d'aprés la première des formules (4) du § 11 l'égalité suivante

$$k_o = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_p + b_p \beta_p = \frac{a_o \alpha_o}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \alpha_p + b_p \beta_p.$$

Nous avons pour les séries (6) et (7)

$$a_o = 0; \quad \alpha_n = \frac{a_n}{n^8}; \quad \beta_n = \frac{b_n}{n^8}$$

Donc

$$k_o = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \frac{a_p}{p^8} + b_p \frac{b_p}{p^8} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{p^8} > 0$$

puisque tous les coefficients de la série (6) ne peuvent être nuls. (c. q. f. d.)

§ 15. **Théorème III.** *Il existe pour toute série-nulle un ensemble parfait P en dehors duquel la série converge vers zéro et tel que le noyau réduit N de cette série est un résiduel*[1]) *de P*

Demonstration.

Nous avons vu que le noyau réduit N d'une série nulle est un ensemble non dénombrable et du type G_δ (§ 10). Soit P l'ensemble des points de condensation (les points de M. Lindelöf) de N. On sait qu'un tel ensemble est toujours parfait. D'aprés la définition de P, le noyau réduit N a au plus un ensemble dénombrable de points en dehors de P, et sur chaque portion $\delta(P)$ de P l'ensemble N a une infinite non dénombrable de points. Il en suit que N est partout dense sur P, et, comme il est un ensemble du type G_δ, il doit être un *résiduel* de P.

Il reste à montrer que *partout* en dehors de P la série nulle donnée converge vers zéro

[1]) C'est à dire la partie commune de N et de P est le complémentaire d'un ensemble de première catégorie sur P. cf. A. Denjoy. *Mémoire sur les nombres dérivés de fonctions continues.* Journal des Mathématiques pures et appliqées, 1915.

En effet, supposons, par impossible, que x_0 est un point n'appartenant pas à P et dans lequel la série donnée ne converge pas vers zéro. Soit δ un intervalle contenant x_0 et ne contenant pas de points de P. Soit $\lambda(x)$ une fonction périodique de période de 2π, égale à zéro en dehors de δ, positive sur δ et ayant ses trois premières dérivées continues.

Considérons le produit formel de la série de Fourier de $\lambda(x)$ et de la série nulle donnée. La première proposition de M. Rajchman et le lemme du § 11 nous apprennent que ce produit converge vers zéro presque partout, ne converge d'ailleurs pas vers zéro au point x_0 et son noyau réduit contient une infinité dénombrable de points au plus. Cela contredit au théorème du § 10, d'après lequel le noyau réduit est un ensemble non dénombrable.

(c. q. f. d.)

§ 16. Le théorème III du § 15 nous permet d'énoncer le résultat général suivant:

Théorème IV. *Il n'existe pas d'ensemble (M) contenu dans une infinité dénombrable d'ensembles parfaits (U)*

Démonstration.

Supposons, par impossible, que E' est un ensemble *(M)* contenu dans une infinité dénombrable d'ensembles parfaits *(U)*. Soit $P_1, P_2, \dots P_n, \dots$ ces ensembles et

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots$$

(les ensembles P_n peuvent avoir des points communs).

Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

une série-nulle qui converge vers zéro en dehors de E'; soit E son noyau simple, N son noyau réduit et P l'ensemble parfait dont N est un résiduel et en dehors duquel la série (1) converge vers zéro (voir § 15).

L'ensemble N est contenu dans E', donc dans S. Par conséquent, S est un résiduel de P. Or, dans le cas où tous

les ensembles P_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont de première catégorie sur P cela est impossible. Il existe donc un nombre naturel n tel que l'ensemble P_n n'est pas de première catégorie sur P; P et P_n étant parfaits, il en suit qu'il existe une portion $\delta(P)$ de l'ensemble P, qui est contenue dans l'ensemble P_n. Mais, d'après le théorème I du § 12 cette portion contient un noyau simple d'une autre série-nulle, donc elle est un ensemble *(M)*. Donc, l'ensemble P_n qui contient $\delta(P)$ est aussi un ensemble *(M)* ce qui est contradictoire à notre hypothèse.

Corollaire. *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits (U) est un ensemble (U).*

C'est en nous appuyant sur ce corollaire que nous construisons (au Chapitre II de ce Mémoire) un ensemble parfait (U) qui n'est pas de type (H), et un ensemble (U) qui est partout dense et a la puissance du continu dans chaque intervalle.

Malheureusement notre corollaire n'est démontré que pour les ensembles (U) *parfaits*. En ce qui concerne les ensembles (U) non dénombrables et d'ailleurs *quelconques*, nous ne savons même pas si la somme de *deux* ensembles (U) sans points communs est un ensemble (U). Cette proposition est très probable pour les ensembles (U) *mesurables* (B). Pour les ensembles (U) non mesurables (L) (s'il existe de tels ensembles), cette proposition n'est déjà pas exacte: en effet nous avons vu au § 5 (en employant l'hypothèse du continu bien ordonné) qu'il existe deux ensembles (U), dont la somme coïncide avec le segment $[0, 2\pi]$ total.

Remarque. M. Rajchman dans une lettre adressée à M. Lusin fait l'hypothèse suivante:

„Il me paraît bien probable, écrit-il, qu'au moins pour les ensembles fermés pour qu'un ensemble soit (U) il faut et il suffit qu'il soit du type H_σ" [1]).

Nous venons de démontrer la suffisance de cette condition, mais la question si elle est nécessaire reste à résoudre. Il nous semble qu'elle n'est pas nécessaire même pour les ensembles fermés, quoique nous ne connaissons pas encore d'ensemble parfait (U) qui ne soit pas du type H_σ.

[1]) On appelle H_σ la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de type (H).

Quant aux ensembles non fermés, on ne sait même pas si tous les ensembles (U) sont *de première catḫégorie.*

Toutes ces questions paraissent très difficiles à résoudre.

§ 17. Jusqu'à présent nous avons étudié les propriétés des ensembles (M) les plus généraux. Passons maintenant à l'étude des ensembles *parfaits* et cherchons les critères pour qu'un ensemble parfait donné soit un ensemble (M).

Soit P, Mes $P=0$, un ensemble parfait (M). Il existe donc une série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6}$$

à coefficients non nuls qui converge vers zéro dans les intervalles contigus à P. (Nous supposons $a_0=0$ pour faciliter les calculs; ce n'est pas une restriction d'après le corollaire II du § 13).

Intégrons formellement la série (6) terme à terme. Nous obtenons

$$C+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \tag{8}$$

La série (8) converge presque partout, d'après un théorème de M. Fatou[1]), puisque ses coefficients se présentent sous la forme $\frac{\varepsilon_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n=0$.

Elle définit donc une fonction $F(x)$, qui n'est pas une constante absolue en dehors de P et qui a les propriétés suivantes:

1^0 $F(x)$ est constante dans chaque intervalle contigu à P;

2^0 $$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha=0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha=0$$

[1]) P. Fatou. *Séries trigonométriques et séries de Taylor.* Acta Mathematica, t. 30, p. 379, 1906.

En effet la propriété 1^0 est une conséquence d'un théorème de M. Lusin[1]) d'après lequel une série trigonométrique convergente dans chaque point d'un intervalle vers une fonction continue est intégrable terme à terme dans cet intervalle.

La propriété 2^0 est évidente, car (8) est la série de Fourier de $F(x)$ et on a de plus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Mais l'existence d'une fonction $F(x)$, non constante absolue en dehors de P, vérifiant les conditions 1^0 et 2^0 est aussi *suffisante* pour que cet ensemble parfait P soit un ensemble (M).

En effet, dérivons formellement terme à terme la série de Fourier de $F(x)$; nous obtiendrons une série (6) à coefficients tendant vers zéro (en vertu de la condition 2^0) qui est sommable par le procédé de Riemann et représente zéro dans chaque intervalle contigu à P. Mais la convergence au sens ordinaire d'une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro ne dépend que de la façon dont se comporte la fonction au voisinage du point considéré. Il en résulte que la série (6) converge vers zéro dans chaque intervalle contigu à P.

En résumé: *pour qu'un ensemble parfait P soit un ensemble (M) il faut et il suffit qu'il existe une fonction $F(x)$, non constante absolue en dehors de P, constante dans les intervalles contigus à P, et telle que*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha=0$$

Il est évident que les deux dernières égalités peuvent être remplacées par l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(\alpha-x)\, d\alpha = 0$$

valable pour tout x appartenant au segment $[0, 2\pi]$.[2])

[1]) N. Lusin *L'intégrale et la série trigonométrique.* Thèse (en russe) Moscou 1915, p. 222.

[2]) La suffisance de cette condition a été déjà utilisée par M. Menchoff dans sa Note *„Sur l'unicité du développement trigonométrique"*, Comptes Rendus, t. 163, 1916.

Le critère que nous venons d'établir n'est au fond qu'une traduction en langue mathématique de la définition logique des ensembles (M). Mais ce n'est qu'en nous appuyant sur la *suffisance* de ce critère que nous obtenons au § 18 une condition suffisante pour qu'un ensemble parfait soit un ensemble (M) la condition étant exprimable en termes de la structure de cet ensemble parfait même. La *nécessité* de ce critère sera employé au § 19 pour démontrer l'existence des ensembles parfaits (U).

§ 18. a) Nous voulons donner maintenant *une condition suffisante, pour qu'un ensemble P soit un ensemble (M).*

Désignons le segment $[0, 2\pi]$ par ρ^0;

1⁰) excluons de ρ^0 l^0 intervalles $\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_{l^0}$ (l^0 étant un entier positif absolument quelconque); désignons par

$$\rho'_1, \rho'_2, \ldots \rho'_{k_1}$$

les $k_1 = l^0 + 1$ segments qui restent (nous supposons que les points $x = 0$ et $x = 2\pi$ ne seront jamais exclus);

2⁰) excluons de chaque segment ρ^1_i $(i = 1, 2, \ldots k_1)$ l^1_i intervalles

$$\delta^2_{i1}, \delta^2_{i2}, \ldots \delta^2_{il^1_i}$$

(l^1_i — entier positif absolument quelconque; $i = 1, 2, \ldots k_1$). Soit

$$\rho^2_1, \rho^2_2, \ldots \rho^2_{k_2}$$

les segments qui restent; on a $k_2 = \sum_{i=1}^{k_1} (l^1_i + 1)$.

m^0) Continuons ce procédé. En général (pour $m = 1, 2, 3, \ldots$) les k_{m-1} segments

$$\rho^{m-1}_1, \rho^{m-1}_2, \ldots \rho^{m-1}_{k_{m-1}}$$

qui restent quand on a fait les $m-1$ premiers pas, étant fixés, excluons de chaque segment ρ^{m-1}_i les intervalles

$$\delta^m_{i1}, \delta^m_{i2}, \ldots \delta^m_{il^{m-1}_i}$$

(l^{m-1}_i — entier positif absolument quelconque; $i = 1, 2, \ldots k_{m-1}$). On obtient ainsi k_m segments

$$\rho^m_1, \rho^m_2, \ldots \rho^m_{k_m}$$

en posant

$$k_m = \sum_{i=1}^{k_{m-1}} (l^{m-1}_i + 1).$$

Désignons par R_m le systéme de tous les ρ^m_i (m fixe, $i = 1, 2, \ldots k_m$), par D^m_i le système des δ^m_{ij} exclus de ρ^{m-1}_i (i fixe, $j = 1, 2, \ldots l^{m-1}_i$), enfin par D_m la somme de tous les D^m_i (m fixe, $i = 1, 2, \ldots k_{m-1}$). Pour abréger l'exposition nous désignerons par une même lettre les intervalles et leurs longueurs.

En excluant du segment fondamental $[0, 2\pi]$ tous les systèmes D_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ nous obtenons un ensemble parfait P. Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur les longueurs des δ et des ρ. Ainsi notre procédé est susceptible de donner chaque ensemble parfait discontinu P, quel que soit cet ensemble.

Pour que cet ensemble soit de mesure nulle il faut et il suffit qu'on ait $\frac{D_{m+1}}{R_m} = u_m$, *$u_m$ étant le terme général d'une série divergente.* (condition **A**).

En effet, on a

$$R_0 = \rho^0 = 2\pi$$

$$R_1 = R_0 - D_1 = 2\pi\left(1 - \frac{D_1}{R_0}\right)$$

$$R_2 = R_1 - D_2 = 2\pi\left(1 - \frac{D_1}{R_0}\right)\left(1 - \frac{D_2}{R_1}\right)$$

. . . .

$$R_m = R_{m-1} - D_m = 2\pi\left(1 - \frac{D_1}{R_0}\right)\left(1 - \frac{D_2}{R_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{D_m}{R_{m-1}}\right)$$

$$(m = 1, 2, 3 \ldots)$$

En désignant le rapport $\frac{D_{m+1}}{R_m} = u_m$, on a

$$R_m = 2\pi \prod_{j=0}^{m-1} (1 - u_j)$$

Pour que l'ensemble P soit de mesure nulle il faut et il suffit que le produit infini

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1-u_m)$$

diverge, ce qui est équivalent à la divergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j$$

en vertu d'un théorème classique.

(c. q. f. d.)

b) Dans la suite, puisque les ensembles de mesure positive ne nous intéressent pas, car leur propriété d'être des ensembles (M) a été démontrée au § 6, nous supposerons la condition A toujours vérifiée. Donc l'ensemble parfait P, construit par le procédé indiqué, sera un ensemble de mesure nulle.

Pour passer maintenant aux ensembles (M) il faut faire quelques hypothèses restrictives sur les longuers des δ et des ρ, car autrement nous avons un ensemble parfait P, Mes $P=0$, absolumont quelconque.

Supposons donc que les conditions suivantes sont vérifiées.

Condition **B.** *Il existe pour tout entier positif m un nombre déterminé positif ε_m, tel que*

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0 \quad \text{et} \quad \frac{D_i^{m+1}}{\rho_i^m}\leqslant\varepsilon_m$$

pour $i=1,2,\ldots k_m$ et pour $m=1,2,3,\ldots$

Condition **C.** *En désignant par $\rho_{i\,max}^{m+1}$ et $\rho_{i\,min}^{m+1}$* (m et i fixes, m — entier positif, $1\leqslant i\leqslant k_m$) *les longueurs du plus grand et du plus petit des segments ρ^{m+1}, contenus dans ρ_i^m, supposons qu'on a toujours*

$$\left|\frac{\rho_{i\,max}^{m+1}}{\rho_{i\,min}^{m+1}}\right|<C, \quad \begin{matrix} m=1,2,3,\ldots \\ 1\leqslant i\leqslant k_m \end{matrix}$$

C étant une constante absolue.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème V. *Tout ensemble parfait P, Mes $P=0$, vérifiant les conditions B et C, est un ensemble (M).*

Remarque I. On s'assure sans peine, que l'ensemble (M) de M. Menchoff[1]) vérifie les conditions B et C.

Remarque II. La démonstration du théorème V est assez longue et compliquée. On pourrait sûrement la simplifier en certains points en utilisant toujours la condition C, mais il nous semble que cette condition n'est pas nécessaire pour que l'ensemble parfait, construit par la méthode précédente, soit un ensemble (M). Nous croyons qu'on pourrait affaiblir ou même supprimer la condition C sans troubler la vérite du théorème V. C'est pourquoi nous avons exposé la démonstration de ce théorème en n'utilisant la condition C que dans un seul point de cette démonstration; nous espérons, qu'il sera possible de modifier ce dernier point de telle maniere, que la condition C sera superflue ou qu'au plus nous serons obligés d'employer seulement les conditions B et C', C' désignant une hypothèse moins restrictive que l'hypothèse C.

D é m o n s t r a t i o n:

c) Soit $F_1(x)$, $F_2(x),\ldots, F_m(x)\ldots$ une suite de fonctions périodiques de période 2π et définies comme il suit

1°. $F_m(0)=F_m(2\pi)=0$ $(m=1,2,3,\ldots)$

2°. $F_1(x)=c_i$ sur δ_i^1 $(i=1,2,3,\ldots l^0)$, les c_i étant des constantes positives, telles que

$$c_1<c_2<\cdots<c_{E\left(\frac{l^0}{2}\right)+1};\ c_{E\left(\frac{l^0}{2}\right)+1}=1;\ c_{E\left(\frac{l^0}{2}\right)+1}>c_{E\left(\frac{l^0}{2}\right)+2}>\cdots>c_{l^0},$$

(E désignant le symbole de la partie entière). Du reste les c_i sont tout à fait arbitraires.

3°. $F_1(x)$ varie linéairement sur les segments ρ_i^1 $(i==1,2,\ldots k_1)$.

Supposons les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x),\ldots, F_m(x)$ déjà définies et telles, que $F_k(x)$ est constante sur le système $S_k=D_1+$ $+D_2+\cdots+D_k$ et s'interpôle linéairement sur le système R_k $(k=1,2,.., m)$.

Nous définirons la fonction $F_{m+1}(x)$ par les conditions suivantes:

4°. $F_{m+1}(x)=F_m(x)$ sur le système S_m.

En désignant par $\rho_{i\,max}^{m+1}$ le plus grand des segments ρ^{m+1} contenus dans le segment ρ_i^m ou le premier (de gauche à droite) d'entre eux, s'il y en a plusieurs égaux, posons

[1]) Note citée au § 6.

5^0. $F_{m+1}(x) = F_m(x)$ sur tous les $\rho^{m+1}_{i\,max}$ $(i = 1, 2, \dots k_m)$.

6^0. $F_{m+1}(x) = F_m(a^{m+1}_{ij})$ sur les $\delta^{m+1}_{ij} = (a^{m+1}_{ij}, b^{m+1}_{ij})$ qui sont à droite de $\rho^{m+1}_{i\,max}$ (i fixe $1 \leqslant i \leqslant k_m$; $j = 1, 2, \dots l^m_i$) $F_{m+1}(x) = F_m(b^{m+1}_{ij})$ sur les $\delta^{m+1}_{ij} = (a^{m+1}_{ij}, b^{m+1}_{ij})$ qui sont á gauche de $\rho^{m+1}_{i\,max}$ (i fixe $1 \leqslant i \leqslant k_m$; $j = 1, 2, \dots l^m_i$).

7^0. $F_{m+1}(x)$ varie linéairement sur les segments du système R_{m+1}.

Ainsi la suite infinie des fonctions $F_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ est définie sans ambiguïté. Chacune des fonctions $F_m(x)$ est continue, constante sur les intervalles du système S_m (m-fixe) et linéaire sur R_m.

Nous allons démontrer que la suite $F_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ converge uniformément dans $[0, 2\pi]$ vers une limite $F(x)$, continue (en vertu de la convergence uniforme) et constante dans chaque intervalle contigu à P

En effet, considérons au lieu de la suite $F_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ la série

$$F_1(x) + [F_2(x) - F_1(x)] + \dots + [F_{m+1}(x) - F_m(x)] + \dots \tag{9}$$

Soit m un nombre fixe. On a

$$R_m + S_m = [0, 2\pi]$$

Pour chaque point x du segment $[0, 2\pi]$ on peut distinguer deux cas, ou bien $x \subset R_m$, ou bien $x \subset S_m$. Si $x \subset S_m$, on a $F_{m+1}(x) - F_m(x) = 0$; $F_{m+2}(x) - F_{m+1}(x) = 0, \dots$ Si $x \subset R_m$, on a $x \subset \rho^m_{i_m}$ pour un certain i_m, $1 \leqslant i_m \leqslant k_m$.

Il est aisé de voir, qu'en désignant la variation de $F_m(x)$ sur $\rho^m_{i_m}$ par $\Delta^m_{i_m}$, on aura

$$|F_{m+1}(x) - F_m(x)| \leqslant \varepsilon_m |\Delta^m_{i_m}| \tag{10}$$

En effet, la différence $|F_{m+1}(x) - F_m(x)|$, considérée dans le segment $\rho^m_{i_m}$, a ses maxima relatifs parmi les extrémités (gauches ou droites) des segments ρ^{m+1} contenus dans $\rho^m_{i_m}$, y étant égale à

$$\delta^{m+1}_{i_m, j} \frac{|\Delta^m_{i_m}|}{\rho^m_{i_m}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots l^m_{i_m}).$$

Mais il est évident, que

$$\delta^{m+1}_{i_m, j} \leqslant D^{m+1}_{i_m} \quad (j = 1, 2, \dots l^m_{i_m})$$

(l'égalité ayant lieu dans le cas où $l^m_{i_m} = 1$). On a donc

$$|F_{m+1}(x) - F_m(x)| \leqslant \frac{D^{m+1}_{i_m}}{\rho^m_{i_m}} |\Delta^m_{i_m}| \quad \text{sur } \rho^m_{i_m}.$$

Mais d'après la condition B (point b) de ce §) on a pour m fixe et $1 \leqslant i_m \leqslant k_m$

$$\frac{D^{m+1}_{i_m}}{\rho^m_{i_m}} \leqslant \varepsilon_m,$$

d'ou l'inégalité cherchée (10).

Quel que soit le point x du segment $[0,2\pi]$ il appartient ou bien à P, ou bien à l'un des intervalles contigus à P. Par conséquent il appartient à une suite de segments $\rho^0 \supset \rho^1_{i_1} \supset \rho^2_{i_2} \supset \dots \supset \rho^m_{i_m} \supset \dots$, cette suite ne contenant qu'un nombre fini de termes (au moins un: ρ^0), lorsque x n'appartient pas à P.

Il faut distinguer deux cas pour chaque m fixe 1^0 $\rho^{m+1}_{i_{m+1}} \equiv \rho^{m+1}_{i_m\,max}$ et 2^0 $\rho^{m+1}_{i_{m+1}} \not\equiv \rho^{m+1}_{i_m\,max}$.

Dans le premier cas, on a $F_{m+1}(x) = F_m(x)$ pour tout $x \subset \rho^{m+1}_{i_{m+1}}$, d'après la construction des fonctions $F_m(x)$.

Revenons à la série (9) et considérons la valeur

$$r_m(x) = [F_{m+1}(x) - F_m(x)] + [F_{m+2}(x) - F_{m+1}(x)] + \dots$$

On a

$$|r_m(x)| \leqslant \sum_{q=m}^{\infty} |F_{q+1}(x) - F_q(x)| = \sum_{q=m}^{\infty}{}' |F_{q+1}(x) - F_q(x)|,$$

le signe Σ' est posé pour désigner, que nous remplaçons par zéro dans la série tous les termes, pour lesquels $\rho^{q+1}_{i_{q+1}} \equiv \rho^{q+1}_{i_q\,max}$.

De plus cette série ne contient qu'un nombré fini de termes, si le point x n'appartient pas à P.

En se servant de la formule (10) on a

$$|r_m(x)| \leqslant \sum_{q=m}^{\infty}{}' \varepsilon_q |\Delta_{i_q}^q|.$$

Posons

$$\eta_n = Max\,\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots\}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0 \quad (11); \qquad \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \eta_3 \geqslant \ldots \geqslant \eta_n \geqslant \ldots \tag{12}$$

Donc

$$|r_m(x)| \leqslant \eta_m \sum_{q=m}^{\infty}{}' |\Delta_{i_q}^q| \tag{13}$$

On se souvient qu'un terme $|\Delta_{i_q}^q|$ de la série de la formule (13) est ou bien le dernier terme de cette série (si $x \subset D_{q+1}$) ou bien si $x \subset \rho_{i_{q+1}}^{q+1}$, nous avons $\rho_{i_{q+1}}^{q+1} \equiv \rho_{i_q max}^{q+1}$ et par conséquent $|\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| \equiv |\Delta_{i_q max}^{q+1}|$.

Par conséquent on peut démontrer que cette série converge et a une somme $< K|\Delta_{i_m}^m|$, K étant une constante absolue, ne dépendant ni de x, ni de m.

En effet, nous allons voir, que si $|\Delta_{i_q}^q|$ n'est pas le dernier terme de la série (13), le terme suivant $|\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}|$ $(s \geqslant 1)$ vérifie l'inégalité

$$|\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}| < \theta\, |\Delta_{i_q}^q|, \quad \theta < 1\text{-constante absolue.} \tag{14}$$

En effet

$$|\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}| \leqslant |\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| \equiv |\Delta_{i_q max}^{q+1}|;\ |\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| + |\Delta_{i_q max}^{q+1}| \leqslant |\Delta_{i_q}^q|. \tag{15}$$

Mais $\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}$ = variation de $F_{q+1}(x)$ sur le segment $\rho_{i_{q+1}}^{q+1}$, donc, d'après la construction des fonctions $F_m(x)$, $\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}$ est égal à la variation de $F_q(x)$ sur la somme de $\rho_{i_{q+1}}^{q+1}$ et de l'intervalle voisin (de gauche ou de droite) δ^{q+1}. En désignant respectivement par $\Delta'^{q+1}_{i_{q+1}}$ et $\Delta''^{q+1}_{i_{q+1}}$ les variations de $F_q(x)$ sur $\rho_{i_{q+1}}^{q+1}$ et δ^{q+1}, on a d'abord

$$|\Delta'^{q+1}_{i_{q+1}}| \leqslant |\Delta_{i_q max}^{q+1}|; \tag{16}$$

ensuite le même raisonnement que nous avons utilisé pour démontrer la formule (10) nous donne

$$|\Delta''^{q+1}_{i_{q+1}}| \leqslant \varepsilon_q |\Delta_{i_q}^q|. \tag{17}$$

On a évidemment, d'après les formules (15) et (16),

$$|\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| + |\Delta'^{q+1}_{i_{q+1}}| \leqslant |\Delta_{i_q}^q|, \tag{18}$$

mais d'après la définition de $\Delta'^{q+1}_{i_{q+1}}$ et $\Delta''^{q+1}_{i_{q+1}}$

$$|\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| = |\Delta'^{q+1}_{i_{q+1}}| + |\Delta''^{q+1}_{i_{q+1}}|. \tag{19}$$

On tire des formules (17), (18) et (19)

$$2|\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| \leqslant (1+\varepsilon_q)|\Delta_{i_q}^q| \quad \text{ou} \quad |\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| \leqslant \frac{1+\varepsilon_q}{2}|\Delta_{i_q}^q|.$$

Mais ε_q tend vers zéro aves $\frac{1}{q}$, donc pour q assez grand on a sûrement

$$\frac{1+\varepsilon_q}{2} < \theta < 1$$

θ étant une constante absolue. Donc nous avons enfin

$$|\Delta_{i_{q+s}}^{q+s}| \leqslant |\Delta_{i_{q+1}}^{q+1}| < \theta\, |\Delta_{i_q}^q|$$

et la formule (14) est démontrée.

Il résulte de (13) et (14)

$$|r_m(x)| \leqslant \eta_m |\Delta_{i_m}^m| \sum_{q=0}^{\infty} \theta^q = \eta_m |\Delta_{i_m}^m| \frac{1}{1-\theta} = K\eta_m |\Delta_{i_m}^m|,$$

K étant une constante absolue.

On voit maintenant que quel que soit x dans $[0, 2\pi]$, on a pour m assez grand

$$|r_m(x)| < K\eta_m, \text{ car } |\Delta_{i_m}^m| < 1.$$

Donc la série (9) converge uniformément. *(c. q. f. d.)*

La fonction $F_m(x)$ qu'elle définit est constante dans chaque intervalle contigu à P, car pour m assez grand on a

$$F_m(x) = F_{m+1}(x) = \dots$$

dans un tel intervalle et chaque fonction $F_m(x)$ est constante dans le système S_m correspondant.

Il est évident, que $F(x)$ n'est pas une constante absolue en dehors de P. Nous allons démontrer que cette fonction $F(x)$ vérifie la condition

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n(\alpha - x)\, d\alpha = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

ce qui prouve (d'après le lemme du § 17) que l'ensemble parfait P est un ensemble (M).

Remarquons, qu'en démontrant la convergence uniforme de la série (9) nous avons de plus apprécié la valeur de $|F(x) - F_m(x)| = |r_m(x)|$

$$|F(x) - F_m(x)| < K\eta_m |\Delta_{i_m}^m| \text{ pour } x \subset \rho_{i_m}^m \qquad (20)$$

Nous utiliserons cette formule dans la suite.

d) Cela posé, nous allons construire maintenant un nouveau système de segments R'_m pour tout entier positif m, la suite R'_m $(m = 1, 2, 3, \dots)$ étant analogue à la suite R_m $(m = 1, 2, 3, \dots)$ définie au point a) de ce §, mais ayant de plus certaines propriétés nécessaires pour la démonstration de notre théorème.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m, \dots$ une suite de nombres *positifs, décroissants et tendant vers zéro.* De plus la condition suivante doit être vérifiée

$$\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} > \eta \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \qquad (21)$$

η désignant *une constante positive* aussi petite qu'on veut, mais fixe.

Soit ρ_i^k un segment du système R_k. Il est contenu dans un certain segment ρ_j^{k-1} du système R_{k-1} et contient des segments du système R_{k+1}. Nous dirons que ρ_i^k *appartient au système* R'_m, *quant les inégalités*

$$\rho_{j\,max}^k \geqslant \lambda_m; \ \rho_s^{k+1} < \lambda_m \qquad (22)$$

sont vérifiées pour toutes les valeurs s, telles que $\rho_s^{k+1} \subset \rho_i^k$.

Il est possible qu'un même segment ρ_i^k appartient à R'_m et à $R'_{m'}$, $m \neq m'$, mais il ne peut arriver que deux segments, par exemple ρ_i^k et ρ_i^{k+s}, tels que $\rho_i^k \supset \rho_i^{k+s}$, soient contenus dans un même système R'_m (ce qui suit de la définition même du système R'_m).

Aucun des systèmes R'_m, à partir d'un certain m, n'est privé d'éléments et chaque point de l'ensemble parfait P est contenu dans tous ces systèmes R'_m.

En effet, soit m un nombre fixe. A partir d'un certain rang, soit ν_m, tous les segments des systèmes R_n $(n \geqslant \nu_m + 1)$ seront $< \lambda_m$, puisque les ρ_i^n tendent vers zéro, pour n infini quel que soit i. Parmi les segments du système R_{ν_m} il y en a au moins un, qui appartient à R'_m En effet, s'il n'y en avait pas, tous les segments du système R_{ν_m} seraient $< \lambda_m$, donc ν_m pourrait être remplacé par $\nu_m - 1$. Un des segments du système R_{ν_m}, soit $\rho_i^{\nu_m}$, étant $> \lambda_m$, il est aisé de voir d'après la définition même, que tous les segments $\rho_j^{\nu_m}$ contenus dans le segment $\rho_k^{\nu_m - 1}$, tel que $\rho_i^{\nu_m} \subset \rho_k^{\nu_m - 1}$, tous ces segments appartiennent à R'_m, comme le segment $\rho_i^{\nu_m}$ lui même. Tous les segments du système $R^{\nu_m - 1}$ qui sont contenus dans le même $\rho^{\nu_m - 2}$ que le segment $\rho_k^{\nu_m - 1}$, appartiennent eux mêmes (ou les ρ^{ν_m} qu'ils contiennent) au système R'_m et ainsi de suite.

On voit sans peine que non seulement ce procédé de la formation de R'_m finira, mais qu'en désignant par μ_m le plus petit des indices k des $\rho^k \subset R'_m$, on a

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m = \infty \qquad (23)$$

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que quel que soit m, on a $\mu_m < A$, A étant un nombre fixe. Nous aurions donc quel que soit m un entier positif $n < A$ et un indice i, tels que $\rho_i^n < \lambda_m$. Cela est impossible, puisque λ_m tend vers zéro pour m tendant vers l'infini et n ne peut croître indéfiniment en vertu de la relation $n < A$. (c. q. f. d.)

Les segments de chaque système R'_m sont sans points communs et tels que tout point de P appartient à l'un de ces segments pour tout entier positif m assez grand.

e) Soit maintenant

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_m(x), \ldots$$

une suite de fonctions définies par les conditions:

1⁰ $\varphi_m(x) = F_k(x)$ sur chaque segment $\rho_i^k \subset R'_m$

2⁰ $\varphi_m(x) = F(x)$ en dehors de R'_m.

Il est aisé de voir, que chaque fonction $\varphi_m(x)$ est continue dans le segment $[0, 2\pi]$. Cela est évident pour chaque segment du système R'_m et pour chaque intervalle en dehors de R'_m. On voit sans peine que les extrémités de ces intervalles ne sont pas non plus des points de discontinuté de la fonction $\varphi_m(x)$, donc elle est continue partout dans $[0, 2\pi]$.

Définissons encore une suite de fonctions.

$$f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x), \ldots$$

par les conditions

3⁰ $f_m(x) = F_{k+1}(x)$ sur chaque segment $\rho_i^k \subset R'_m$

4⁰ $f_m(x) = F(x)$ en dehors de R'_m.

La fonction $f_m(x)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, comme la fonction $\varphi_m(x)$. En désignant par R''_m le système des segments où la fonction $f_m(x)$ n'est pas constante (où elle est linéaire), on voit que tous les segments de ce système sont $< \lambda_m$ (puisqu'ils sont contenus dans les segments du système R'_m.

f) Passons enfin à la démonstration de l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(x) \cos n(\alpha - x)\, d\alpha = 0$$

pour tout x, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Soit n un nombre fixe. Choisissons m vérifiant les deux inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu_{m-1}}\lambda_{m-1}}} \leqslant n < \frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu_m}\lambda_m}} \tag{24}$$

μ_m étant le nombre défini dans le point *d)* de notre démonstration. Il est évident qu'on a $\mu_{m-1} \leqslant \mu_m$, car un certain $\rho_i^{\mu_{m-1}}$ étant $> \lambda_{m-1}$, il sera *a fortiori* $> \lambda_m$. De plus la suite des nombres η_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est non croissante (point *c)* formule (12)), donc on a

$$\eta_{\mu_{m-1}} \geqslant \eta_{\mu_m}.$$

On a de plus

$$\lambda_{m-1} > \lambda_m$$

d'après les propriétés de la suite des nombres λ_m (point *d)*).

Il en suit que n étant fixe, le nombre m est choisi d'une manière unique.

On voit de plus, que pour $n \to \infty$, $m \to \infty$ puisque les nombres λ_m et η_{μ_m} tendent vers zéro pour $m \to \infty$.

Evaluons la valeur de l'intégrale

$$I^{(n)} = n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha = n\int_0^{2\pi} [F(\alpha) - f_m(\alpha)] \cos n(\alpha - x)\,d\alpha +$$

$$+ n\int_0^{2\pi} f_m(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}. \tag{25}$$

$$I_1^{(n)} = n\int_0^{2\pi} [F(\alpha) - f_m(\alpha)] \cos n(\alpha - x)\, d\alpha =$$

$$= n\int_{R''_m} [F(\alpha) - f_m(\alpha)] \cos n(\alpha - x)\, d\alpha$$

$f_m(x)$ et R''_m étant définis au point *e)* de la démonstration.

$$|I_1^{(n)}| \leqslant n\int_{R''_m} |F(\alpha) - f_m(\alpha)|\, d\alpha = n\left\{\sum_i{}' \int_{\rho_i^{\nu_{m+1}}} |F(\alpha) - F_{\nu_{m+1}}(\alpha)|\, d\alpha +\right.$$

$$+\sum_i{}' \int\limits_{\rho_i^{\nu_m}} |F(\alpha)-F_{\nu_m}(\alpha)|\,d\alpha+\cdots+\sum_i{}'\int\limits_{\rho_i^{\mu_m+1}}|F(\alpha)-F_{\mu_m+1}(\alpha)|\,d\alpha \Bigg\}$$

d'après la définition de la fonction $f_m(x)$ et le signe Σ' désignant que la somme ne contient que les segments qui sont contenus dans le système R''_m.

Chacune des différences sous le signe d'intégrale est du type que nous avons considéré au point *c*). On a donc en appliquant la formule (20)

$$|I_1^{(n)}|\leqslant Kn\Bigg\{\eta_{\nu_m+1}\sum_i{}'|\Delta_i^{\nu_m+1}|\rho_i^{\nu_m+1}+\eta_{\nu_m}\sum_i{}'|\Delta_i^{\nu_m}|\rho_i^{\nu_m}+$$

$$+\cdots+\eta_{\mu_m+1}\sum_i{}'|\Delta_i^{\mu_m+1}|\rho_i^{\mu_m+1}\Bigg\}.$$

Mais les η_n forment une suite non croissante; quant aux segments ρ qui entrent dans la formule précédente, ils appartiennent au système R''_m et sont donc d'après une remarque faite au point *e*) tous $<\lambda_m$. Il en suit

$$|I_1^{(n)}|\leqslant Kn\,\eta_{\mu_m+1}\lambda_m\Bigg\{\sum_i{}'|\Delta_i^{\nu_m+1}|+\sum_i{}'|\Delta_i^{\nu_m}|+\cdots+\sum_i{}'|\Delta_i^{\mu_m+1}|\Bigg\}.$$

Il est aisé de voir que la somme entre parenthèses est égale à 2. En effet les segments du système R''_m sont sans points communs (ce qui suit de la définition de ce système et du fait que les segments du système R'_m sont sans points communs). Chacun des termes $|\Delta_i^k|$ d'une somme $\Sigma'|\Delta_i^k|$ $(\mu_m+1\leqslant k\leqslant\nu_m+1)$ est égal à la variation absolue de la fonction $F_k(x)$ sur le segment ρ_i^k (voir la définition des nombres Δ_i^k, point *c*)). Mais la fonction $F(x)$ étant égale à $F_k(x)$ aux extrémités d'un tel segment, $|\Delta_i^k|$ peut aussi bien être considéré comme la variation de $F(x)$ sur le même segment ρ_i^k. Donc

la somme entre parenthèses est égale à la somme des variations de $F(x)$ sur les segments $\rho_i^k\subset R''_m$. Mais chaque point du segment total $[0,2\pi]$ appartient ou bien à un segment du système R''_m, ou bien à un intervalle contigu à l'ensemble parfait P. La fonction $F(x)$ étant constante dans chaque intervalle contigu à P, il est clair que sa variation absolue est égale à sa variation absolue sur R''_m, donc à la somme entre parenthèses. Nous avons donc démontré que cette somme est égale à 2, car telle est la variation absolue de $F(x)$ dans $[0,2\pi]$, $F(x)$ étant égale à zéro aux points $x=0$ et $x=2\pi$, et égale à un sur l'intervalle $\delta'_{E(\frac{p}{2})+1}$ où elle à son maximum, puisqu'elle est non décroissante à gauche et non croissante à droite de cet intervalle.

On obtient ainsi

$$|I_1^{(n)}|\leqslant 2Kn\,\eta_{\mu_m+1}\lambda_m\leqslant 2Kn\,\eta_{\mu_m}\lambda_m,$$

la suite des η étant non croissante. En utilisant l'inégalité (24) pour le nombre n, il suit

$$|I_1^{(n)}|\leqslant 2K\frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu_m}}\,\lambda_m}\,\eta_{\mu_m}\lambda_m=2K\sqrt{\eta_{\mu_m}}. \tag{26}$$

Nous avons démontrée au point d), qu'on a

$$\lim_{m\to\infty}\mu_m=\infty \tag{23}$$

La suite des nombres η_n est telle qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n=0 \tag{11}$$

Il suit des formules (26), (23) et (11), en remarquant que le nombre K de la formule (26) est une constante absolue

$$\lim_{n\to\infty}I_1^{(n)}=0 \tag{27}$$

Il nous reste à démontrer que l'intégrale $I_2^{(n)}$ de la formule (25) tend aussi vers zéro pour n infiniment croissant.

La fonction $f_m(x)$ est absolument continue. On peut donc intégrer $I_2^{(n)}$ par parties et l'on obtient

$$I_2^{(n)}=n\int\limits_0^{2\pi}f_m(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha=-\int\limits_0^{2\pi}f'_m(\alpha)\sin n(\alpha-x)\,d\alpha$$

(la partie tout intégrée est nulle en vertu de la périodicité de la fonction $f_m(x)$.

L'intégrale ainsi obtenue est la somme des deux suivantes

$$I_2^{(n)} = -\int_0^{2\pi} f_m' \sin n(\alpha - x)\, d\alpha = -$$

$$-\int_0^{2\pi} [f_m'(\alpha) - \varphi_m'(\alpha)] \sin n(\alpha - x)\, d\alpha -$$

$$-\int_0^{2\pi} \varphi_m'(\alpha) \sin n(\alpha - x)\, d\alpha = I_3^{(n)} + I_4^{(n)} \tag{28}$$

Evaluons la grandeur de $|I_3^{(n)}|$.

$$|I_3^{(n)}| \leqslant \int_0^{2\pi} |f_m'(\alpha) - \varphi_m'(\alpha)|\, d\alpha = \int_{R_m'} |f_m'(\alpha) - \varphi_m'(\alpha)|\, d\alpha =$$

$$= \sum_i{}' \int_{\rho_i^{\nu_m}} |F_{\nu_m+1}'(\alpha) - F_{\nu_m}'(\alpha)|\, d\alpha + \cdots +$$

$$+ \sum_i{}' \int_{\rho_i^{\mu_m}} |F_{\mu_m+1}'(\alpha) - F_{\mu_m}'(\alpha)|\, d\alpha$$

d'après la définition des fonctions f_m et φ_m, le signe Σ' désignant que tous les termes de cette somme appartiennent à R_m'.

Chaque segment ρ_i^k $(\mu_m \leqslant k \leqslant \nu_m)$ est égal à

$$\rho_i^k = D_i^{k+1} + \sum \rho_{j(i)}^{k+1}$$

l'indice $j(i)$ désignant que tous les segments $\rho_{j(i)}^{k+1} \subset \rho_i^k$.

On a donc

$$|I_3^{(n)}| \leqslant \left\{ \sum_i{}' \int_{D_i^{\nu_m+1}} |F_{\nu_m}'(\alpha)|\, d\alpha + \cdots + \sum_i{}' \int_{D_i^{\mu_m+1}} |F_{\mu_m}'(\alpha)|\, d\alpha \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_i{}' \int_{\sum_{j(i)} \rho_{j(i)}^{\nu_m+1}} |F_{\nu_m+1}'(\alpha) - F_{\nu_m}'(\alpha)|\, d\alpha + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \sum_i{}' \int_{\sum_{j(i)} \rho_{j(i)}^{\mu_m+1}} |F_{\mu_m+1}'(\alpha) - F_{\mu_m}'(\alpha)|\, d\alpha \right\} = I_5^{(n)} + I_6^{(n)} \tag{29}$$

car la fonction $F_{k+1}'(x) = 0$ dans D_i^{k+1} (pour $\mu_m \leqslant k \leqslant \nu_m$ et tous les indices i possibles). Mais d'après la construction des fonctions $F_m(x)$ on a pour tout point $x \subset \rho_i^k : F_k'(x) = \dfrac{\Delta_i^k}{\rho_i^k}$. Donc

$$I_5^{(n)} = \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\nu_m}|}{\rho_i^{\nu_m}} D_i^{\nu_m+1} + \cdots + \sum{}' \frac{|\Delta_i^{\mu_m}|}{\rho_i^{\mu_m}} D_i^{\mu_m+1} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{\nu_m} \sum_i{}' |\Delta_i^{\nu_m}| + \cdots + \varepsilon_{\mu_m} \sum_i{}' |\Delta_i^{\mu_m}| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_{\mu_m} \left\{ \sum_i{}' |\Delta_i^{\nu_m}| + \cdots + \sum_i{}' |\Delta_i^{\mu_m}| \right\} = 2\eta_{\mu_m} \tag{30}$$

d'après la condition B point b) et en appliquant à la dernière somme entre parenthèses le même raisonnement, qu'à une somme analogue dans le calcul de l'intégrale $I_1^{(n)}$.

Il suit immédiatement de la dernière inégalité

$$\lim_{n \to \infty} I_5^{(n)} = 0. \tag{31}$$

Considérons maintenant l'intégrale $I_6^{(n)}$. On a

$$I_6^{(n)} = \sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_{j(i)}^{\nu_m+1}|}{\rho_{j(i)}^{\nu_m+1}} - \frac{|\Delta_i^{\nu_m}|}{\rho_i^{\nu_m}} \right) \rho_{j(i)}^{\nu_m+1} + \cdots +$$

$$+ \sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_{j(i)}^{\mu_m+1}|}{\rho_{j(i)}^{\mu_m+1}} - \frac{|\Delta_i^{\mu_m}|}{\rho_i^{\mu_m}} \right) \rho_{j(i)}^{\mu_m+1} =$$

$$=\sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_{j(i)}^{\nu_m+1}|\, \rho_i^{\nu_m} - |\Delta_i^{\nu_m}|\, \rho_{j(i)}^{\nu_m+1}}{\rho_i^{\nu_m}} \right) + \cdots$$

$$\cdots + \sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_{j(i)}^{\mu_m+1}|\, \rho_i^{\mu_m} - |\Delta_i^{\mu_m}|\, \rho_{j(i)}^{\mu_m+1}}{\rho_i^{\mu_m}} \right) \tag{32}$$

Mais il est facile de voir qu'il suit de la construction des fonctions $F_m(x)$ et de la définition des Δ_i^q qu'on a pour chaque segment ρ^{q+1} contenu dans ρ_i^q et $\neq \rho_{i\,max}^{q+1}$

$$\Delta^{q+1} = \Delta_i^q \frac{\rho^{q+1} + \delta^{q+1}}{\rho_i^q} \tag{33}$$

l'intervalle δ^{q+1} étant voisin de ρ^{q+1} de gauche ou de droite, selon que ρ^{q+1} est respectivement à droite ou à gauche de $\rho_{i\,max}^{q+1}$. Et pour le segment $\rho_{i\,max}^{q+1}$ on a

$$\Delta_{i\,max}^{q+1} = \Delta_i^q \frac{\rho_{i\,max}^{q+1}}{\rho_i^q}. \tag{34}$$

La réunion des formules (32), (33) et (34) nous donne

$$I_6^{(n)} = \sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_i^{\nu_m}|\,(\rho_{j(i)}^{\nu_m+1} + \delta_{i,j(i)\pm 1}^{\nu_m+1}) - |\Delta_i^{\nu_m}|\, \rho_{j(i)}^{\nu_m+1}}{\rho_i^{\nu_m}} \right) + \cdots$$

$$\cdots + \sum_i{}' \sum_{j(i)} \left(\frac{|\Delta_i^{\mu_m}|\,(\rho_{j(i)}^{\mu_m+1} + \delta_{i,j(i)\pm 1}^{\mu_m+1}) - |\Delta_i^{\mu_m}|\, \rho_{j(i)}^{\mu_m+1}}{\rho_i^{\mu_m}} \right) =$$

$$= \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\nu_m}|}{\rho_i^{\nu_m}} \sum_{j(i)} \delta_{i,j(i)\pm 1}^{\nu_m+1} + \cdots + \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\mu_m}|}{\rho_i^{\mu_m}} \sum_{j(i)} \delta_{i,j(i)\pm 1}^{\mu_m+1} =$$

$$\sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\nu_m}|}{\rho_i^{\nu_m}} D_i^{\nu_m+1} + \cdots + \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\mu_m}|}{\rho_i^{\mu_m}} D_i^{\mu_m+1} = I_5^{(n)},$$

comme on le voit de la formule (30). On a donc d'après (31)

$$\lim_{n\to\infty} I_6^{(n)} = \lim_{n\to\infty} I_5^{(n)} = 0. \tag{35}$$

Par conséquent on obtient des formules (29) et (35)

$$\lim_{n\to\infty} I_3^{(n)} = 0. \tag{36}$$

Passons à l'intégrale $I_4^{(n)}$ de la formule (28). Nous avons:

$$I_4^{(n)} = -\int_0^{2\pi} \varphi_m'(\alpha) \sin n(\alpha - x)\, d\alpha = -\int_{R_m'} \varphi_m' \sin n(\alpha - x)\, d\alpha =$$

$$= -\sum_i{}' \frac{\Delta_i^{\nu_m}}{\rho_i^{\nu_m}} \int_{\rho_i^{\nu_m}} \sin n(\alpha - x)\, d\alpha - \cdots$$

$$\cdots - \sum_i{}' \frac{\Delta_i^{\mu_m}}{\rho_i^{\mu_m}} \int_{\rho_i^{\mu_m}} \sin n(\alpha - x)\, d\alpha. \tag{37}$$

Mais quel que soit le segment $[a, b]$, on a

$$\left| \int_a^b \sin n(\alpha - x)\, d\alpha \right| = \left| \frac{\cos n(a - x) - \cos n(b - x)}{n} \right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

Donc la formule (37) donne

$$|I_4^n| \leqslant \frac{2}{n} \left\{ \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\nu_m}|}{\rho_i^{\nu_m}} + \cdots + \sum_i{}' \frac{|\Delta_i^{\mu_m}|}{\rho_i^{\mu_m}} \right\} \tag{38}$$

Mais, *d'après la condition* C[1]), on a pour tout segment $\rho^k \subset \rho_i^{k-1}$ l'inégalité

$$\rho^k > \frac{1}{C} \rho_{i\,max}^k \tag{39}$$

Pour $\mu_m \leqslant k \leqslant \nu_m$ on a d'après la construction du système R_m' (point *d)*):

$$\rho_{i\,max}^k \geqslant \lambda_m. \tag{40}$$

[1]) C'est le seul point de la démonstration du théorème V où nous utilisons la condition C.

Il suit des formules (39) et (40), que tous les dénominateurs de la formule (38) sont $> \frac{1}{C}\lambda_m$, d'où

$$|I_4^n| \leqslant \frac{2C}{n\lambda_m}\left\{\sum_i{}' |\Delta_i^{\nu_m}| + \cdots + \sum_i{}' |\Delta_i^{\mu_m}|\right\} = \frac{4C}{n\lambda_m} \qquad (41)$$

car la somme entre parenthèses est égale à 2 (voir la formule (30) et le raisonnement qui démontre (26)).

Remarquons maintenant que d'après la formule (24) du point f) on a

$$n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu_{m-1}}}\,\lambda_{m-1}} \qquad (42)$$

et d'après (21) point d)

$$\lambda_m > \eta\,\lambda_{m-1} \qquad (43)$$

Les formules (41), (42) et (43) donnent

$$|I_4^{(n)}| < \frac{4C}{n\lambda_m} < \frac{4C}{\lambda_m}\sqrt{\eta_{\mu_{m-1}}}\,\lambda_{m-1} < \frac{4C}{\eta}\sqrt{\eta_{\mu_{m-1}}} \qquad (44)$$

Mais d'après les formules (23) et (11) il en suit

$$\lim_{n\to\infty} I_4^n = 0 \qquad (45)$$

Les formules (28), (36) et (45) donnent

$$\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)} = 0 \qquad (46)$$

et il résulte enfin des formules (25), (27) et (46)

$$\lim_{n\to\infty} I^{(n)} = \lim n \int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha = 0$$

C. q. f. d.

CHAPITRE II.

Sur les ensebles *(U)*.

§ 19. Nous nous proposons maintenant de démontrer l'existence des ensembles parfaits *(U)*.

Nous avons vu au § 17 que l'existence d'une fonction $F(x)$ non constante absolue en dehors de P, qui est constante dans chaque intervalle contigu à P et telle qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha = 0, \qquad (47)$$

est une condition *nécessaire* pour que l'ensemble considéré P soit un ensemble *(M)*.

Il nous sera très utile, dans la suite, de remarquer encore une proprété de cette fonction $F(x)$, à savoir que $|F(x)|^p$ *est une fonction sommable* (au sens de M. Lebesgue) quel que soit p positif.

En effet $F(x)$ est définie par la série

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx \qquad (8)$$

et on a de plus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad (48)$$

(voir le § 17). Donc la propriété que nous voulons démontrer est une conséquence immédiate du théorème suivant de M. Young[1]):

Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\frac{1}{p}} + b_n^{1+\frac{1}{p}}$$

une série absolument convergente (p entier impair positif), la fonction $f(x)$ étant définie par la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$|f(x)|^{p+1}$ est *sommable*.

Nous construirons maintenant une classe d'ensembles parfaits P tels que, pour *toute* fonction $F(x)$ non constante absolue en dehors de P et vérifiant les conditions:

[1]) Young. *Sur la sommabilité d'une fonction, dont la série de Fourier est donnée.* Comptes Rendus t. 155. 1912.

1^0 $F(x)$ est constante dans chaque intervalle contigu à P;

2^0 $|F(x)|^p$ est sommable, quel que soit p positif;

l'une au moins des intégrales

$$n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \quad \text{ou} \quad n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$$

ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini.

Il résulte de là que la condition *nécessaire* pour qu'un ensemble soit un ensemble (M) n'est pas vérifiée pour l'ensemble P ainsi défini; donc cet ensemble P est sûrement un ensemble (U).

Construction des ensembles P.

Nous allons utiliser dans la suite le théorème suivant démontré par M. M. Hardy et Littlewood[1]).

Soient $x_1, x_2, .. x_k$ des nombres réels tels que

1) x_i est irrationnel $(i=1,2,\dots k)$

2) il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers da la forme $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_k x_k + A_{k+1} = 0$.

Dans ces conditions $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_k$ étant des nombres réels quelconques vérifiant les inégalités $0 \leqslant \alpha_i < 1$ $(i=1,2,\dots k)$, on peut trouver une suite d'entiers positifs $n_1, n_2, .. n_\nu, ..$ tels que

$$\lim_{\nu\to\infty} n_\nu = \infty \text{ et } \lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Red}\,(n_\nu x_j) = \alpha_j \ (j=1,2,\dots k) \tag{49}$$

en désignant la quantité $x - \mathrm{E}(x)$ par $\mathrm{Red}(x)$ (la différence entre x et sa partie entière).

M. M. Hardy et Littlewood donnent quelques indications sur la rapidité avec laquelle les $\mathrm{Red}\,(n_\nu x_j)$ tendent vers les limites données α_j $(j=1,2,\dots k)$. En voici une[2]) qui nous sera nécessaire dans ce qui suit:

$x_1, x_2, .. x_k$ étant des quantités vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème précédent de M. M. Hardy et Littlewood et $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_k$ étant les limites vers lesquelles nous faisons tendre les

[1]) Hardy and Littlewood. *Some problems of Diophantine Approximation.* Acta Mathematica t. 37, p. 157.

[2]) Hardy et Littlewood. loc. cit. p. 173.

$\mathrm{Red}\,(n_\nu x_j)$, il existe une fonction $\chi(\nu, k, x_1, x_2, \dots x_k, \lambda)$, *ne dépendant pas de ces limites* $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_k$ et telle qu'on a certainement

$$\left|\mathrm{Red}\,(n\,x_j) - \alpha_j\right| < \frac{1}{\lambda} \qquad j=1,2,\dots k \tag{50}$$

pour au moins un entier positif n vérifiant les inégalités

$$\nu < n < \chi.$$ [1])

Ces remarques préliminaires étant faites, passons maintenant à la construction des ensembles parfaits P.

D'abord, il est facile de montrer qu'on peut trouver dans l'intervalle $(0,1)$ un ensemble dénombrable *partout dense* de points d'abscisses $x, x_2, .. x_k, ..$ tels qu'un nombre fini d'entre eux étant choisi arbitrairement ces quantités vérifient les conditions du théorème de M. M. Hardy et Littlewood[2]). Fixons donc une telle suite $x_1, x_2, .. x_k, ..$ L'ensemble des points $\theta_k = 2\pi x_k$ $(k=1,2,3,\dots)$ est évidemment partout dense sur $(0, 2\pi)$.

D'ailleurs, la suite $x_1, x_2, .. x_k, ..$ étant donnée et le nombre λ étant fixé une fois pour toutes (nous poserons $\lambda = 6$ pour faciliter les calculs), la fonction $\chi(\nu, k, x_1, x_2, \dots x_k, \lambda)$ devient une fonction $\chi(\nu, k)$. Nous posons.

$$\nu_1 = 1;\ \nu_2 = \chi(1, k_1), .. \nu_m = \chi(\nu_{m-1}, k_{m-1}), .. \tag{51}$$

(nous définirons la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, .. k_m, \dots$ un peu plus loin).

Pour construire maitenant l'ensemble parfait P nous allons (en conservant les notations du § 18 a)) prendre les extrémités droites des intervalles de chaque système D_m $(m=1,2,3,\dots)$ parmi les nombres $\theta_1, \theta_2, .. \theta_k, ..$ que nous venons de définir, (les nombres $\theta_1, \theta_2, .. \theta_k, ..$ étant partout denses dans $(0, 2\pi)$ et, par conséquent, partout denses dans tous les segments de R_{m-1} une telle construction est toujours possible).

[1]) L'énoncé qui vient d'être donné est une légère modification, très évidente d'ailleurs, de la proposition de M. M. Hardy et Littlewood.

[2]) Il suffit de prendre, par exemple, pour x_i la quantité $\mathrm{Red}\,(n_{\mu_i}\sqrt{p_i})$, en désignant par p_i le i-ème nombre premier et en choisissant les n_{μ_i} de manière que l'ensemble des $\mathrm{Red}\,(n_{\mu_i}\sqrt{p_i})$ soit partout dense sur $(0, 1)$, ce qui est évidemment possible.

Quant aux longueurs des intervalles exclus, il faut les prendre assez grandes pour que les conditions suivantes soient vérifiées

1^0 Mes $R_m < \frac{1}{\chi^{1+\varepsilon}(\nu_m, k_m)}$ $\qquad (m=1,2,3,\ldots)$ (52)

$\varepsilon > 0$ étant une quantité *fixe* aussi petite qu'on veut, R_m étant défini (comme au § 18) comme le complémentaire de la somme $D_1 + D_2 + \cdots + D_m$ par rapport à $[0, 2\pi]$.

Les k_m de la formule (51) désigneront (comme au § 18) le nombre des segments ρ_i^m dans le système R_m.

2^0 Chacun des segments ρ_i^m $(i=1,2,\ldots k_m)$ du système R_m doit être au plus égal à l'intervalle voisin de droite déjà exclu, plus précisément, en désignant par S_m la somme de tous les systèmes $D_1, D_2, \ldots D_m$

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} D_k$$

et en énumérant de gauche à droite tous les intervalles du système S_m, soient

$$d_1^m, d_2^m, \ldots d_{k_{m-1}}^m$$

ces intervalles (chaque d_i^m est égal à un $\delta_{i,j}^s$, $1 \leqslant s \leqslant m$, dans les notations du § 18 *a)*, la condition que nous venons d'énoncer équivaut à la relation

$$\rho_i^m \leqslant d_i^m \qquad (i=1,2,\ldots k_m - 1). \tag{53}$$

(pour $i = k_m$ cette relation n'a pas de sens, mais cela ne nous empêchera pas dans la suite).

Les systèmes $D_1, D_2, \ldots D_m, \ldots$ étant exclus du segment $[0, 2\pi]$, nous obtenons un ensemble parfait P de mesure nulle, puisque $\chi(\nu_m, k_m)$ tend vers l'infini avec m. *Cet ensemble est un ensemble (U).*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour toute fonction $F(x)$ non constante absolue en dehors de P, constante dans les intervalles contigus à P et telle que $|F(x)|^p$ est sommable pour tout p positif, l'une au moins des intégrales

$$n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \quad \text{ou} \quad n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$$

n'a pas pour limite zéro quand n tend vers l'infini.

Dans ce but, définissons une fonction m de n par les conditions

$$\left.\begin{array}{lll} m=1 & \text{pour} & 1 \leqslant n \leqslant \chi(1, k_1) \\ m=2 & \text{pour} & \chi(1, k_1) + 1 \leqslant n \leqslant \chi(\nu_2, k_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m=\mu & \text{pour} & \chi(\nu_{\mu-1}, k_{\mu-1}) + 1 \leqslant n \leqslant \chi(\nu_\mu, k_\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \tag{54}$$

Pour tout nombre n nous pouvons écrire l'identité

$$I_n = n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = n \int_{S_m} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha +$$

$$+ n \int_{R_m} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = I_n^{(1)} + I_n^{(2)} \tag{55}$$

Nous allons démontrer que l'intégrale I_n n'a pas de limite pour n tendant vers l'infini. A cet effet nous montrerons d'abord qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)} = 0$$

et puis que $I_n^{(1)}$ n'a pas de limite pour $n \to \infty$.

Nous avons en effet

$$|I_n^{(2)}| \leqslant n \int_{R_m} |F(\alpha)| \, d\alpha \leqslant \frac{1}{p+1} \int_{R_m} |F(\alpha)|^{p+1} d\alpha +$$

$$+ \frac{p}{p+1} n^{1+\frac{1}{p}} \int_{R_m} d\alpha, \tag{56}$$

c'est une inégalité qui est vraie pour p positif arbitraire et qui résulte de l'inégalité

$$(p+1)\, ab \leqslant a^{p+1} + p\, b^{1+\frac{1}{p}}$$

ayant lieu pour tout p positif et pour tous les nombres positifs a et b.

Dans ce qui suit nous posons $p = \mathrm{E}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$, $\varepsilon > 0$ étant la constante déjà employée dans la formule (52).

La première intégrale de la partie droite de la formule (56)

$$\int_{R_m} |F(\alpha)|^{p+1} d\alpha \tag{57}$$

tend vers zéro avec $m \to \infty$, puisque (57) est l'intégrale d'une fonction sommable étendue à un ensemble dont la mesure tend vers zéro.

Pour la seconde intégrale de la partie droite de la formule (56) nous avons

$$n^{1+\frac{1}{p}} \int\limits_{R_m} d\alpha = n^{1+\frac{1}{p}} \text{Mes } R_m < n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \text{Mes } R_m <$$

$$< \chi^{1+\frac{\varepsilon}{2}}(\nu_m, k_m) \frac{1}{\chi^{1+\varepsilon}(\nu_m, k_m)} < \frac{1}{\chi^{\frac{\varepsilon}{2}}(\nu_m, k_m)} \tag{58}$$

donc elle tend aussi vers zéro pour $m \to \infty$.

Ainsi nous avons démontré qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)} = 0. \tag{59}$$

Passons maintenant à l'intégrale $I_n^{(1)}$ de la formule (55). Nous la décomposons en deux parties

$$I_n^{(1)} = n \int\limits_{S_m} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{d_i^m} c_i^m \cos n\alpha \, d\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{d_i^m + \rho_i^m} c_i^m \cos n\alpha \, d\alpha - \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{\rho_i^m} c_i^m \cos n\alpha \, d\alpha = I_n^{(3)} + I_n^{(4)} \tag{60}$$

en désignant par c_i^m la valeur de $F(x)$ sur l'intervalle d_i^m ($F(x)$ est constante dans chaque intervalle contigu à l'ensemble parfait que nous avons construit).

Nous voulons démontrer l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(4)} = 0 \tag{61}$$

En effet désignons par σ_i^m un intervalle quelconque de longueur égale à ρ_i^m et qui est situé sur d_i^m $(i = 1, 2, \ldots k_m - 1)$ ce

qui est possible en vertu de la condition 2⁰ de la construction de l'ensemble parfait P $(\rho_i^m \leqslant d_i^m)$. Nous aurons:

$$|I_n^{(4)}| = \left| \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{\rho_i^m} c_i^m \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{\rho_i^m} |c_i^m| \, d\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_m-1} n \int\limits_{\sigma_i^m} |c_i^m| \, d\alpha = n \int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{k_m-1} \sigma_i^m} |F(\alpha)| \, d\alpha \tag{62}$$

La partie droite de la formule (62) tend vers zero quand n tend vers l'infini, comme on voit facilement en reprenant le raisonnement que nous avons fait pour démontrer l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)} = 0$$

Nous avons donc démontré l'égalité (61).

Il nous reste à démontrer que la quantite $I_n^{(3)}$ de la formule (60) n'a pas de limite pour $n \to \infty$. Or, nous avons

$$I_n^{(3)} = n \sum_{i=1}^{k_m-1} \int\limits_{\rho_i^m + d_i^m} c_i^m \cos n\alpha \, d\alpha = \sum_{i=1}^{k_m-1} c_i^m (\sin n b_i^m - \sin n b_{i-1}^m)$$

en désignant par b_i^m l'extrémité droite de l'intervalle d_i^m et en posant $b_o^m = 0$.

Mais nous avons construit les intervalles du système S_m de telle manière que leurs extrémités droites se trouvent parmi les nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k, \ldots$, définis plus haut. On peut donc remplacer chaque b_i^m $(i = 1, 2, \ldots k_m - 1)$ par un certain θ_{μ_i}, où l'indice μ_i ne dépend que de m et de i. On a donc.

$$I_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{k_m-1} c_i^m (\sin n\theta_{\mu_i} - \sin n\theta_{\mu_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{k_m-1} s_i^m \sin n\theta_{\mu_i}$$

en posant $s_i^m = c_i^m - c_{i+1}^m$, $c_{k_m}^m = 0$ et $\theta_{\mu_0} = b_0^m = 0$.

On a maintenant

$$I_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{k_m-1} s_i^m \sin n\theta_{\mu_i} = \sum_{i=1}^{k_m-1} s_i^m \sin 2\pi n \frac{\theta_{\mu_i}}{2\pi} = \sum_{i=1}^{k_m-1} s_i^m \sin 2\pi n x_{\mu_i} =$$

$$=\sum_{=1}^{k_m-1} s_i^m \sin 2\pi [n x_{\mu_i} - \mathrm{E}(n x_{\mu_i})] = \sum_{i=1}^{k_m-1} s_i^m \sin 2\pi \operatorname{Red}(n x_{\mu_i}) \quad (63)$$

Or, la suite infinie des quantités $x_1, x_2, .. x_k, ..$ a été définie de telle manière qu'un nombre fini d'entre eux étant choisi arbitrairement, ces quantités vérifient les conditions du M. M. Hardy et Littlewood. En particulier les x_{μ_i} $(i=1, 2, \ldots k_m-1)$ de la formule (63) vérifient les conditions de ce théorème.

Soient les nombres α_i du théorème de M. M. Hardy et Littlewood définis par les conditions:

$$\alpha_i = \frac{1}{4} \text{ pour } s_i^m \geqslant 0 \ (m \text{ fixe; } 1 \leqslant i \leqslant k_m - 1)$$

$$\alpha_i = \frac{3}{4} \text{ pour } s_i^m < 0 \ (m \text{ fixe; } 1 \leqslant i \leqslant k_m - 1).$$

On a, d'après le même théorème, une suite d'entiers positifs

$$n_1'(m), n_2'(m), .. n_q'(m), .. \quad (64)$$

tels qu'on a pour m fixe

$$\lim_{q\to\infty} n_q'(m) = \infty \text{ et } \lim_{q\to\infty} I^{(3)}_{n_q'(m)} = \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|$$

En posant pour m fixe

$$\alpha_i = \frac{3}{4} \text{ pour } s_i^m \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant k_m - 1)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{4} \text{ pour } s_i^m < 0 \ (1 \leqslant i \leqslant k_m - 1)$$

nous avons une autre suite d'entiers positifs

$$n_1''(m), n_2''(m), .. n_q''(m), .. \quad (65)$$

tels qu'on on a

$$\lim_{q\to\infty} n_q''(m) = \infty \text{ et } \lim_{q\to\infty} I^{(3)}_{n_q''(m)} = -\sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|$$

Un calcul tout à fait élémentaire nous montre que, les α_i étant ainsi choisis et λ étant pris égal à 6, on pourra affirmer, d'après la proposition de M. M. Hardy et Littlewood, que pour un certain $n'(m)$ de la suite (64) tel que

$$\nu_m < n'(m) < \chi(\nu_m, k_m),$$

nous aurons

$$\left| I^{(3)}_{n'(m)} - \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m| \right| \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m| \quad (66)$$

et pour un certain $n''(m)$ de la suite (65) tel que

$$\nu_m < n''(m) < \chi(\nu_m, k_m),$$

nous aurons

$$\left| I^{(3)}_{n''(m)} - \left(-\sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|\right) \right| \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|. \quad (67)$$

On déduit facilement des formules (66) et (67)

$$I^{(3)}_{n'(m)} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|; \quad I^{(3)}_{n''(m)} < -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|$$

Donc

$$I^{(3)}_{n'(m)} - I^{(3)}_{n''(m)} > \sum_{=1}^{k_m-1} |s_i^m| \quad (68)$$

Faisons tendre m vers l'infini. Il est clair, d'après la définition des nombres $n'(m)$ et $n''(m)$, en remarquant de plus que $\chi(\nu_m, k_m)$ tend vers l'infini avec $m \to \infty$, qu'on a

$$\lim_{m\to\infty} n'(m) = \lim_{m\to\infty} n''(m) = \infty$$

De plus, quel que soit m, on a vérifiée la formule (68). Mais il est aisé de voir que la quantité

$$\sum_{i=1}^{k_m-1} |s_i^m|$$

ne peut pas décroître quand m croît indéfiniment. Cela suit de la nature géométrique des nombres s_i^m, car ce sont *les sauts* d'une fonction égale à $F(x)$ sur le système S_m et égale à c_i^m sur chaque ρ_i^m.

D'ailleurs cette somme peut être égale à zéro au plus pour un nombre *fini* de valeurs de m, car autrement la fonction $F(x)$ serait une constante absolue en dehors de P.

On a donc pour $m \to \infty$

$$I^{(3)}_{n'(m)} - I^{(3)}_{n''(m)} > A$$

A étant une constante absolue.

Mais d'après la définition de m comme fonction de n (formule (54)), $m \to \infty$ avec $n \to \infty$.

Cela prouve que la quantité $I_n^{(3)}$ n'a pas de limite pour $n \to \infty$. Il suit de ce fait et des formules (55), (59), (60) et (61) que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$$

n'a pas non plus de limite pour $n \to \infty$, ce qui prouve d'après la remarque faite au commencement de la démonstration que l'ensemble parfait R est un ensemble (U). (c. q. f. d.)

§ 20. L'existence des ensembles parfaits (U) est ainsi démontrée. Pour obtenir ce résultat nous avons suivi une méthode qui diffère essentiellement de la méthode classique de Cantor, utilisée par M. Rajchman. L'essence de cette méthode classique est la démonstration du fait que l'hypothèse de convergence vers zéro d'une série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

en dehors d'un certain ensemble implique nécessairement les relations

$$a_0 = 0; \; a_n = b_n = 0 \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

On pourrait faire une remarque générale à propos de cette méthode. D'après le théorème II (§ 14) du présent Mémoire, il existe pour tout ensemble (M) une série-nulle à terme constant *différent de zéro.* Donc, si pour toute série trigonométrique qui converge vers zéro en dehors d'un certain ensemble on a démontré la seule égalité $a_0 = 0$, on n'a plus besoin de calculer les coefficiente a_n et b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, car on voit déjà que l'ensemble considéré est un ensemble (U).

Une autre remarque que nous allons faire concerne *toutes* les méthodes de démonstration du fait qu'un certain ensemble est un ensemble (U). Si l'ensemble dont il est question est un ensemble *parfait* il est inutile de considérer à part le cas de convergence ordinaire et de sommation par la méthode de Poisson. En effet, toute série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro sommable par le procédé de Poisson vers zéro en dehors d'un ensemble parfait P est nécessairement une série *convergente* vers zéro partout en dehors de cet ensemble P. Mais nous avons eu déjà l'occasion de traiter cette question au § 8 de l'Introduction.

§ 21. Nous nous proposons de démontrer maintenant *l'existence des ensembles parfaits (U) qui ne sont pas de type (H).*

Pour construire un tel ensemble, divisons le segment $[0, 2\pi]$ en une infinité dénombrable de segments $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

$$\delta_n = \left[\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right]; \text{ Mes } \delta_n = \frac{2\pi}{n(n+1)}$$

Soit P_n l'ensemble classique de Cantor construit sur δ_n (c'est-à-dire l'ensemble qu'on obtient par la méthode des divisions successives de δ_n et des segments qui restent en trois parties égales, dont on exclut toujours la seconde).

Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

et P l'ensemble — somme de S et du point $x = 0$.

Nous verrons que *P est un ensemble parfait (U) qui n'est pas de type (H).*

En effet, *P est parfait,* car il est fermé et ne contient pas de points isolés.

P est un ensemblc (U). En effet, chaque ensemble P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, d'après une remarque de M. Rajchman [1]) est un

[1]) Mémoire cité, p. 289.

ensemble de type *(H)* et, d'après le corollaire du théorème IV (§ 16 du présent Mémoire), la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits *(U)* est un ensemble *(U)*.

Enfin *P n'est pas de type (H)*. En effet, la longueur du plus grand arc contigu à 3_n (d'après les notations de M. Rajchman [1]) ne peut surpasser la grandeur du plus grand intervalle contigu à P_n, multipliée par n, c'est à dire

$$d_n \leqslant n\frac{\delta_n}{3} = n\frac{2\pi}{3\,n\,(n+1)} = \frac{2\pi}{3\,(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

et P n'est pas de type *(H)*

(c. q. f. d.)

§ 22. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des ensembles *(U)* parfaits et non denses. Mais il est facile de construire *un ensemble (U) partout dense et ayant la puissance du continu dans chaque intervalle.*

Il suffit de prendre sur le segment $[0, 2\pi]$ l'ensemble classique de Cantor, puis construire un ensemble de Cantor sur chaque intervalle contigu au premier ensemble, puis sur les contigus de l'ensemble obtenu et ainsi de suite infiniment.

L'ensemble obtenu par ce procédé étant une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de type *(H)* [1]) *est un ensemble (U)* (théorème IV, corollaire, § 16 du présent Mémoire). *Il est de plus partout dense et a la puissance du continu dans chaque intervalle.*

(c. q. f. d.)

Il serait très intéressant de savoir s'il existe un ensemble *(U)* de deuxième cathégorie. C'est une question qui reste à résoudre.

NOTE.

Quelques problèmes à résoudre.

Sur la rapidité de décroissance des coefficients des séries — nulles.

Il est clair, qu'on peut poser le problème de l'unicité du développement trigonométrique de manières très différentes. Voici,

[1]) L'ensemble de Cantor est un ensemble de type *(H)*; ce fait a été indiqué par M. Rajchman (loc. cit. p. 289).

par exemple, une question très importante, dont nous ne connaissons pas encore une solution rigoureuse et qui n'est qu'une autre forme du même problème:

Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

une série trigonométrique donnée. Supposons qu'elle converge vers zéro presque partout et, de plus, qu'on a

$$|a_n| < \varepsilon_n \quad |b_n| < \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

ε_n désignant un nombre positif et

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{3}$$

On demande maintenant, avec quelle rapidité ε_n doit-il tendre vers zéro pour que de la condition (2) on puisse sûrement déduire

$$a_0 = 0; \quad a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

On sait, par exemple, que la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$$

est suffisante pour une telle conclusion, parce que la série (1) deviendrait dans ce cas une série de Fourier-Lebesgue.

Ce cas trivial étant exclu, on se demande:

Une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ *étant donnée* (telle que la condition (2) n'est pas suffisante pour qu'une série à coefficients a_n et b_n soit une série de Fourier-Lebesgue) *existe-t-il toujours une série-nulle à coefficients vérifiant la condition* (2), *ou ce n'est pas le cas et, par conséquent, il existe des suites de nombres* ε_n *telles que la condition* (2) *implique* (4) *pour toute série trigonométrique convergeant vers zéro presque partout?*

Cette question est d'autant plus intéressante que nous ne connaîssons pas encore dans quel rapport se trouve la nature géométrique des ensembles *(M)* avec les coefficients des séries-nulles correspondantes. Chaque ensemble *(M)* admet une infinité de séries nulles différentes, mais on ne sait pas comment la rapidité de décroissance de leurs coefficients est liée avec la structure de cet ensemble. Il serait très intéressant de savoir s'il existe des séries-nulles relatives *à un même ensemble* (M) et dont les coefficients tendent vers zéro avec une rapidité très différente.

Il est possible que la suite des nombres ε_n est différente pour des ensembles (M) différents, mais nous ne pouvons affirmer rien à ce sujet.

Parmi les ensembles (M) que nous avons défini au § 18 il y en a qui ont des coefficient tels, que

$$|a_n| < \sqrt{u_{\mathrm{E}\lg n}}, \quad |b_n| < \sqrt{u_{\mathrm{E}\lg n}}$$

(E désignant le symbole de la partie entière), u_n étant le terme général d'une série *divergente arbitraire* (à termes tendant vers zéro). Nous n'avons pu obtenir de décroissance plus rapide, mais ce n'est peut être qu'une faute de la méthode du calcul des coefficients ou bien de la construction des fonctions $F(x)$, telles qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n(\alpha - x)\, d\alpha = 0$$

Il est possible qu'en changeant la fonction $F(x)$ ou la méthode du calcul on obtiendra une autre majorante pour les coefficients des séries-nulles des mêmes ensembles (M).

Mais il est très probable que les inégalités

$$|a_n| < \frac{1}{\lg^2 n}; \quad |b_n| < \frac{1}{\lg^2 n}$$

et la convergence vers zéro presque partout de la série trigonométrique impliquent sûrement les identités

$$a_0 = 0, \quad a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sur la notion d'intégrale.

M. Denjoy[1]) a réussi de donner la résolution du problème suivant:

Une série trigonométrique, convergente *en chaque point* du segment $[0, 2\pi]$ étant donnée, trouver un procédé régulier

[1]) A. Denjoy. *Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente dont la somme est donnée*: Comptes Rendus t. 172, 1921.

(analogue à la sommation de M. Lebesgue mais plus général que cette dernière), qui permette de calculer les coefficients de cette série quand on ne connaît que sa somme.

Il est naturel de se poser maintenant la question générale:

Etant donnée une série trigonométrique convergente *partout en dehors d'un ensemble* (U), trouver un procédé nouveau „d'intégration", tel que les coefficients a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de cette série et sa somme $f(x)$ puissent être liés toujours par la relation

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

l'intégrale étant prise dans ce nouveau sens.

Moscou, 1923.