Sur le principe de la condensation de singularités.

Par

S. Banach et H. Steinhaus (Léopol = Lwów).

Hankel a donné le nom du *principe de condensation de singularités* à une méthode que l'on rencontre dans beaucoup de raisonnements mathématiques et qui consiste en ce que l'on construit un objet jouissant d'une infinité des singularités à partir des objets (en nombre infini) qui n'ont chacun qu'une seule singularité.

Cette méthode exigeant chaque fois des artifices nouveaux, notre but est de remplacer ces artifices par deux théorèmes du calcul fonctionnel; ces sont les théorèmes I et II du § 2. Le § 1 est consacré aux définitions des certaines notions du calcul fonctionnel; nous n'aurons d'ailleurs à nous occupper que des fonctionnelles linéaires. Pour montrer comment on applique les théorèmes en question sans recourir aux raisonnements spéciaux nous avons choisi la théorie de séries orthogonales; ces exemples constituent le § 3. Il faut constater que la théorie de fonctions réelles et complexes et la théorie des équations fonctionnelles fournit aussi beaucoup d'exemples où notre méthode conduit aux théorèmes connus et inconnus.

M. Saks ayant lu notre manuscrit a remarqué que les démonstrations du § 2 admettent des simplifications considérables. Nous avons donc abandonné notre propre texte du § 2 en y substituant le texte de M. Saks. De cette manière nous avons évité certains calculs assez laborieux.

§ 1.

Soit D un espace 1⁰) vectoriel, 2⁰) métrique et 3⁰) complet. Nous entendons par là

1⁰) que les éléments de cet espace — qui seront désignés par des petites lettres latines — obéissent aux lois ordinaires

de l'algèbre en ce qui concerne leur addition mutuelle et leur multiplication par des nombres réels — désignés par des lettres grécques — ces deux opérations étant toujours possibles et conduisant toujours aux éléments de D,

2⁰) qu'à tout élément e de D il correspond un nombre non-négatif $\|e\|$ appelé *norme de e*, aux propriétés suivantes

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$
$$\|\lambda a\| = |\lambda| . \|a\|$$
$$\|a\| = 0 \text{ équivaut à } a = \theta,$$

θ étant *l'élément nul* existant en vertu de l'hypothèse 1⁰) et satisfaisant aux égalités $a + \theta = a$, $0 . a = \theta$,

3⁰) que la relation

$$(R) \qquad \lim_{p,q \to \infty} \|a_p - a_q\| = 0$$

implique l'existence d'un élément a de D tel que

$$(L) \qquad \lim_{p \to \infty} \|a - a_p\| = 0$$

Au lieu de (L) on écrit aussi

$$\lim_{p \to \infty} a_p = a$$

et au lieu de (R) on dit que „$\{a_n\}$ est une suite convergente"

Soit C un autre espace vectoriel et métrique. On définit une *fonctionnelle* $u(x)$ en faisant correspondre à chaque point x d'un espace D un point $u(x)$ de C. On appelle D le domaine et C le contredomaine de la fonctionnelle $u(x)$. Cette fonctionnelle sera *continue* si

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

implique

$$\lim_{n \to \infty} u(x_n) = u(x);$$

elle sera *additive* si

$$u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Pour abréger nous dirons qu'une fonctionnelle est *linéaire* quand elle sera continue et additive. On voit que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ si $u(x)$ est linéaire. On démontre aussi sans peine qu'à toute fonctionnelle linéaire $u(x)$ il correspond un nombre N tel que

$$\|u(x)\| \leqslant N \|x\| \qquad (x)$$

Désignons par M le moindre parmi les N; M portera le nom de la *norme de la fonctionnelle* $u(x)$, en symboles

$$M = \overline{\overline{u}}.$$

Etant donné un espace vectoriel et métrique on dit qu'un ensemble situé dans cet espace est *partout dense* s'il admet des points communs avec chaque sphère: une *sphère* est définie par l'inégalité $\| x - a \| \leqslant \rho$, a étant le *centre* et ρ $(\rho > 0)$ le *rayon* de la sphère. Un ensemble E_1 est *dense dans un ensemble* E_2 si toute sphère ayant à l'intérieur des points de E_2 contient aussi des points de E_1. (*L'intérieur* de la sphère $\| x - a \| \leqslant \rho$ est défini par l'inégalité $\| x - a \| < \rho$). Un ensemble est *non dense* s'il n'est dense dans aucune sphère.

Un ensemble est *de 1re catégorie*, s'il est la somme d'une série des ensembles non denses; il est *de 2me catégorie*, s'il n'est pas de 1re catégorie. On sait que dans un espace vectoriel, métrique et complet l'ensemble complémentaire à un ensemble de 1re catégorie est partout dense. Il s'ensuit que cet ensemble est non vide et qu'il est de 2me catégorie [1]).

§ 2.

Lemme 1. $\{u_n(x)\}$ étant une suite des fonctionnelles continues, l'ensemble E de points où $\limsup\limits_{n \to \infty} \| u_n(x) \|$ est finie, est la somme d'une suite d'ensembles fermés, tels que les $\| u_n(x) \|$ aient dans chacun d'eux une borne supérieure indépendante de n.

Démonstration. Définissons

$$F_{m,n} = \underset{x}{E}\,[\, \| u_n(x) \| \leqslant m \,] \qquad (m,n)$$

$$F_m = \prod_{n=1}^{\infty} F_{m,n} \qquad (m)$$

Chaque $F_{m,n}$, donc chaque F_m est fermé, car les $u_n(x)$ sont continues. Pour $x \,\varepsilon\, F_m$ on a

$$\| u_n(x) \| \leqslant m \qquad (n)$$

quelque soit n. D'autre part, si E est l'ensemble des x où $\limsup\limits_{n \to \infty} \| u_n(x) \|$ est finie, on aura

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} F_m,$$

ce qui est la représentation annoncée.

[1]) F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, pp. 327—328, VIII.

Lemme 2. Soit $\{u_n(x)\}$ la suite du lemme 1; si dans tout point x d'un ensemble H de 2me catégorie $\limsup\limits_{n \to \infty} \| u_n(x) \|$ est finie, alors il existe une sphère dans laquelle les $\| u_n(x) \|$ sont uniformément bornées.

Démonstration. En vertu du lemme 1 H est contenu dans une sommé des ensembles fermés F_m, les $\| u_n(x) \|$ étant uniformément bornées dans chaque F_m. H étant de 2me catégorie il est impossible que tous les F_m soient non denses. Il y a donc un F_k qui est dense dans une certaine sphère et comme il est fermé, il la contient. Dans cette sphère on a

$$\| u_n(x) \| \leqslant k. \qquad (n)$$

Lemme 3. Si $\{u_n(x)\}$ est une suite des fonctionnelles linéaires et $\limsup\limits_{n \to \infty} \| u_n(x) \|$ est finie dans un ensemble de la 2me catégorie, alors $\limsup\limits_{n \to \infty} \overline{\overline{u}}_n$ est finie.

Démonstration. En vertu du lemme 2 les $\| u_n(x) \|$ sont uniformément bornées dans une sphère et comme les $u_n(x)$ sont linéaires, la sphère du centre θ et du rayon 1 jouit de la même propriété.

Il existe donc un nombre N tel que $\| x \| \leqslant 1$ implique

$$\| u_n(x) \| \leqslant N. \qquad (n)$$

On aura alors pour tous les $x \neq \theta$ et tous les n

$$\| u_n(x) \| = \| x \| \cdot \left\| u_n \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| \leqslant N \| x \|$$

ce qui donne

$$\overline{\overline{u}}_n \leqslant N. \qquad (n)$$

Lemme 4. Si une suite de fonctionnelles linéaires $\{u_n(x)\}$ converge dans un ensemble dense dans une sphère K et si $\limsup\limits_{n \to \infty} \overline{\overline{u}}_n$ est finie, alors la suite en question converge dans tout l'espace.

Démonstration. Par hypothèse il existe un nombre positif N tel que

$$\| u_n(x) \| \leqslant N . \| x \| \qquad (x,n)$$

Soit a un point de K et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un y dans K tel que

$$\| y - a \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3N}$$

et que la suite $\{u_n(y)\}$ est convergente. Soit alors p un nombre tel que $m > p$, $n > p$ impliquent

$$\| u_m(y) - u_n(y) \| < \frac{\varepsilon}{3};$$

on aura pour $m > p$, $n > p$.

$$\| u_m(a) - u_n(a) \| \leqslant \| u_m(y) - u_n(y) \| + \| u_m(a-y) \| +$$
$$+ \| u_n(a-y) \| < \frac{\varepsilon}{3} + N \frac{\varepsilon}{3N} + N \frac{\varepsilon}{3N} = \varepsilon.$$

La suite $\{u_n(a)\}$ est donc convergente pour tout a de K et, les $u_n(x)$ étant linéaires, pour tous les a.

Jusqu'ici nous avons supposé seulement que l'espace où les $u_n(x)$ de ce § ont été définies était vectoriel et métrique; maintenant nous utiliserons aussi sa troisième propriété: qu'il est complet.

Théorème I. Soit $\{u_{pq}(x)\}$ une suite double de fonctionnelles linéaires; si à tout p il correspond un x_p tel que l'on ait

$$(1) \qquad \lim_{q\to\infty} \sup \| u_{pq}(x_p) \| = \infty, \qquad (p)$$

alors il existe un x (indépendant de p) remplissant toutes les relations

$$(2) \qquad \lim_{q\to\infty} \sup \| u_{pq}(x) \| = \infty \qquad (p)$$

Démonstration. Soit E_p l'ensemble des x où

$$\lim_{q\to\infty} \sup \| u_{pq}(x) \| < \infty$$

Comme — par hypothèse — (1) est vérifié par certains x_p, on a

$$\lim_{q\to\infty} \sup \overline{\overline{u}}_{pq} = \infty \qquad (p)$$

et, suivant le lemme 3, E_p est de 1re catégorie; l'ensemble $E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p$ est donc aussi de la 1re catégorie. Or, la relation (2) est évidemment valable pour tous les p si x appartient à l'ensemble complémentaire à E. Cet ensemble complémentaire étant de 2me catégorie et partout dense, comme on a remarqué à la fin du § 1, le théorème est démontré.

Théorème II. Soit $\{u_{pq}(x)\}$ une suite double de fonctionnelles linéaires; si à tout p il correspond un x_p rendant divergente la suite simple $\{u_{pq}(x_p)\}_{q\to\infty}$, alors il existe un x (indépendant de p) qui rend divergentes toutes les suites simples $\{u_{pq}(x)\}_{q\to\infty}$.

Démonstration. Désignons par E_p l'ensemble des x pour lesquels la suite $\{u_{pq}(x)\}_{q\to\infty}$ est convergente. Je dis que E_p est de 1re catégorie. En effet, si

$$\lim_{q\to\infty} \sup \overline{\overline{u}}_{pq} < \infty;$$

E_p est non dense, car, s'il était dense dans une sphère, il remplirait d'après le lemme 4, tout l'espace, contrairement à l'hypothèse. Si — au contraire —

$$\lim_{q\to\infty} \sup \overline{\overline{u}}_{pq} = \infty,$$

on voit, en vertu du lemme 3, que l'ensemble E_p^* des x où $\lim_{q\to\infty} \sup \| u_{pq}(x) \|$ est finie, est de la 1re catégorie; or, E_p est contenu dans E_p^*. Dans les deux cas E_p, donc $E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p$ est de 1re catégorie. Les x qui appartiennent à $G =$ l'ensemble complémentaire à E, rendent évidemment divergentes toutes les suites

$$\{u_{pq}(x)\}_{q\to\infty}$$

à la fois. G étant de 2me catégorie et partout dense, la démonstration est achevée.

Remarque. Pour pouvoir parler de la convergence ou divergence d'une suite des fonctionnelles il faut que les „contredomaines" C_n des termes $u_n(x)$ soient identiques. Cela n'implique nullement que les contredomaines correspondants aux différentes lignes d'une suite double $u_{pq}(x)$ des fonctionnelles soient identiques: nos theorèmes I et II s'appliquent aux cas où chaque suite $\{u_{pq}(x)\}_{q\to\infty}$ possède un contredomaine C_p dépendant de p.

§ 3.

Nous aurons à nous occuper dans ce § du développement d'une fonction $f(\tau)$ suivant les fonctions $g_k(\tau)$ de la variable réelle τ, les $g_k(\tau)$ étant continues et formant un système orthogonal et normé dans l'intervalle $<\alpha, \beta>$.

On écrira:

$$K_n(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\tau)\, g_k(\omega)$$

$$s_n(f) = s_n(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} K_n(\tau, \omega)\, f(\omega)\, d\omega$$

$s_n(\tau)$ est donc la n-ième somme partielle du développement de $f(\tau)$ suivant les $g_k(\tau)$.

Prémier exemple. Le domaine D soit l'ensemble de toutes les fonctions $x(\tau)$ continues pour $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. La somme, le produit et la norme soient définies comme il suit:

$x + y = x(\tau) + y(\tau)$ (le signe $+$ au deuxième membre a la signification ordinaire).

$\lambda x = \lambda \,.\, x(\tau)$ (le signe . au second membre a la signification ordinaire).

$\|x\|$ = maximum de $|x(\tau)|$ dans $\langle \alpha, \beta \rangle$.

L'élément „nul" θ soit donné par la fonction $x(\tau) \equiv 0$ $\langle \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta \rangle$. On voit facilement que ce domaine vérifie les postulats du § 1. Pour contredomaine nous prenons l'ensemble de nombres réels, l'addition, la multiplication et l'élément nul ayant la définition ordinaire et la norme étant égale au module.

Soit $\{\tau_p\}$ une suite de points de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Définissons une fonctionnelle $u_{pq}(x)$ par la relation

$$u_{pq}(x) = s_q(x)_{\tau=\tau_p} = \int_{\alpha}^{\beta} K_q(\tau_p, \omega)\, x(\omega)\, d\omega$$

On vérifie sans difficulté que les fonctionnelles $u_{pq}(x)$ sont linéaires dans D, leurs valeurs appartenant à C.

Appliquons à la suite double $\{u_{pq}(x)\}$ les théorèmes I et II du § 2 en tenant compte de la signification de $s_q(x)$; nous obtiendrons immédiatement les théorèmes suivants:

Théorème 1. Si $\{g_k(\tau)\}$ est un système orthogonal et normé de fonctions continues dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et si à tout point τ_p d'un ensemble dénombrable ($\tau_p \varepsilon \langle \alpha\ \beta \rangle$) il correspond une fonction continue dont le développement suivant les $\{g_k\}$ est divergent au point $\tau = \tau_p$ [la limite supérieure du module de sommes partielles étant infinie], alors il existe une fonction continue dont le développement a la même propriété par rapport à **tous** les points τ_p.

Théorème 1'. On énonce ce théorème en supprimant le contenu de la parenthèse [] du théorème 1.

Deuxième exemple. Le domaine D et le contredomaine C soient définis comme dans l'exemple précédent. Supposons que l'on ait défini un ensemble dénombrable de systèmes $\{g_k(\tau)\}$ chacun étant orthogonal, normé et composé de fonctions continues. Il faut donc munir d'un indice supérieur (p) les $g_k(\tau)$ les s_n et les K_n correspondants. Soit τ_o un point de $\langle \alpha, \beta \rangle$. Définissons les fonctionnelles $u_{pq}(x)$ comme il suit:

$$u_{pq}(x) = s_q^{(p)}(x)_{\tau=\tau_o} = \int_{\alpha}^{\beta} K_q^{(p)}(\tau_o, \omega)\, x(\omega)\, d\omega$$

Après avoir vérifié que ces fonctionnelles sont linéaires on applique les théorèmes I et II; on obtient ainsi le

Théorème 2. Si $\{G_p\}$ est un ensemble dénombrable dont les éléments G_p sont des systèmes orthogonaux et normés de fonctions continues dans $\langle \alpha\, \beta \rangle$ et si à tout G_p il correspond une fonction continue dont le développement suivant G_p est divergent au point $\tau = \tau_o$ ($\tau_o \varepsilon \langle \alpha, \beta \rangle$) [la limite supérieure du module de sommes partielles étant infinie], alors il existe une fonction continue dont les développements ont la même propriété par rapport à **tous** les G_p,

Théorème 2'. On supprime le contenu de la parenthèse [] dans l'énoncé du théorème 2.

Troisième exemple. Le domaine D, le contredomaine C et le système $\{g_k(\tau)\}$ soient définis comme dans l'exemple premier. Soit

$$(T) \quad \begin{array}{cccccccc} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots\beta_{1k_1} & & & & & \\ \beta_{21}, & \beta_{22} & \cdots\beta_{2k_2} & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{i1}, & \beta_{i2} & \cdot & \cdot & \beta_{ik_i} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

un tableau sommatoire à lignes finies, dit „de Toeplitz". Pour calculer „la limite généralisée" d'une suite $\{s_n\}$ on calcule la limite ordinaire

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_i} \beta_{ik} s_k,$$

quand elle existe. On dit alors que la suite $\{s_n\}$ devient convergente quand on lui applique le procédé (T). Quand s_n sont les sommes partielles d'une série, on dit que cette série est sommable par le procédé (T).

Pour appliquer un procédé (T) au développement d'une fonction $x(\tau)$ suivant un système $\{g_k(\tau)\}$, on forme d'abord les expressions:

$$k_q(\tau, \omega) = \sum_{k=1}^{k_q} \beta_k \; K_k(\tau, \omega)$$

et puis les expressions

$$S_q[x]_{\tau=\tau_o} = \int_\alpha^\beta k_q(\tau_o, \omega)\, x(\omega)\, d\omega;$$

La sommabilité du développement de $x(\tau)$ pour $\tau = \tau_o$ par le procédé (T) est évidemment équivalente à la convergence ordinaire de la suite $\{s_q[x]_{\tau=\tau_o}\}$.

Considérons maintenant un ensemble dénombrable $\{T_p\}$ de procédés (T). Les k_q et les s_q correspondants auront un indice supérieur p. En définissant les fonctionnells suivantes

$$\mu_{pq}(x) = s_q^{(p)}[x]_{\tau=\tau_o} = \int_\alpha^\beta K_q^{(p)}(\tau_o, \omega)\, x(\omega)\, d\omega$$

et en se servant du théorème II, on obtient immédiatement le

Théorème 3. Si $\{T_p\}$ est un ensemble dénombrable de procédés sommatoires de Toeplitz, $\{g_k(\tau)\}$ un système orthogonal et normal de fonctions continues dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et τ_o un point de $\langle \alpha \beta \rangle$ et si à tout procédé (T_p) il correspond une fonction continue dont le développement suivant les $\{g_k\}$ n'est pas sommable par (T_p) au point $\tau = \tau_o$, alors il existe une fonction continue dont le développement suivant les $\{g_k\}$ est — au point $\tau = \tau_o$ — refractaire à **tous** les procédés $\{T_p\}$.

Quatrième exemple. Le domaine D soit l'ensemble de toutes les fonctions $x(\tau)$ définies et intégrables (L) dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. La somme et le produit soient définis comme dans le premier exemple; l'élément „nul" soit la fonction nulle presque partout. La norme soit égale à $\int_\alpha^\beta |x(\tau)|\, d\tau$.

Le contredomaine C soit défini comme D avec la seule différence qu'au lieu de $\langle \alpha, \beta \rangle$ on prend un intervalle $\langle \gamma, \delta \rangle$ partie de $\langle \alpha, \beta \rangle$. $(\alpha \leqslant \gamma < \delta \leqslant \beta)$.

Les fonctionnelles $u_{pq}(x)$ soient définies par la relation

$$u_{pq}(x) = s_q[x] = \int_\alpha^\beta K_q(\tau, \omega)\, x(\omega)\, d\omega$$

K_n ayant la même signification qu'au premier exemple. La dépendance de p est donnée du moment que l'on considère $s_q[x]$, qui est une fonction de τ seulement dans l'intervalle $\gamma_p \leqslant \tau \leqslant \delta_p$.

En appliquant à la suite double $\{u_{pq}(x)\}$ le théorème II et tenant compte de la remarque finale du § 2 on obtient le

Théorème 4. Si $\{g_k(\tau)\}$ est un système orthogonal et normal de fonctions continues dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et si à tout intervalle $\langle \gamma_p, \delta_p \rangle$ d'un ensemble dénombrable des intervalles il correspond une fonction intégrable $x_p(\tau)$ dont le développement suivant les $\{g_k\}$ a la propriété

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\gamma_p}^{\delta_p} |s_n(\tau)|\, d\tau = \infty \tag{3}$$

alors il existe une fonction intégrable $x(\tau)$ dont le développement a la même propriété par rapport à **tous** les intervalles $\langle \gamma_p, \delta_p \rangle$.

Application aux séries de Fourier. Nous avons démontré ailleurs [1]) l'existence d'une fonction intégrable $f(\tau)$ qui a la propriété exprimée par la relation

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |s_n^{(1)}(\tau)|\, d\tau = \infty,$$

en désignant par $s_n^{(1)}(\tau)$ la n-ième somme partielle du développement de Fourier de $f(\tau)$. Il s'en suit qu'au moins une de deux expressions

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^{\pi} |s_n^{(1)}(\tau)|\, d\tau, \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} |s_n^{(1)}(\tau)|\, d\tau$$

est infinie.

Supposons que c'est la prémière. Définissons $f(\tau)$ pour tous

[1]) S. Banach et H. Steinhaus: Sur la convergence en moyenne des séries de Fourier. *Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie;* séance du 6 mai 1918, pp. 87—96.

les τ par l'équation $f(\tau + 2\tau k\pi) = f(x)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$ et définissons une nouvelle fonction $h(\tau)$ par l'équation

$$h(\tau) = f(\tau - \pi).$$

En désignant par $s_n^{(2)}(\tau)$ la somme partielle correspondante à $h(\tau)$ nous aurons évidemment

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} |s_n^{(2)}(\tau)|\, d\tau = \infty$$

En procédant de la même manière on trouve pour chaque intervalle de l'ensemble $\left\{\left\langle \frac{2\pi i}{2^j}, \frac{2\pi(i+1)}{2^j} \right\rangle\right\}$ $(i = 0, 2, \ldots 2^j - 1,$ $j = 0, 1, 2\ldots)$ une fonction dont le développement de Fourier jouit de la propriété (3), les γ_p, δ_p étant les extrémités de ces intervalles. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4 en prenant pour les $\{g_k\}$ les fonctions trigonométriques, ce qui nous conduit au

Théorème 5. Il existe une fonction intégrable $f(\tau)$ dont les sommes partielles de Fourier $s_n(\tau)$ ont la propriété

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |s_n(\tau)|\, d\tau = +\infty$$

pour tous les intervalles $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les généralisations et combinaisons des théorèmes précédents. Il est aussi aisé de voir que la condition de continuité imposée aux $\{g_k\}$ pour simplifier nos exemples n'a pas été toujours pleinement utilisée.