et soit

$$e = \epsilon(x) \equiv 0$$

l'unité et

$$f^{-1} = -f(x)$$

l'élément inverse de $f(x)$. Les voisinages étant définis comme ordinairement on voit que toutes les hypothèses specifiées au début sont satisfaites, donc G forme un groupe métrique. Il est connexe et de puissance, plus grande que celle du continu.

Sur la puissance des ensembles d'une certaine classe

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Introduction. Dans la Note *„Un théorème concernant la puissance d'ensembles de points"* [1]) M. Kuratowski a démontré que les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en appliquant un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois les opérations A et C (complémentaire), ensembles dont l'étude a été proposée par M. Lusin [2]) et dont la classe nous désignerons par L, jouissent de la propriété P suivante:

Tout ensemble de la classe L ne contenant aucun sous-ensemble parfait est de puissance $\leqslant \aleph_1$.

La démonstration de M. Kuratowski s'appuit sur la même propriété des ensembles que j'ai nommés *hyperboreliens,* propriété que j'ai établie dans la note *„Sur les ensembles hyperboreliens"* [3]). M. Kuratowski prouve par l'induction transfinie que tout ensemble de la classe L est un ensemble hyperborelien.

Dans la présente note nous démontrerons sans recours à l'induction transfinie (en utilisant seulement quelques propriétés des ensembles (A) antérieurement démontrées) que tout ensemble de la classe L est un ensemble hyperborelien, et nous indiquerons comment on pourrait démontrer directement (sans

[1]) Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie. Séance du 29 avril 1925.

[2]) Voir: Fund. Math. t. V, p. 165, note [3]).

[3]) C. R. de la Soc. des Sciences de Varsovie, séance du 29 avril 1926.

introduire les ensembles hyper-(A), comme dans notre noté citée) que les ensembles hyperboreliens jouissent de la propriété P.

1. La classe L peut être évidemment définie comme la plus petite classe K d'ensembles linéaires satisfaisant à trois conditions suivantes:

1^0 Les intervalles appartiennent à K.

2^0 Les résultats de l'opération A effectuée sur les ensembles appartenant à K, appartiennent à K.

3^0 Les complémentaires des ensembles appartenant à K appartiennent à K.

La classe H de tous les ensembles hyperboreliens (linéaires) peut être définie comme la plus petite classe K des ensembles linéaires satisfaisant à trois conditions suivantes:

1) Les intervalles appartiennent à K.

2) Les sommes de $\aleph_1$ ensembles dont chacun appartient à K, appartiennent à K.

3) Les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à K, appartiennent à K.

Désignons par H_o la classe de tous les ensembles E, tels que E et CE appartiennent à H. Nous prouverons que

$$L \subset H_o. \tag{1}$$

Pour démontrer la formule (1) il sufit évidemment de prouver que la classe H_o jouit des propriétés 1^0, 2^0 et 3^0.

Les ensembles mesurables (B) appartenant évidemment à H, on voit sans peine que les intervalles appartiennent à H_o: la classe $K = H_o$ jouit donc de la propriété 1^0. Or, il s'en suit immédiatement de la définition de la classe $K = H_o$ qu'elle jouit de la propriété 3^0. Il nous reste donc à démontrer que la classe $K = H_o$ jouit de la propriété 2^0.

A ce but nous prouverons d'abord la propriété suivante de la classe H_o:

2^1. La somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à H_o, appartiennent à H_o.

En effet, soit $E_1, E_2, E_3 \dots$ une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun appartient à H_o. D'après la définition de H_o, les ensembles E_n ainsi que leurs complémentaires CE_n appartiennent à H (pour $n = 1, 2, 3, \dots$), donc (d'après les propriétés 2) et 3) de H) aussi les ensembles $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, $C(E_1 + E_2 + E_3 + \dots) = CE_1 \cdot CE_2 \cdot CE_3 \dots$, $E_1 E_2 E_3 \dots$ et $C(E_1 E_2 E_3 \dots) = CE_1 + CE_2 + CE_3 + \dots$ (comme sommes ou produits dénombrables d'ensembles appartenant à H) appartiennent à H, ce qui prouve que les ensembles $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ et $E_1 E_2 E_3 \dots$ appartiennent à H_o, c. q. f. d.

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles, désignons généralement par $B(F)$ la classe de tous les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles de la famille F et en effectuant un nombre fini on une infinité dénombrable de fois les opératons d'addition, de multiplication et de complémentation d'ensembles.

Il résulte des propriétés 2^1 et 3^0 de la classe $K = H_o$ que

$$B(H_o) \subset H_o. \tag{2}$$

Soit maintenant $E_1, E_2, E_3, \dots$ une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à H_o, et soit $E = A(E_1, E_2, \dots)$ le résultat d'une opération A effectuée sur les ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$

En modifiant légèrement le raisonnement utilisé dans ma note *„Sur une propriété des ensembles* (A)*"* (Fund. Math. t. VIII, p. 359), on pourrait démontrer que les ensembles E et CE sont sommes de $\aleph_1$ ensembles dont chacun est un résultat d'une infinité dénombrable d'additions, de multiplications et de complémentations d'ensembles effectuées en partant des ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$, donc, en partant des ensembles de H_o. Par conséquent les ensembles E et CE sont sommes de $\aleph_1$ ensembles appartenant à $B(H_o)$, donc, d'après (1), à H_o, et il en résulte (d'aprés $H_o \subset H$ et d'après la propriété 2) de la classe H) que E et CE appartiennent à H, ce qui prouve que E appartient à H_o. Nous avons ainsi démontré que la classe $K = H_o$ jouit de la propriété 2^0.

La formule (1) est ainsi établie.

Remarquons qu'on pourrait démontrer que les images continues totalement imparfaits des ensembles de la classe H sont de puissance $\leqslant \aleph_1$. Le problème si les ensembles complémentaires aux images continues des ensembles de la classe H jouissent de la même propriété me semble très difficile.

2. Quant à la propriété que tout ensemble hyperborelien totalement imparfait est de puissance $\leqslant \aleph_1$, elle pourrait être démontrée directement (sans l'aide de nombres transfinis et sans introduire les ensembles hyper-(A)) par une modification convenable du raisonnement, d'après lequel j'ai démontré, il y a quelques ans, que tout ensemble mesurable (B) non dénombrable contient un sous-ensemble parfait [1]). On pourrait notamment définir une propriété Π d'ensembles et prouver qu'elle appartient aux ensembles fermés, aux sommes de $\aleph_1$ ensembles jouissant de la propriété Π et aux produits de $\aleph_0$ ensembles jouissant de la propriété Π. Il en résulte tout de suite que tout ensemble hyperborelien jouit de la propriété Π. Or, on pourrait prouver que tout ensemble totalement imparfait jouissant de la propriété Π est de puissance $\leqslant \aleph_1$.

La définition de la propriété Π en question est la suivante.

Nous dirons qu'un ensemble (linéaire) E jouit de la propriété Π, s'il existe une suite infinie de fonctions d'ensembles $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant à deux conditions suivantes:

1°. Si P_n est un ensemble de puissance $> \aleph_1$ [2]), $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est un ensemble de puissance $> \aleph_1$ contenu dans P_n.

2°. Si P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie d'ensembles, telle que

α) $P_1 \subset E$,

β) $P_{n+1} \subset \varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

γ) P_n est un ensemble de puissance $> \aleph_1$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$)

alors

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 \cdot \overline{P}_3 \ldots \subset E \qquad (\text{où } \overline{P} = P + P')$$

On voit sans peine que les ensembles fermés jouissent de la propriété Π (Pour obtenir la suite correspondante de fonctions φ_n, il suffirait de poser $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = P_n$ pour tout n naturel et tous les ensembles $P_1\ P_2, \ldots, P_n$). pour prouver qu'une somme de $\aleph_1$ ensembles et qu'un produit de $\aleph_0$ ensembles jouissant de la propriété Π jouissent de cette propiété, et pour prouver que si E est un ensemble de puissance $> \aleph_1$ jouissant de la propriété Π, E contient un sous-ensemble parfait, il suffirait de modifier légèrement les démonstrations des propriétés analogues qui se trouvent dans ma note citée du vol. V de ce journal.

[1]) Fund. Math. t. V (1924), p. 166 — 171.

[2]) Nous ne préjugeons guère la question d'existence de tels ensembles.